ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1973 МАТЕМАТИКА № 7 (134)

УДК 518

Б. Г. Габдулхаев, П. Н. Душков

О ПРЯМЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

§ 1. Постановка задачи и вспомогательные результаты

1°. Известно, что ряд задач механики (см., например, [1] — [3]) сводится к сингулярному интегральному уравнению I рода вида

$$L\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} h(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{1.1}$$

где h (по обоим аргументам) и f — непрерывные функции, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши—Лебегу [1]. Теория таких уравнений довольно хорошо разработана (см., например, [1]). Рядом авторов рассматривались также вопросы приближенного решения уравнения (1.1) (см., например, [2] — [8]). Первой в этом направлении является работа М. А. Лаврентьева [2], в которой исследуется полигональный метод, а также обсуждается применение метода моментов к этому уравнению.

Следует подчеркнуть, что ряд весьма важных и интересных результатов по приближенному решению уравнения (1.1) следует из общих результатов В. В. Иванова [4], предложенных им для сингулярных интегральных уравнений, в основном, II рода. Далее, в работе [5] А. И. Каландия предлагает различные вычислительные схемы метода механических квадратур (м.м.к.) и отмечает (в подстрочном примечании) возможность обоснования этих схем с помощью общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича [9]. В работе [6] Г. Бракхаге при весьма жестких предположениях относительно функций $h(t, \tau)$ и $f(t)$ исследует одну частную схему м.м.к. В работе [7] И. И. Ефремов, исходя из физических соображений, предлагает различные вычислительные схемы м.м.к. для уравнения типа (1.1). В работе [8] М. Шлифф на основе обобщения метода редукции устанавливает, в частности, сходимость метода типа Мультоппа для некоторого сингулярного интегро-дифференциального уравнения, близкого по форме к уравнению (1.1).

Данная заметка посвящена приближенному решению уравнения (1.1) методами интерполяционного типа. Основное внимание при этом уделяется обоснованию рассматриваемых вычислительных схем на основе одной модификации общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича [10][1]. Доказывается сходимость в среднем указанных методов, а равномерная сходимость получается как следствие сходимости в среднем. Устанавливаются среднеквадратические и равномерные оценки погрешностей.

[1] В силу ряда причин теория Канторовича в нашем случае неприменима.

2°. В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Пусть C и L_2 — пространства соответственно непрерывных и квадратично суммируемых 2π-периодических функций с обычными нормами, причем $\|\varphi\| = 1$ при $\varphi(s) \equiv 1$. Обозначим через P_n оператор, ставящий в соответствие любой нечетной функции $\varphi(s) \in C$ ее нечетный тригонометрический интерполяционный полином порядка n по узлам

$$s_k = s_k^{(n)} = k\pi/(n+1) \quad (k = \overline{1,\ n}). \tag{1.2}$$

Аналогично, обозначим через Q_n оператор, ставящий в соответствие любой четной функции $\psi(\theta) \in C$ ее четный интерполяционный полином порядка $n-1$ по узлам

$$\theta_k = \theta_k^{(n)} = (2k-1)\pi/2n \ (k = \overline{1,\ n}). \tag{1.3}$$

Сопоставлением соответствующих результатов работ [4], [11] и [12] легко получаются следующие две леммы.

Лемма 1. *Равномерно относительно n ($n \geqslant 1$) имеем*

$$\text{а) } \|P_n\|_{C\to L_2} = \|Q_n\|_{C\to L_2} = 1; \quad \text{б) } \|P_n\|_{L_2} = \|Q_n\|_{L_2} = \infty;$$

$$\text{в) } \|P_n\|_C \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi}(n+1), \quad \|Q_n\|_C \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi}n.$$

Лемма 2. а) *Для любой нечетной функции $\varphi(s) \in C$*

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_2 = \|\varphi - P_n\varphi\|_{L_2} \leqslant 2E_n(\varphi);$$

б) *для любой четной функции $\psi(\theta) \in C$*

$$\|\psi - Q_n\psi\|_2 \leqslant 2E_{n-1}(\psi),$$

где $E_m(f) = E_m(f)_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(s) \in C$ тригонометрическими полиномами порядка не выше m.

Далее, справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть для функции $z(t) \in C$ выполнено условие*

$$\|z - T_n\|_2 \leqslant An^{-r} \quad (n = 1,\ 2, \ldots), \tag{1.4}$$

где $T_n(t)$ — тригонометрический полином степени n, а r и A — некоторые положительные постоянные. Если $r > 1$, то имеет место оценка

$$\|z' - T_n'\|_2 \leqslant ABn^{-r+1}, \quad B = B(r) = (1+2^r)(2^{r-1}-1)^{-1}. \tag{1.5}$$

Доказательство проведем методом, предложенным в работе [13]. С помощью (1.4) функцию $z(t) - T_n(t)$ можно представить в L_2 в виде ряда

$$z(t) - T_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t), \quad U_k(t) = T_{2^k n}(t) - T_{2^{k-1} n}(t),$$

для общего члена которого получается оценка

$$\|U_k(t)\|_2 \leqslant \|T_{2^k n}(t) - z(t)\|_2 + \|T_{2^{k-1} n}(t) - z(t)\|_2 \leqslant A(1+2^r)n^{-r}2^{-kr}. \tag{1.6}$$

Функция $U_k(t)$ является тригонометрическим полиномом степени $2^k n$. Тогда из (1.6) с помощью неравенства Бернштейна [15] находим

$$\|U_k'(t)\|_2 \leqslant 2^k n \|U_k(t)\|_2 \leqslant A(1+2^r)n^{-r+1}(2^{-r+1})^k. \tag{1.7}$$

Так как, по условию, $r > 1$, из (1.7) вытекает сходимость в среднем ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U'_k(t)$. Тогда обычным способом заключаем, что функция $z(t)$ имеет производную в L_2 и справедливо равенство $z'(t) - T'_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U'_k(t)$, откуда с помощью (1.7) получаем неравенство (1.5).

Далее, пусть R_n означает оператор, ставящий в соответствие любой нечетной функции $y(t) \in C$ нечетный полином $y_n(t) = R_n y$ степени n, удовлетворяющий условиям

$$\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} y_n(t)\,dt = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} y(t)\,dt, \quad \theta_k = \theta_k^{(n+1)} \quad (k = \overline{1, n}). \tag{1.8}$$

Как легко видеть, полином $y_n(t)$ определяется из условий (1.8) единственным образом. При этом, следуя И. Петерсену [14], нетрудно доказать равенство

$$(R_n y)(t) = (Q_{n+1} z)'(t), \quad z(t) = \int_0^t y(s)\,ds. \tag{1.9}$$

Лемма 4. а) *Справедлива оценка*

$$\|R_n\|_C \leqslant 3 + \pi + \pi \|Q_{n+1}\|_C;$$

б) *для любой нечетной функции* $y(t)$ *из* C

$$\|y - R_n y\|_C \leqslant (2 + \pi + \pi \|Q_{n+1}\|_C) E_n(y);$$

в) *если, кроме того,* $y(t) \in H_\alpha^{(r)}$ $(r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$ [1], *то*

$$\|y - R_n y\|_2 \leqslant \frac{3\pi}{2} \frac{2^{r+1+\alpha} + 1}{2^{r+\alpha} - 1} \frac{H(y^{(r)}; \alpha)}{n^{r+\alpha}}.$$

Доказательство. Если $y(t) \in C$, то функция $z(t)$ из (1.9) удовлетворяет условию H_1 с константой $H(z;\ 1) = \|z'(t)\|_C$. Теперь с учетом леммы 1 и порядка наилучшего приближения [15] находим

$$\|z - Q_{n+1} z\|_C \leqslant (1 + \|Q_{n+1}\|_C) E_n(z) \leqslant \frac{\pi}{2}(1 + \|Q_{n+1}\|_C) H(z;\ 1) n^{-1},$$

откуда с помощью результатов работы [13] получаем

$$H(z - Q_{n+1} z;\ 1) = \|z' - (Q_{n+1} z)'\|_C \leqslant (2 + \pi + \pi \|Q_{n+1}\|_C) H(z; 1).$$

Таким образом, в силу (1.9),

$$\|y - R_n y\|_C \leqslant (2 + \pi + \pi \|Q_{n+1}\|_C) \|y\|_C,$$

откуда следуют первые две [2] оценки леммы.

Далее, если $y(t) \in H_\alpha^{(r)}$, то функция $z(t)$ из (1.9) принадлежит классу $H_\alpha^{(r+1)}$, поэтому с помощью леммы 2 и [15] имеем

$$\|z - Q_{n+1} z\|_2 \leqslant 2E_n(z) \leqslant (3\pi/2) H(z^{(r+1)};\ \alpha) n^{-r-1-\alpha}.$$

[1] Т. е. функция $y(t)$ имеет производную порядка r, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем α и с константой $H(y^{(r)};\ \alpha)$.

[2] Здесь вместо $\pi\|Q_{n+1}\|_C$ можно получить (но более громоздким путем) $\frac{\pi}{2}\|Q_{n+1}\|_C$.

Применяя к разности $z - Q_{n+1}z$ лемму 3, с учетом (1.9) убеждаемся в справедливости последней оценки леммы.

Заметим, что, используя работу А. Л. Гаркави [16], для $\|y - R_n y\|_C$ можно получить также оценку

$$\|y - R_n y\|_C \leqslant \left[\frac{\pi}{2} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi^2}\ln 2 + \pi e + 4\right) + \frac{\pi}{2}\|Q_{n+1}\|_C\right] E_n(y).$$

§ 2. Методы коллокации и механических квадратур

1°. Будем искать решение уравнения (1.1), неограниченное на обоих концах отрезка $[-1, 1]$. Как известно [1], такое решение имеет вид

$$\varphi(t) = x(t)/\sqrt{1 - t^2}, \tag{2.1}$$

где $x(t)$ — интегрируемая функция. Преобразовывая уравнение (1.1) с помощью (2.1) и подстановок $\tau = \cos\theta$, $t = \cos s$, получаем следующее эквивалентное уравнение:

$$Kx \equiv \frac{\sin s}{\pi}\int_0^\pi \frac{x(\theta)}{\cos\theta - \cos s}\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s, \theta)\,x(\theta)\,d\theta = y(s), \tag{2.2}$$

$x(\theta) \equiv x(\cos\theta)$, $g(s, \theta) = \sin s\, h(\cos s, \cos\theta)$, $y(s) \equiv \sin s\, f(\cos s)$.

Для определенности в этом пункте будем искать решение, удовлетворяющее условию

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt = \int_{-1}^{1} x(t)(1 - t^2)^{-1/2}\,dt = \int_0^\pi x(\theta)\,d\theta = 0. \tag{2.3}$$

В связи с этим приближенное решение уравнения (2.2) будем искать в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cos ks. \tag{2.4}$$

Согласно методу коллокации (м.к.) неизвестные коэффициенты будем определять из условий $(Kx_n)(s_j) = y(s_j) = y_j$ $(j = \overline{1, n})$, которые могут быть записаны также в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений[1)]

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{jk} + \beta_{jk})\,c_k = y_j \ (j = \overline{1, n}); \quad \alpha_{jk} = \sin ks_j, \ \beta_{jk} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s_j, \theta)\cos k\theta\,d\theta. \tag{2.5}$$

Для вычислительной схемы (2.1) — (2.5) справедлива

Теорема 1. *Пусть уравнение* (2.2) *имеет единственное квадратично суммируемое решение* $x^*(s)$ *при произвольной правой части. Тогда для всех достаточно больших* n (*точнее, при выполнении неравенства* $p = p(n) < 1$, *которое дается ниже*) *система м.к.* (2.5) *имеет единственное решение* $\{c_k^*\}$. *При этом приближенные решения* $x_n^*(s)$ (*т. е.* (2.4) *при* $c_k = c_k^*$) *сходятся в среднем к точному решению* $x^*(s)$ *уравнения* (2.2) *с быстротой*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant a_1 (E_n^s(g) + E_n(y)), \tag{2.6}$$

1) Узлы $s_j = s_j^{(n)}$ определены в (1.2).

где[1] $E^s_m(g)=E^s_m(g)_C$ — *наилучшее равномерное приближение функции* $g(s,\theta)$ *по* s *(равномерно относительно* θ*) тригонометрическими полиномами порядка не выше* n.

Доказательство. Обозначим через X множество четных функций из L_2, удовлетворяющих условию (2.3) с обычной нормой $\|x\|_X=\|x\|_2=\|x\|_{L_2}$ $(x\in X)$; через Y обозначим множество нечетных функций из L_2 с такой же нормой. Тогда уравнение (2.2) может быть записано как линейное операторное уравнение вида

$$Kx\equiv Ix+Tgx=y \quad (x\in X,\ y\in Y),$$

$$Ix=I_1x\equiv\frac{\sin s}{\pi}\int_0^\pi\frac{x(\theta)}{\cos\theta-\cos s}d\theta,\quad Tgx\equiv\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s,\theta)\,x(\theta)\,d\theta. \tag{2.7}$$

Введем n-мерные подпространства X_n и Y_n:

$$X_n\subset X,\quad X_n=\left\{\sum_{k=1}^n\alpha_k\cos ks\right\};\quad Y_n\subset Y,\quad Y_n=\left\{\sum_{k=1}^n\beta_k\sin ks\right\}.$$

Тогда система (2.5) может быть записана в виде функционального уравнения

$$K_nx_n\equiv P_nKx_n\equiv Ix_n+P_nTgx_n=y_n\quad (x_n\in X_n,\ y_n=P_ny\in Y_n), \tag{2.8}$$

где оператор $P=P_n$ определен в лемме 1.

Далее, в силу (2.7), (2.8) и леммы 2 для любого $x_n\in X_n$ находим[2]

$$\|K_nx_n-Kx_n\|_2=\|Kx_n-P_nKx_n\|_2=\|Tgx_n-P_nTgx_n\|_2=$$

$$=\|T(g-P^s_ng)x_n\|_2\leqslant\left(\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi d\theta\int_0^\pi|g(s,\theta)-P^s_ng(s,\theta)|^2ds\right)^{1/2}\|x_n\|_2\leqslant$$

$$\leqslant 2E^s_n(g)\|x_n\|_2. \tag{2.9}$$

Положим $p=p_1(n)=2E^s_n(g)\|K^{-1}\|_2$, $\|K^{-1}\|_2=\|K^{-1}\|_{L_2}$. Тогда $p_1(n)<1$ при всех достаточно больших n и согласно теореме 7 работы [10] уравнение (2.8), а тем самым, и система (2.5) будут однозначно разрешимыми, причем, в силу леммы 2 и соотношения (2.9), справедлива оценка

$$\|x^*-x^*_n\|_2\leqslant 2\|K^{-1}\|_2(1-p_1)^{-1}(E_n(y)+\|y\|_2\|K^{-1}\|_2\,E^s_n(g)), \tag{2.6$'$}$$

из которой, в свою очередь, следует среднеквадратическая сходимость приближенных решений.

Далее, коэффициенты β_{jk} системы (2.5) иногда оказывается целесообразным вычислять с помощью квадратурной формулы. Применим, например, квадратурную формулу средних прямоугольников с узлами (1.3). Тогда

$$\beta_{jk}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s_j,\theta)\cos k\theta d\theta\approx\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n g(s_j,\theta_m)\cos k\theta_m=\gamma_{jk},\quad \gamma_{jn}=0, \tag{2.10}$$

---

[1] a_i $(i=1,2,\ldots)$ — вполне определенные константы, не зависящие от n.

[2] Через P^s_n или P^θ_n обозначаем оператор P_n, примененный по соответствующей переменной (s или θ).

и поэтому система (2.5) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{jk} + \gamma_{jk}) c_k = y_j \quad (j = \overline{1, n}). \tag{2.11}$$

Ясно, что система (2.11) является системой метода механических квадратур (м. м. к.) для уравнения (2.2). Имеет место

Теорема 2. *Пусть оператор K из (2.7) линейно обратим в L_2. Тогда для достаточно больших n приближенные решения $x_n^*(s)$, определяемые алгоритмом м. м. к.* (2.2), (2.4), (2.10), (2.11), *существуют, единственны и сходятся в среднем к точному решению $x^*(s)$ уравнения* (2.2) *с быстротой*

$$\| x^* - x_n^* \|_2 \leqslant a_2 (E_n^s(g) + E_{n-1}^{\theta}(g) + E_n(y)), \tag{2.12}$$

где смысл соответствующих символов указан в лемме 2 и теореме 1.

Доказательство. Прежде всего запишем систему (2.11) в виде операторного уравнения. Используя оператор Q_n, определенный в § 1, легко видеть, что эта система эквивалентна следующему функциональному уравнению:

$$K_n x_n \equiv I x_n + P_n^s T Q_n^{\theta} (g x_n) = y_n \quad (x_n \in X_n, \quad y_n = P_n y \in Y_n). \tag{2.13}$$

Для любого $x_n \in X_n$ имеем

$$\| K_n x_n - K x_n \|_2 \leqslant \| K x_n - P_n K x_n \|_2 + \| K_n x_n - P_n K x_n \|_2, \tag{2.14}$$

где первое слагаемое оценено в (2.9). Оценим второе слагаемое. Используя последовательно точность квадратурной формулы (2.10), лемму 1, неравенство Буняковского и лемму 2, для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\| K_n x_n - P_n K x_n \|_2 = \| P_n^s (T Q_n^{\theta} (g x_n) - T g x_n) \|_2 = \| P_n^s [T (Q_n^{\theta} g - g) x_n] \|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \| P_n \|_{C \to L_2} \| T (Q_n^{\theta} g - g) x_n \|_C = \| T (Q_n^{\theta} g - g) x_n \|_C \leqslant$$
$$\leqslant \max_s \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} | Q_n^{\theta} g(s, \theta) - g(s, \theta) |^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} | x_n(\theta) |^2 d\theta \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant 2 E_{n-1}^{\theta}(g) \| x_n \|_2. \tag{2.15}$$

Таким образом, из (2.13)—(2.15) следует, что при $n \to \infty$

$$p = p_2(n) = \| K - K_n \|_{X_n \to Y} \| K^{-1} \|_2 \leqslant 2 \| K^{-1} \|_2 (E_n^s(g) + E_{n-1}^{\theta}(g)) \to 0$$

и при достаточно больших n будет $p < 1$. Отсюда, по теореме 7 работы [10], следует однозначная разрешимость уравнения (2.13), а тем самым, и системы (2.11), причем

$$\| x^* - x_n^* \|_2 \leqslant 2 \| K^{-1} \|_2 (1 - p)^{-1} [E_n(y) + \| y \|_2 \| K^{-1} \|_2 (E_n^s(g) + E_{n-1}^{\theta}(g))]. \tag{2.12'}$$

Скорость сходимости приближенных решений устанавливает

Теорема 3. *Пусть функции $g(s, \theta)$ (по s для м. к. и по обоим аргументам для м. м. к.) и $y(s)$ принадлежат классу $H_\alpha^{(r)}$* $(r \geqslant 0,$

$0 < \alpha \leqslant 1$). *Тогда в условиях теорем* 1 *и* 2 *приближенные решения сходятся в среднем и равномерно со скоростями соответственно*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant a_3 n^{-r-\alpha} \quad (r+\alpha > 0); \tag{2.16}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_C \leqslant a_3 a_4 n^{-r-\alpha+1/2} \quad (r+\alpha > 1/2). \tag{2.17}$$

Действительно, оценка (2.16) следует для м. к. из теоремы 1, а для м. м. к. — из теоремы 2 с учетом порядков наилучших равномерных приближений (см., например, [15]). Оценка (2.17) следует, как известно (см., например, § 1 [11]), из (2.16).

2°. Будем искать решение уравнения (1.1), ограниченное на одном конце интервала $[-1, 1]$ и неограниченное на другом. Как известно [1], такое решение имеет вид $\varphi(t) = q(t)x(t)$, где $q(t) = [(1-t)/(1+t)]^{1/2}$ или $q(t) = [(1+t)/(1-t)]^{1/2}$, а функция $x(t)$ интегрируемая. Поскольку эти случаи эквивалентны [1], то будем искать решение вида

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, x(t). \tag{2.18}$$

Подставляя эту функцию в (1.1) и преобразовывая его так же, как и в п. 1°, получаем следующее эквивалентное уравнение:

$$Kx \equiv \frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1-\cos\theta)\,x(\theta)}{\cos\theta - \cos s}\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s, \theta)\, x(\theta)\, d\theta = y(s), \tag{2.19}$$

$$x(\theta) \equiv x(\cos\theta), \quad g(s, \theta) \equiv \sin s\,(1-\cos\theta)\, h(\cos s, \cos\theta),$$
$$y(s) \equiv \sin s\, f(\cos s).$$

Приближенное решение уравнения (2.19) будем искать в виде

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cos ks. \tag{2.20}$$

По м. к. неизвестные константы $\{c_k\}$ будем определять из условий $(Kx_n)(s_j) = y(s_j)$, $j = \overline{1, n}$, которые эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{jk} + \beta_{jk})\, c_k = y(s_j) = y_j \quad (j = \overline{1, n}), \tag{2.21}$$

$$\alpha_{j0} = -\sin s_j, \quad \alpha_{jk} = (1-\cos s_j)\sin ks_j \quad (k = \overline{1, n-1});$$

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s_j, \theta)\cos k\theta\, d\theta \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Для вычислительной схемы (2.18)—(2.21) справедлива

Теорема 4. *Пусть уравнение* (2.19) *однозначно разрешимо в* L_2. *Тогда для всех достаточно больших* n (*точнее, при* $p = p_3(n) < 1$) *система* (2.21) *имеет единственное решение* $\{c_k^*\}$. *При этом приближенные решения* $x_n^*(s)$ (*т. е.* (2.20) *при* $c_k = c_k^*$) *сходятся в среднем к точному решению* $x^*(s)$ *уравнения* (2.19) *и оценка погрешности дается соотношением*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant a_5 (E_n^s(g) + E_n(y)). \tag{2.22}$$

Доказательство. Обозначим через X множество четных функций из L_2 с обычной нормой $\|x\|_X = \|x\|_{L_2} = \|x\|_2$ $(x \in X)$, а через Y — множество нечетных функций из L_2 с аналогичной нормой. Тогда уравнение (2.19) можно записать в виде линейного операторного уравнения

$$Kx \equiv Ix + Tgx = y \quad (x \in X,\ y \in Y), \tag{2.23}$$

$$Ix = I_2 x \equiv \frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1-\cos\theta)\, x(\theta)}{\cos\theta - \cos s}\, d\theta, \qquad Tgx \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(s, \theta)\, x(\theta)\, d\theta.$$

Введем следующие n-мерные подпространства X_n и Y_n:

$$X_n \subset X, \quad X_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos ks \right\}; \quad Y_n \subset Y, \quad Y_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin ks \right\}.$$

Как легко видеть, оператор P из леммы 1 проектирует Y на Y_n и приближенная система (2.21) эквивалентна функциональному уравнению

$$K_n x_n \equiv P_n K x_n \equiv I x_n + P_n T g x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\ y_n = P_n y \in Y_n). \tag{2.24}$$

В силу этого и лемм 1 и 2, дальнейшее доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 1.

Далее, как и в пункте 1°, можем перейти к методу механических квадратур, применяя к интегралу β_{jk} из (2.21) использованную выше квадратурную формулу прямоугольников. Таким путем для определения неизвестных коэффициентов $\{c_k\}$ получается система линейных алгебраических уравнений м. м. к.:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{jk} + \gamma_{jk}) c_k = y_j \quad (j = \overline{1, n}), \tag{2.25}$$

где $\gamma_{jk} = (1/n) \sum_{m=1}^{n} g(s_j, \theta_m) \cos k\theta_m$, α_{jk} дается в системе (2.21), а узлы $\theta_k = \theta_k^{(n)}$ определены в (1.3). В этом случае, как и в п. 1°, доказывается

Теорема 5. *Пусть оператор K из* (2.23) *линейно обратим в L_2. Тогда для всех достаточно больших n система* (2.25) *однозначно разрешима. При этом приближенные решения* (2.20) *при $c_k = c_k^*$, где $\{c_k^*\}$ — решение системы* (2.25), *сходятся в среднем к точному решению $x^*(s)$ уравнения* (2.19) *с быстротой*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant a_6 (E_n^s(g) + E_{n-1}^\theta(g) + E_n(y)). \tag{2.26}$$

Замечание. Для м. к. и м. м. к. в этом случае справедливо утверждение, аналогичное теореме 3.

3°. Будем искать решение уравнения (1.1), ограниченное на обоих концах отрезка $[-1, 1]$. Как известно [1], такое решение имеет вид

$$\varphi(t) = x(t) \sqrt{1 - t^2}, \tag{2.27}$$

где $x(t)$ — интегрируемая функция. Подставляя $\varphi(t)$ из (2.27) в уравнение (1.1) и переходя к новым переменным s и θ, как и в п. 1°, 2°, получаем эквивалентное уравнение

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta\, x(\theta)}{\cos\theta - \cos s}\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s,\theta)\, x(\theta)\, d\theta = y(s), \qquad (2.28)$$

$$x(\theta) \equiv x(\cos\theta), \quad g(s,\theta) \equiv \sin^2\theta\, h(\cos s, \cos\theta), \quad y(s) \equiv f(\cos s).$$

Приближенное решение этого уравнения будем искать в виде

$$x_n(s) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cos ks. \qquad (2.29)$$

По м. к. неизвестные константы $\{c_k\}$ будем определять из условий $(Kx_n)(\theta_j) = y(\theta_j) = y_j$, $\theta_j = \theta_j^{(n)} = ((2j-1)/2n)\pi$, $j = \overline{1, n}$, которые могут быть записаны в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{jk} + \beta_{jk}) c_k = y_j \quad (j = \overline{1, n}), \qquad (2.30)$$

$$\alpha_{jk} = \{-(1/2)\cos(k+1)\theta_j,\ k = 0; 1;\ \sin\theta_j \sin k\theta_j,\ k = \overline{2, n-1}\},$$

$$\beta_{jk} = \delta_k \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(\theta_j, \theta)\cos k\theta\, d\theta; \quad \delta_0 = 1/2, \quad \delta_k = 1, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Далее, вычисляя интеграл β_{jk} из системы (2.30) по квадратурной формуле прямоугольников с узлами (1.3), для нахождения коэффициентов $\{c_k\}$ приближенного решения получаем систему

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{jk} + \gamma_{jk}) c_k = y_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad \gamma_{jk} = \delta_k \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g(\theta_j, \theta_m)\cos k\theta_m, \qquad (2.31)$$

которая является системой м. м. к. для уравнения (2.28).

Следует отметить, что для рассматриваемого случая методы коллокации и квадратур могут быть исследованы примерно так же, как и в предыдущих пунктах.

§ 3. Метод подобластей

1°. В обозначениях п. 1° § 2 будем искать приближенное решение уравнения (2.2) в виде полинома (2.4). По методу подобластей неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ будем определять из системы

$$\int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} (Kx_n)(s)\, ds = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} y(s)\, ds, \quad \theta_j = \theta_j^{(n+1)} = \frac{2j-1}{2n+2}\pi \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (3.1)$$

Теорема 6. *Пусть уравнение* (2.2) *однозначно разрешимо в* L_2 *и функции* $g(s, \theta)$ *по* s (*равномерно относительно* θ) *и* $y(s)$ *принадлежат классу* $H_\alpha^{(r)}$ $(r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$. *Тогда при всех достаточно больших* n (*точнее, при выполнении неравенства* $q = q(n) < 1$) *система*

(3.1) *имеет единственное решение* $\{c_k^*\}$ *и приближенные решения* $x_n^*(s)$ *из* (2.4) *при* $c_k = c_k^*$ *сходятся в среднем к точному решению* $x^*(s)$ *уравнения* (2.2) *с быстротой*

$$\| x^* - x_n^* \|_2 \leqslant a_7 n^{-r-\alpha} \quad (r + \alpha > 0). \tag{3.2}$$

Следствие. *В условиях теоремы имеет место равномерная сходимость приближенных решений к точному со скоростью*

$$\| x^* - x_n^* \|_C \leqslant a_7 a_8 n^{-r-\alpha+1/2} \quad (r + \alpha > 1/2). \tag{3.3}$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1. Только здесь вместо оператора P_n и леммы 2 следует пользоваться соответственно оператором R_n и леммой 4.

2°. Исследование метода подобластей в остальных двух случаях проводится на основе соответствующих фактов §§ 1 и 2, и здесь получаются результаты, аналогичные теореме 6.

§ 4. О характере сходимости приближенных решений

1°. Как мы уже видели в §§ 2 и 3, из сходимости в среднем легко можно получить равномерную сходимость с определенной оценкой погрешности. Заметим, что оценки (2.17) и (3.3) в смысле порядка могут быть несколько усилены. Например, имеет место

Теорема 7. *В условиях теоремы* 3 *погрешность приближенного решения в равномерной метрике может быть оценена формулой*

$$\| x^* - x_n^* \|_C \leqslant (a_9 \ln^2 n + a_{10} \ln n + a_{11}) n^{-r-\alpha} \quad (r + \alpha > 0). \tag{4.1}$$

Доказательство. Для м. м. к. из соотношений (2.7) и (2.13) находим

$$I(x^* - x_n^*) = y - P_n y - Tgx^* + P_n^s \, T Q_n^\theta (g x_n^*) \equiv \alpha_n(s). \tag{4.2}$$

В силу леммы 1 (случай в)) имеем

$$\begin{aligned} | y(s) - (P_n y)(s) | &\leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{\pi} (n+1) \right) E_n(y) \leqslant \\ &\leqslant (a_{12} \ln n + a_{13}) n^{-r-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

С другой стороны, с помощью неравенства Гёльдера, лемм 1, 2 и теоремы 3 равномерно относительно s находим

$$\begin{aligned} | Tgx^* - P_n^s T Q_n^\theta (g x_n^*) | &\leqslant | Tg(x^* - x_n^*) | + | T(g - P_n^* g) x_n^* | + \\ &+ | P_n^s [T(Q_n^\theta g - g) x_n^*] | \leqslant \max_s \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi | g(s, \theta) |^2 \, d\theta \right)^{1/2} \| x^* - x_n^* \|_2 + \\ &+ \max_{s, \theta} | g(s, \theta) - P_n^s g(s, \theta) | \, \| x_n^* \|_2 + \\ &+ \| P_n \|_C \max_s \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi | g(s, \theta) - Q_n^\theta g(s, \theta) |^2 \, d\theta \right)^{1/2} \| x_n^* \|_2 \leqslant \\ &\leqslant (a_{14} \ln n + a_{15}) n^{-r-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Теперь из (4.2)—(4.4) следует оценка

$$| \alpha_n(s) | \leqslant (a_{16} \ln n + a_{17}) n^{-r-\alpha}. \tag{4.5}$$

Поскольку $\alpha_n(s)$ — нечетная 2π-периодическая функция, а $\int\limits_0^{2\pi}(x^*(s)-$ $-x_n^*(s))\,ds=0$, то, решая уравнение (4.2) относительно $x^*-x_n^*$, с помощью соответствующих результатов работы [1] находим

$$x^*(s)-x_n^*(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\alpha_n(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-s}{2}\,d\theta. \qquad (4.6)$$

Таким образом, оценка погрешности м. м. к. в метрике пространства C приводит к оценке в этой же метрике сингулярного интеграла с ядром типа Гильберта (4.6). Последняя задача, как известно, в настоящее время достаточно хорошо разработана в связи с оценкой погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов (см., например, § 1 работы [11]). Теперь, в силу леммы 1 и ее следствия из работы [11], с помощью соотношений (4.5), (4.6) и леммы 1 легко получается требуемая оценка (4.1) в случае м. м. к. В случае же м. к. оценка (4.1) получается, очевидно, как и для м. м. к.

Теорема 8. *Пусть в условиях теоремы* 4 $g(s,\theta)$ (*по* s) *и* $y(s)$ *принадлежат классу* $H_\alpha^{(r)}$ $(r\geqslant 0,\ 0<\alpha\leqslant 1)$. *Тогда приближенные решения* $x_n^*(s)$ *сходятся к* $x^*(s)$ *в том смысле, что*

$$\max_s|(1-\cos s)(x^*(s)-x_n^*(s)|\leqslant(a_{18}\ln^2 n+a_{19}\ln n+a_{20})\,n^{-r-\alpha}. \qquad (4.7)$$

В частности, в произвольном промежутке вида $0<s_0\leqslant s\leqslant\pi$ ***получается равномерная сходимость в обычном смысле с той же скоростью.***

Доказательство. Рассуждая так же, как и при получении соотношения (4.6), с учетом результатов п. 2° § 2 находим

$$(1-\cos s)[x^*(s)-x_n^*(s)]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\alpha_n(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-s}{2}\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int(1-\cos\theta)\,[x^*(\theta)-x_n^*(\theta)]\,d\theta,$$

$$\alpha_n(s)\equiv y-P_n y-Tgx^*+P_n^s\,Tgx_n^*. \qquad (4.8)$$

Из (4.8) по аналогии с теоремой 7 находим (4.7). Дальнейшее очевидно.

Следует также отметить, что в условиях теоремы 6 справедливо утверждение, аналогичное теореме 7.

2°. Все полученные выше результаты по приближенному решению уравнения (1.1) были сформулированы относительно преобразованных уравнений и новых аргументов s, θ. Следует отметить, что эти результаты теперь довольно просто могут быть переформулированы и в исходных переменных. Остановимся, например, на случае м. к. п. 1° § 2 (другие случаи рассматриваются аналогично).

Пусть ищется решение уравнения (1.1), неограниченное на обоих концах отрезка $[-1,\ 1]$ (т. е. вида (2.1)), удовлетворяющее дополнительному условию (2.3). В связи с этим приближенное решение $\varphi_n(t)$ будем определять из системы

$$(L\varphi_n)(t_j)=f(t_j),\ \varphi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=1}^{n}c_kT_k(t),\quad T_k(t)=\cos(k\arccos t),$$

$$t_j=\cos\frac{j\pi}{n+1}\quad(j=\overline{1,\ n}). \tag{4.9}$$

Теорема 1′. *Пусть уравнение* (1.1) *однозначно разрешимо в пространстве* $L^2_\rho[-1,1]$, $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$. *Тогда для всех достаточно больших n система* (4.9) *имеет единственное решение* $\{c^*_k\}$. *При этом приближенные решения сходятся к точному решению уравнения* (1.1) *в* L^2_ρ *с быстротой*

$$\|\varphi^*-\varphi^*_n\|_{L^2_\rho}=O(E^t_n(g)+E^t_n(y))=O(E^s_n(g)+E^s_n(y)),$$

где $E^t_n(g)$ *и* $E^t_n(y)$ *означают наилучшие равномерные приближения алгебраическими полиномами порядка не выше n для функций соответственно* $g(t,\tau)=\sqrt{1-t^2}\,h(t,\tau)$ *по переменной t (равномерно относительно* τ) *и* $y(t)=\sqrt{1-t^2}f(t)$, *а* $E^s_n(g)=E^t_n(g)$ *и* $E^s_n(y)=$ $=E^t_n(y)$ *определены в теореме* 1.

В заключение следует отметить, что работа представляет собой часть доклада авторов на VIII (апрель 1970 г.) научной сессии Пловдивского высшего педагогического института Болгарии.

г. Казань

Поступило
2 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.
2. Лаврентьев М. А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. Тр. ЦАГИ, 1932, вып. 118, с. 3—56.
3. Панченков А. Н. Гидромеханика подводного крыла. Киев, „Наукова думка", 1965.
4. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, „Наукова думка", 1968.
5. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. ДАН СССР, т. 125, № 4, 1959, с. 715—718.
6. Brakhage H. Bemerkungen zur numerischen Behandlung und Fehlerabschätzung bei singulären Integralgleichungen. Z. angew. Math. und Mech., Bd. 41, Sonderheft, 1961, S. 12—14.
7. Ефремов И. И. О приближенном решении сингулярного интегрального уравнения теории крыла. В сб. „Динамика систем твердых и жидких тел. Труды семинара по динамике Института механики АН УССР, 1965", Киев, 1966, с. 76—81.
8. Schleiff M. Über Näherungsverfahren zur Lösung einer singulären linearen Integrodifferentialgleichung. Z. angew. Math. und Mech., Bd. 48, № 7, 1968, S. 477—486.
9. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН, т. III, вып. 6, 1948, с. 89—185.
10. Габдулхаев Б. Г. Некоторые вопросы теории приближенных методов, IV. Изв. вузов, Матем., 1971, № 6, с. 15—23.
11. Габдулхаев Б. Г. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений. В сб. „Конструктивная теория функций. Труды международной конференции по конструктивной теории функций. Варна, 19—25 мая 1970 г.", София, 1971, с. 35—49.
12. Векова Г. Х., Аролска М. А., Казакова А. А. Квадратурни формули за някои сингулярни интеграли. В сб. „Научни трудове ВПИ — гр. Пловдив", т. 8, кн. 2, 1970, с. 39—49.

13. Габдулхаев Б. Г. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов. В сб. „Функциональный анализ и теория функций". № 4, Изд. Казанск. ун-та, 1967, с. 54—74.

14. Петерсен И. О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. ИАН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, т. 10, № 1, 1961, с. 3—12.

15. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций. М., „Наука", 1965.

16. Гаркави А. Л. О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами. ИАН СССР. Сер. матем., т. 24, № 1, 1960, с. 103—128.

А. С. БОНДАРЕВ. ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ П. КОНРАДА

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Находятся характеристики тех K-линеалов (линейных структур), в которых осуществимо проектирование на компоненты из некоторой заранее заданной алгебры, которая может и не совпадать с алгеброй всех компонент. Предварительно изучаются пространства более общие, чем K-линеалы, — линейные множества с заданным отношением дизъюнктности (D-линеалы). Строится целый класс реализаций (абстрактных и вещественных) D-линеалов и K-линеалов на вполне несвязных бикомпактах. Основные результаты переносятся на структурно упорядоченные группы. (Работа поступила в журнал „Математика" 10. I. 1973.)

Ю. Р. ВАЙНЕРМАН. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ ЛАГРАНЖА ПО УЗЛАМ ЧЕБЫШЕВА

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В статье получены асимптотические формулы типа А. Н. Колмогорова для уклонения интерполяционного процесса Лагранжа по узлам Чебышева на классах непрерывных функций. (Работа поступила в журнал „Математика" 7. VII. 1972.)

В. И. ВЕДЕРНИКОВ. СФЕРЫ ФУБИНИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В настоящей статье многообразие Σ прямых проективного трехмерного пространства рассматривается как многообразие всех классов смежности для всех подгрупп, сопряженных одномерной подгруппе S^1 группы Ли S^3. Здесь S^n есть n-мерная сфера. Тогда определится накрывающая $(S^2 \times S^2, p, \Sigma)$ с двухточечным слоем, причем $S^2 \times S^2$ и будет известной парой сфер Фубини. Заметим, что $S^2 = S^3/S^1$. Это построение обобщается на случай произвольной замкнутой подгруппы H группы Ли G и показывается, что здесь возникает расслоенное пространство $(S \times S,\ p,\ \Sigma)$, где $S = G/H$, а Σ — многообразие классов смежности всех подгрупп, сопряженных H. Это расслоенное пространство называется обобщением пары сфер Фубини. Отметим, что в случае компактной группы Ли отображение p будет накрытием. (Работа поступила в журнал „Математика" 17. X. 1972.)