P. G. Naumov, Undecidability of the Gödel–Löb logic with quantifiers with respect to propositional variables, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 13–16

УДК 510.65

П. Г. Наумов

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЛОГИКИ ГЁДЕЛЯ—ЛЁБА С КВАНТОРАМИ ПО ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В работе [1] была установлена разрешимость логики Гёделя—Лёба GL, известной своей доказуемостной интерпретацией.

В настоящей работе доказывается неразрешимость этой логики, пополненной кванторами по пропозициональным переменным. При этом используется конструкция из работы [2].

1. Логика GL_2. Язык логики GL_2 состоит из пропозициональных переменных p, q, ...; логических связок $\rightarrow$, &, $\vee$, $\neg$, $\Box$; скобок и кванторов $\forall$, $\exists$.

Формулы языка логики GL_2 определяются стандартно: если A и B — формулы, а p — пропозициональный символ, то p, $\neg A$, $A\&B$, $A\vee B$, $A\rightarrow B$, $\Box A$, $\forall pA$, $\exists pA$ — формулы.

Логика GL_2 задается аксиомами:

1. пропозициональные тавтологии;
2. $\forall pA(p)\rightarrow A(B)$, где A и B — формулы, p — пропозициональный символ и формула B свободна для p в $A(p)$;
3. $\forall p(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow\forall pB)$, если формула A не содержит свободных вхождений символа p;
4. $\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$; 5. $\Box(\Box A\rightarrow A)\rightarrow\Box A$ и правилами вывода:

6. $\dfrac{A,\ A\rightarrow B}{B}$; 7. $\dfrac{A}{\forall p A}$; 8. $\dfrac{A}{\Box A}$.

2. Модели Крипке для логики GL_2. Моделью Крипке будем называть $\langle X, R, \{W_x\}_{x\in X}, \Vdash\rangle$, где X — непустое множество, называемое множеством миров, R — частичный иррефлексивный порядок на X, $\{W_x\}$ — семейство непустых множеств, индексированных элементами множества X (элементы W_x мы будем называть пропозициональными константами), такое, что $W_x\subseteq W_y$, если xRy; $\Vdash$ — бинарное отношение вынуждения между элементами из X и формулами языка логики GL_2, пополненного пропозициональными константами из W_x, которое удовлетворяет следующим соотношениям:

1. $x\Vdash\neg A\Leftrightarrow\neg(x\Vdash A)$, 2. $x\Vdash A\&B\Leftrightarrow x\Vdash A$ и $x\Vdash B$,

3. $x\Vdash A\vee B\Leftrightarrow x\Vdash A$ или $x\Vdash B$, 4. $x\Vdash A\rightarrow B\Leftrightarrow x\Vdash B$ или $x\Vdash\neg A$,

5. $x\Vdash\Box A\Leftrightarrow\forall y(xRy\Rightarrow y\Vdash A)$, 6. $x\Vdash\forall pA(p)\Leftrightarrow$ для любого $p\in W_x$: $x\Vdash A(p)$, 7. $x\Vdash\exists pA(p)\Leftrightarrow$ найдется $p\in W_x: x\Vdash A(p)$.

Будем говорить, что модель фундирована, если всякая цепь вида $a_0Ra_1Ra_2R\ldots$ конечна.

Будем говорить, что модель насыщена, если для любого $Y\subseteq X$ найдется константа $p\in\bigcap\limits_{x\in X}W_x$, такая, что $x\in Y\Leftrightarrow x\Vdash p$.

Утверждение 1. *В любом мире фундированной и насыщенной модели вынуждаются все теоремы логики* GL_2.

Доказательство. Очевидно, что достаточно убедиться в выполнимости схем аксиом 2 и 5 логики GL_2. Схема 2 является следствием насыщенности, а схема Лёба 5 представляет собой хорошо известное следствие фундированности модели Крипке (см., например, [1]).

Пусть $\langle X, R\rangle$ — множество с отношением порядка на нем. Конусом будем называть подмножество $Y \subseteq X$, такое, что $\forall a, b$ $(a \in Y, aRb \Rightarrow b \in Y)$.

Конусом с вершиной назовем конус Y, в котором найдется элемент a_0 (вершина), такой, что $\forall b$ $(b \in Y \Rightarrow a_0 R b)$.

Корневой точкой конуса Y назовем элемент a_0, такой, что $\forall b (b \in Y \Rightarrow \neg (bRa_0))$.

Конусом над точками $a_1, \dots, a_m$ будем называть множество $Y = \{b \in X \mid \exists n\ a_n R b\}$.

Будем писать $\Box^+ A$ вместо $A \& \Box A$, $\Diamond A$ вместо $\neg \Box \neg A$ и $\Diamond^+ A$ вместо $\neg \Box^+ \neg A$. Рассмотрим следующие формулы:

$$C(q) \leftrightharpoons \Box^+ (q \to \Box q) \& [\forall u \forall v (\Box^+ (q \to \Box^+ u \vee \Box^+ v) \to$$

$$\to \Box^+ (q \to u) \vee \Box^+ (q \to v))],$$

$$D(q) \leftrightharpoons C(q) \& \Box^+ (q \to \Box \Box \bot) \& \Diamond^+ (q \& \Diamond \top).$$

Утверждение 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — насыщенная модель Крипке. Тогда для любого мира x этой модели $x \Vdash C(q)$ тогда и только тогда, когда $\{y \in X \mid y \Vdash q$ и либо xRy, либо $x = y\}$ — конус с вершиной или пустое множество.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Пусть $x \Vdash C(q)$, тогда $x \Vdash \Box^+ (q \to \Box q)$. Это означает, что область $\{y \in X \mid y \Vdash q$ и либо xRy, либо $x = y\}$ — конус. Если он пуст, то требуемое доказано. В противном случае рассмотрим множество корневых точек этого конуса и предположим, что в нем найдутся хотя бы две различные точки a_1 и a_2. Рассмотрим множество $T = \{t \in X \mid a_1 R t\} \cup \{a_1\}$. Согласно условию насыщенности найдется пропозициональная константа u, истинная в точности на этом множестве. Рассмотрим конус над множеством оставшихся корневых точек (оно не пусто, так как содержит a_2). В силу условия насыщенности найдется пропозициональная константа v, истинная в точности на этом конусе. Легко убедиться, что найденные константы u и v опровергают второй конъюнктивный член $C(q)$.

($\Leftarrow$). Поскольку $\{y \in X \mid y \Vdash q$ и либо xRy, либо $x = y\}$ — конус, то $x \Vdash \Box^+ (q \to \Box q)$. Предположим, что

$$x \Vdash \neg \forall u \forall v (\Box^+ (q \to \Box^+ u \vee \Box^+ v) \to \Box^+ (q \to u) \vee \Box^+ (q \to v)).$$

Тогда найдутся такие константы $u_0, v_0 \in W_x$, что

$$x \Vdash \Box^+ (q \to \Box^+ u_0 \vee \Box^+ v_0); \qquad (1)$$

$$x \Vdash \neg \Box^+ (q \to u_0) \text{ и } x \Vdash \neg \Box^+ (q \to v_0).$$

Последнее означает существование миров $a_1, a_2 \in \{y \in X \mid xRy$ либо $x = y\}$:

$$a_1 \Vdash q, \ a_1 \Vdash \neg u_0, \ a_2 \Vdash q, \ a_2 \Vdash \neg v_0. \qquad (2)$$

Возьмем вершину a_0 конуса $\{y \in X \mid y \Vdash q$ и либо xRy, либо $x = y\}$, который не пуст, так как содержит a_1 и a_2. Поскольку xRa_0 или $x = a_0$, то согласно (1) $a_0 \Vdash \Box^+ u_0 \vee \Box^+ v_0$, что противоречит (2).

Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ — насыщенная модель Крипке, тогда для любого мира x $x \Vdash D(q)$ тогда и только тогда, когда $\{y \in X \mid y \Vdash q$ и либо xRy, либо $x = y\}$ есть конус с вершиной высоты 2.*

3. **Неразрешимость логики** GL_2. Теорема. *Логика* GL_2 *неразрешима.*

Доказательство. Пусть $(M, *)$ — счетное множество с рефлексивным симметричным отношением $*$. Построим модель Крипке $\mathfrak{M} = \langle X, R, \{W_x\}, \Vdash \rangle$, которую будем называть моделью, порожденной $(M, *)$: $X = \{M\} \cup M \cup \{\{a, b\} \in *\}$. Отношение R таково, что MRa тогда и только тогда, когда $a \neq M$; aRx тогда и только тогда, когда $x = \{a, b\}$; $W_M = W_a = W_{\{a,b\}} = \{p_Y \mid Y \subseteq X\}$ для всех $a, b \in M$. Положим $x \Vdash p_Y \Leftrightarrow x \in Y$.

Очевидно, что отношение R является иррефлексивным порядком, а модель $\mathfrak{M}$ фундирована и насыщена.

Пусть S — некоторое предложение в языке элементарной теории рефлексивного симметричного отношения $*$. Не теряя общности, можно считать, что S имеет вид

$$(Qx\ldots)\mathop{\&}_{k}(\mathop{\&}_{i}(x_{k_i} * y_{k_i}) \to \bigvee_{j}(u_{k_j} * v_{k_j})),$$

где $Qx\ldots$ — некоторый кванторный префикс.

Определим перевод $\hat{S}$ предложения S в язык логики GL_2 как

$$\exists qD(q) \mathbin{\&} (\hat{Q}x\ldots)\mathop{\&}_{k}(\mathop{\&}_{i}\Diamond(x_{k_i} \mathbin{\&} y_{k_i}) \to \bigvee_{j}\Diamond(u_{k_j} \mathbin{\&} v_{k_j})) \to \Box\Box\bot,$$

где $\hat{Q}$ означает ограничение кванторов префикса Q областью истинности предиката $D(x)$.

Пусть RS — элементарная теория рефлексивного симметричного отношения $*$. Согласно работе [3] теория RS неразрешима.

Как известно (см., например, [4]), всякая неразрешимая конечно аксиоматизируемая теория является наследственно неразрешимой. Поэтому для доказательства неразрешимости логики GL_2 достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма. *Если* $GL_2 \vdash \hat{S}$, *то* $RS \vdash \neg S$.

Доказательство леммы. Пусть $\neg(RS \vdash \neg S)$, тогда найдется множество M с рефлексивным симметричным отношением $*$ на нем, такое что $(M, *) \models S$. Покажем, что в модели Крипке $\mathfrak{M}$, порожденной моделью $(M, *)$, в точке M опровергается формула $\hat{S}$. Предположим противное: $M \Vdash \hat{S}$. Легко видеть, что $M \Vdash \neg\Box\Box\bot$. Тогда

$$M \Vdash \neg(\exists qD(q) \mathbin{\&} (\hat{Q}x\ldots)\mathop{\&}_{k}(\mathop{\&}_{i}\Diamond(x_{k_i} \mathbin{\&} y_{k_i}) \to \bigvee_{j}\Diamond(u_{k_j} \mathbin{\&} v_{k_j}))).$$

Формула $\exists qD(q)$ вынуждается в мире M в силу следствия и насыщенности модели $\mathfrak{M}$. Следовательно,

$$M \Vdash \neg(\hat{Q}x\ldots)\mathop{\&}_{k}(\mathop{\&}_{i}\Diamond(x_{k_i} \mathbin{\&} y_{k_i}) \to \bigvee_{j}\Diamond(u_{k_j} \mathbin{\&} v_{k_j})). \tag{3}$$

Согласно следствию для каждого x, удовлетворяющего условию $M \Vdash D(x)$, найдется элемент $a_x \in M$, такой, что $b \Vdash x$ тогда и только тогда, когда $a_x R b$ или $a_x = b$. Чтобы вывести противоречие из (3) и свойства $(M, *) \models S$, достаточно показать, что для любого набора $a_{x_{k_i}}, a_{y_{k_i}}, a_{u_{k_j}}, a_{v_{k_j}} \in M$ $(M, *) \models \mathop{\&}_{i}(a_{x_{k_i}} * a_{y_{k_i}}) \to \bigvee_{j}(a_{u_{k_j}} * a_{v_{k_j}})$ тогда и только тогда, когда $M \Vdash \mathop{\&}_{i}\Diamond(x_{k_i} \mathbin{\&} y_{k_i}) \to \bigvee_{j}\Diamond(u_{k_j} \mathbin{\&} v_{k_j})$. Последнее в свою очередь следует из того, что $M \Vdash \Diamond(x \mathbin{\&} y)$ равносильно $(M, *) \models a_x * a_y$. Лемма и, следовательно, теорема доказаны.

Замечание. Теорема и все рассуждения останутся в силе, если вместо GL_2 рассматривать ее расширение формализованным принципом неподвижной точки $\exists p \underset{0\leqslant i\leqslant k}{\overset{i}{\&}} \Box^i(p\leftrightarrow A(p))$, где p — единственная свободная переменная формулы A и все вхождения p в A лежат в области действия модальности $\Box$, а $\Box^i$ обозначает i-итерацию модальности. Выполнимость принципа неподвижной точки на модели $\mathfrak{M}$ из утверждения 1 следует из фундированности и насыщенности модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segerberg K. An essay in classical modal logic//Filosofiska studier. n. 13 Uppsala: Philos. Soc. and Dept. of Philos. Uppsala, 1971.
2. Gabbay D. M. On 2nd order intuitionistic propositional calculus with full comprehension//Arch. math. logik. 1974. **16**. 177—186.
3. Rogers H. Certain logical reduction and decision problems//Ann. Math. 1956. 64. 264—284.
4. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории//Успехи матем. наук. 1965. 20, № 4. 37—108.

Поступила в редакцию
20.02.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 517.518.36

С. Б. Козырев

О ГАРАНТИРОВАННОЙ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: C и L — пространства соответственно непрерывных и суммируемых по Лебегу функций на отрезке $[0, 1]$, $c_n(f, \varphi)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе φ; если Δ — отрезок, то $|\Delta|$ — его длина; если X — множество, то $\bar{X}$ — его замыкание, а $\operatorname{int}(X)$ — его внутренность; если p — показатель пространства L^p, то q — сопряженный с ним показатель; $\omega(\delta, f)$ и $\omega_p(\delta, f)$ — соответственно модуль непрерывности и интегральный модуль непрерывности порядка p для функции f.

З. Чешельский в работе [1] показал, что для коэффициентов Фурье—Хаара любой функции $f\in C[0, 1]$ справедлива оценка

$$|c_n(f, \chi)|\leqslant n^{-1/2}\omega(1/n, f). \tag{1}$$

Для функций $g\in L^p(0, 1)$, $1\leqslant p<\infty$, аналогичный результат был получен П. Л. Ульяновым в [2]:

$$|c_n(g, \chi)|\leqslant n^{1/p-1/2}\omega_p(1/n, g). \tag{2}$$

Таким образом, модули коэффициентов Фурье—Хаара для всех функций из L^p, $p>2$, в целом имеют гарантированный порядок убывания. В связи с этим П. Л. Ульяновым неоднократно ставился следующий вопрос (см., например, [3, 4]): являются ли оценки (1), (2) лучшими для L^p, $p>2$, среди всех полных ортонормированных систем? В настоящей статье мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос, доказав следующую теорему.