E. B. Yarovaya, Critical branching random walks on low-dimensional lattices,
Diskr. Mat., 2009, Volume 21, Issue 1, 117–138

Дискретная математика

том 21 выпуск 1 * 2009

УДК 519.2

Критические ветвящиеся случайные блуждания по решеткам низких размерностей

© 2009 г. Е. Б. Яровая

Рассматриваются ветвящиеся случайные блуждания с непрерывным временем по целочисленным решеткам с размножением и гибелью частиц в единственной точке — источнике ветвления. В предположении симметричности и однородности случайного блуждания выводятся интегральные и дифференциальные уравнения динамики локальных вероятностей продолжения процесса в произвольных узлах решетки и вероятностей выживания популяции частиц, справедливые для решеток любой размерности. В критическом случае исследовано асимптотическое поведение при $t \to \infty$ локальных вероятностей, вероятности выживания популяции частиц, а также условных распределений размера популяции частиц на $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07–01–00362а, и программы «Междисциплинарные научные проекты МГУ имени М. В. Ломоносова», 2007 г.

1. Введение

В последние годы благодаря многочисленным приложениям в различных областях естественных наук, где важным оказывается изучение тех или иных эволюционных процессов в зависимости от структуры среды, возрос интерес к случайным блужданиям, обладающим свойством ветвления [1], то есть к процессам, которые могут быть описаны в терминах блуждания, а также размножения и гибели частиц на решетках. Впервые модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем в неоднородной среде была введена, по-видимому, в [2] и получила дальнейшее развитие в работах [3, 4, 5, 7, 8]. Неформальное описание предложенной в [2] модели состоит в следующем: пусть имеется целочисленная решетка $\mathbf{Z}^d$ и в начальный момент времени в некотором узле решетки располагается одна частица, которая затем совершает случайное блуждание по решетке, пока не достигнет некоторой выделенной точки, где располагается источник ветвления. Здесь частица может с некоторой интенсивностью погибнуть или произвести потомство. Если размножения не произошло, то частица продолжает случайное блуждание до следующего возвращения в источник. Предполагается, что каждая из новых частиц эволюционирует по тому же закону независимо от остальных частиц и от всей предыстории.

Подобная модель ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}$ с введением дополнительного параметра, управляющего поведением процесса в источнике ветвления и при этом нарушающего симметричность матрицы интенсивностей переходных вероятностей случайного блуждания, была рассмотрена в работах [9, 10]. Как показано в [11], подобного рода ветвящиеся случайные блуждания с одним источником ветвления используются в качестве аппроксимаций каталитических суперпроцессов, теория которых активно развивается в последние годы [12, 13].

Асимптотическое (по времени) поведение ветвящегося случайного блуждания по целочисленным решеткам существенно зависит от значения интенсивности воспроизводства потомства в источнике ветвления, обозначаемой β. При этом здесь может быть указано такое значение β_c, что при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$ асимптотическое поведение рассматриваемого процесса оказывается качественно различным [3, 4, 5, 7, 8]. В этом смысле значение интенсивности β_c естественно назвать критическим.

Целью настоящей работы является исследование критических ветвящихся случайных блужданий по $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$. Как будет показано далее, для таких ветвящихся случайных блужданий справедливо условие $\beta = \beta_c = 0$.

Структура работы следующая. В разделе 2 приводится формальное описание рассматриваемой модели и напоминаются необходимые для дальнейшего исследования понятия. Здесь же проводится более детальное, чем во введении, сравнение известных результатов с постановками настоящей работы.

В разделе 3 напоминаются необходимые сведения о переходных вероятностях, свойства которых играют ключевую роль на протяжении всей статьи. Отметим, что рассматриваемый в статье класс случайных блужданий обладает таким существенным для дальнейшего исследования свойством, как возвратность. В работах [5, 8] выведены дифференциальные и интегральные уравнения для производящих функций, на основе которых получены дифференциальные и интегральные уравнения, описывающие динамику локальных вероятностей продолжения процесса в произвольном узле решетки и вероятности выживания популяции частиц. Ряд утверждений этого раздела справедлив для решеток произвольной размерности.

В разделе 4 исследуется вероятность продолжения процесса в источнике на $\mathbf{Z}$. Здесь для анализа этой вероятности используется техника, развитая в работе [9] для модели с дополнительным параметром, управляющим поведением процесса в источнике.

В разделе 5 исследуется вероятность продолжения процесса в источнике на $\mathbf{Z}^2$.

Раздел 6 посвящен анализу вероятностей продолжения процесса в произвольных узлах решеток $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$.

Наконец, в разделе 7 исследуется вероятность выживания популяции частиц на $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$, а также доказана условная предельная теорема о поведении размера популяции частиц.

2. Модель. Основные результаты

Перейдем к формальному описанию модели ветвящегося случайного блуждания по d-мерной целочисленной решетке $\mathbf{Z}^d$.

Пусть $A = (a(x, y))_{x,y\in\mathbf{Z}^d}$ — матрица переходных интенсивностей случайного блуждания, $a(x, y) \geqslant 0$ при $x \neq y$, $a(x, x) < 0$ и $\sum_{y\in\mathbf{Z}^d} a(x, y) = 0$. В модели предполагается, что блуждание однородно по времени, пространственно однородно ($a(x, y) = a(0, y-x)$), симметрично ($a(x, y) = a(y, x)$) и неприводимо (то есть все точки $y \in \mathbf{Z}^d$ достижимы), причем скачки имеют конечную дисперсию

$$\sigma^2 = -\frac{1}{a(0,0)} \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} |x|^2 a(0, x) < \infty.$$

Заметим, что в этот класс входит простое симметричное случайное блуждание, для которого $a(x, y) = a/(2d)$ при $|y - x| = 1$, $a(x, x) = -a$, и $a(x, y) = 0$ в противном случае.

Процесс ветвления частиц в источнике описывается инфинитезимальной производящей функцией

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \tag{1}$$

где $b_n \geqslant 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_n b_n = 0$. Таким образом, частица, находящаяся в точке x, за малое время h с вероятностью $a(x, y)h + o(h)$ переходит в точку $y \neq x$, с вероятностью $\delta_0(x)b_n h + o(h)$ умирает, породив $n \neq 1$ потомков, или с вероятностью $1 + a(x, x)h + \delta_0(x)b_1 h + o(h)$ остается в точке x. Другими словами, в источнике $x_0 = 0$ частица живет случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром $-(a(0,0)+b_1)$, по истечении которого она либо порождает случайное число $n \neq 1$ потомков, либо перескакивает в иной узел решетки. При этом каждая новая частица эволюционирует по тому же закону независимо от остальных.

Обозначим через $p(t, x, y)$ переходную вероятность случайного блуждания (без ветвления), то есть вероятность того, что в момент $t \geqslant 0$ частица находится в точке y, при условии, что в момент времени $t = 0$ она находилась в точке x. Введем функцию Грина случайного блуждания, представляющую собой преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$ по переменной t с параметром $\lambda \geqslant 0$:

$$G_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y)\, dt. \tag{2}$$

Как известно (см., например, гл. II в [8]), для рассматриваемого случайного блуждания переходные вероятности имеют при $t \to \infty$ степенную асимптотику, где первый член асимптотического разложения не зависит от x и y:

$$p(t, x, y) \sim \gamma_d t^{-d/2}. \tag{3}$$

Поэтому $G_\lambda(0, 0)|_{\lambda=0} < \infty$ только при $d \geqslant 3$, и значит, рассматриваемое случайное блуждание невозвратно в размерностях $d \geqslant 3$ и возвратно в размерностях $d = 1, 2$.

Предположим, что число потомков частицы имеет конечные моменты всех порядков, то есть $\beta_r = f^{(r)}(1) < \infty$ при $r \in \mathbf{N}$. Важной характеристикой процесса ветвления является параметр $\beta = f'(1)$, который определяется равенством

$$\beta = f'(1) = \sum_n n b_n = (-b_1) \left(\sum_{n \neq 1} n \frac{b_n}{(-b_1)} - 1 \right),$$

где последняя сумма — среднее число рождающихся потомков. Как показано в [3, 4, 7, 8], существует такое значение β_c, что асимптотическое поведение процесса различается при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$. В этом смысле точка β_c является критической для рассматриваемого процесса. Значение величины β_c может быть найдено с помощью равенства $\beta_c = 1/G_0(0, 0)$ и, следовательно, $\beta_c = 0$ при $d = 1, 2$ и $\beta_c > 0$ при $d \geqslant 3$.

Напомним кратко, чем же именно различается асимптотическое поведение процесса при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$. Обозначим через $\mu_t(y)$ число частиц в произвольном узле решетки $y \in \mathbf{Z}^d$ и через $\mu_t = \sum_y \mu_t(y)$ общее число частиц на $\mathbf{Z}^d$ в момент времени t.

Асимптотическое поведение моментов $m_n(t, x, y) = \mathsf{E}_x \mu_t^n(y)$ и $m_n(t, x) = \mathsf{E}_x \mu_t^n$, $n \in \mathbf{N}$, где E_x обозначает математическое ожидание при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$, исследовано в [8] при любых β во всех размерностях.

Надкритический случай ($\beta > \beta_c$) также исследован во всех размерностях в [3, 8]. В этом случае при нормировке $e^{-\lambda_0 t}$, где показатель экспоненты λ_0 является корнем уравнения $\beta G_\lambda(0,0) = 1$, случайные величины $\mu_t(y)$ и μ_t имеют предельное распределение при $t \to \infty$.

Иная картина наблюдается в критическом ($\beta = \beta_c$) и докритическом ($\beta < \beta_c$) случаях [8, 3, 4, 7], где имеет место нерегулярный по номеру n рост моментов при больших временах t. Это свидетельствует о том, что асимптотическое поведение случайной величины μ_t не определяется поведением ее моментов при $t \to \infty$. По этой причине критический и докритический случаи были до настоящего времени изучены менее полно. В настоящей работе этот пробел до известной степени восполняется, и приводятся полные доказательства некоторых результатов, анонсированных в [6, 7].

В статье для критических ветвящихся случайных блужданий исследуются локальные вероятности продолжения процесса $Q(t,x,y) = \mathsf{P}_x\{\mu_t(y) > 0\}$ и вероятности выживания популяции частиц $Q(t,x) = \mathsf{P}_x\{\mu_t > 0\}$ на решетках размерности $d = 1, 2$.

Основным результатом работы, доказательству которого посвящена оставшаяся часть статьи, является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\beta = \beta_c$, то $Q(t,x,y) \sim k_d u(t)$ и $Q(t,x) \sim K_d v(t)$ при $t \to \infty$, где k_d, K_d — положительные константы, а функции u, v имеют вид*

$$u(t) = t^{-1/2}(\ln t)^{-1}, \quad v(t) = t^{-1/4} \qquad \textit{при} \quad d = 1;$$
$$u(t) = t^{-1}, \qquad v(t) = (\ln t)^{-1/2} \quad \textit{при} \quad d = 2.$$

Упоминаемые в теореме константы будут найдены в явном виде в разделах 4–7. Одним из следствий теоремы 1 является приводимая ниже предельная теорема о поведении размера популяции частиц при больших t, доказанная в разделе 7.

Теорема 2. *Если $\beta = \beta_c$ и $d = 1, 2$, то для любого $z > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}_x[e^{-z\mu_t} \mid \mu_t > 0] = 1 - \sqrt{1 - e^{-z}}. \tag{4}$$

В силу этой теоремы для решеток размерности $d = 1, 2$ правая часть соотношения (4) не зависит от точки x, с которой начинается процесс при $t = 0$.

3. Вспомогательные результаты и основные уравнения

Пусть $p(t,x,y)$ — переходная вероятность случайного блуждания. Из описания модели при малых h вытекают соотношения

$$p(h,x,y) = a(x,y)h + o(h), \qquad y \neq x, \tag{5}$$
$$p(h,x,x) = 1 + a(x,x)h + o(h). \tag{6}$$

Как показано, например, в гл. III в [14] из (5), (6) следует, что переходные вероятности $p(t,x,y)$ удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений (обратные уравнения Колмогорова)

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \mathscr{A} p(t,x,y), \qquad p(0,x,y) = \delta_y(x),$$

где $\delta_y(\cdot)$ — дискретная δ-функция Кронекера на $\mathbf{Z}$,

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{при } x \neq y, \end{cases}$$

а выражение $\mathscr{A} p(t,x,y)$ определяется равенством

$$\mathscr{A} p(t,x,y) = \sum_{x'} a(x,x') p(t,x',y). \tag{7}$$

Так как в дальнейшем в первую очередь будет исследована асимптотика локальных численностей в нуле, удобнее перейти к обозначению $p(t) = p(t,0,0)$. Необходимые свойства функции $p(t)$ сформулированы в следующей лемме, доказательство которой является несложным обобщением на многомерный случай аналогичного результата из [9] при $d = 1$.

Лемма 1. *Переходная вероятность $p(t)$ не возрастает по t на $\mathbf{Z}^d$, причем ее производная $p'(t) < 0$ не убывает по t и при $t \to \infty$ имеет представление*

$$p'(t) = -\frac{d\gamma_d}{2} t^{-(d/2+1)} + O(t^{-(d/2+2)}), \qquad \gamma_d > 0. \tag{8}$$

Как показано, например, в [8], для каждого $d \geqslant 1$ и каждых $x, y \in \mathbf{Z}^d$ константа γ_d в асимптотическом представлении (3) может быть выражена через функцию

$$\phi(\theta) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} a(x,0) e^{i(x,\theta)}, \qquad \theta \in [-\pi,\pi]^d,$$

следующим образом:

$$\gamma_d = ((2\pi)^d D_d)^{-1/2}, \qquad D_d = |\det \phi''_{\theta\theta}(0)|.$$

При этом

$$p(t,0,0) - p(t,x,0) \sim \tilde{\gamma}_d(x) t^{-(d/2+1)},$$
$$\tilde{\gamma}_d(x) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} (\omega, x)^2 e^{(\phi''_{\theta\theta}(0)\omega,\omega)/2}\, d\omega. \tag{9}$$

Определим производящие функции для случайных величин $\mu_t(y)$ и μ_t при $z \geqslant 0$ равенствами

$$F(z;t,x,y) = \mathsf{E}_x e^{-z\mu_t(y)}, \qquad F(z;t,x) = \mathsf{E}_x e^{-z\mu_t}, \tag{10}$$

где E_x обозначает математическое ожидание при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$. Заметим, что по определению (10)

$$F(z;t,x,y) = \mathsf{P}_x\{\mu_t(y) = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_x\{\mu_t(y) = n\} e^{-zn},$$
$$F(z;t,x) = \mathsf{P}_x\{\mu_t = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_x\{\mu_t = n\} e^{-zn},$$

и поэтому естественно доопределить функции $F(z;t,x,y)$ и $F(z;t,x)$ по непрерывности в точке $z=\infty$, полагая $F(\infty;t,x,y)=\mathsf{P}_x\{\mu_t(y)=0\}$, $F(\infty;t,x)=\mathsf{P}_x\{\mu_t=0\}$.

Как показано в [5, 8], производящие функции (10) при каждом $z\geqslant 0$ непрерывно дифференцируемы по переменной t равномерно по $x,y\in\mathbf{Z}^d$, удовлетворяют неравенствам $0\leqslant F(z;t,x), F(z;t,x,y)\leqslant 1$ и дифференциальным уравнениям

$$\partial_t F(z;t,x)=(\mathscr{A}F(z;t,\cdot))(x)+\delta_0(x)f(F(z;t,x)), \tag{11}$$

$$\partial_t F(z;t,x,y)=(\mathscr{A}F(z;t,\cdot,y))(x)+\delta_0(x)f(F(z;t,x,y)) \tag{12}$$

с начальными условиями $F(z;0,x)=e^{-z}$ и $F(z;0,x,y)=e^{-z\delta_y(x)}$ соответственно. В формуле (11), как и в (7), выражение $\mathscr{A}F(z;t,\cdot)$ следует понимать как единый символ, обозначающий зависящую от параметра z и времени t функцию переменной $x\in\mathbf{Z}^d$, определяемую равенством

$$(\mathscr{A}F(z;t,\cdot))(x)=\sum_{x'\in\mathbf{Z}^d}a(x,x')F(z;t,x').$$

Аналогично определяется и выражение $\mathscr{A}F(z;t,\cdot,y)$ в формуле (12).

Напомним, что локальной вероятностью продолжения процесса в разделе 2 была названа вероятность того, что в момент времени t хотя бы одна частица находится в точке y при условии старта процесса из точки x:

$$Q(t,x,y)=\mathsf{P}_x\{\mu_t(y)>0\}=1-\mathsf{P}_x\{\mu_t(y)=0\}.$$

Там же вероятность продолжения процесса или вероятность выживания популяции частиц была определена как вероятность того, что в момент времени t на решетке $\mathbf{Z}^d$ содержится хотя бы одна частица:

$$Q(t,x)=\mathsf{P}_x\{\mu_t>0\}=1-\mathsf{P}_x\{\mu_t=0\}.$$

Вероятности $Q(t,x,y)$, $Q(t,x)$ легко выразить через производящие функции

$$Q(t,x,y)=1-F(\infty,t,x,y),\qquad Q(t,x)=1-F(\infty,t,x). \tag{13}$$

Ряд фактов, которые характеризуют свойства производящих функций $F(z;t,x,y)$ и $F(z;t,x)$, может быть достаточно просто получен из уравнений (11) и (12), если трактовать последние как уравнения в банаховых пространствах [5, 8]. Уравнение (11) может быть представлено как зависящая от параметра z задача Коши в банаховом пространстве $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$:

$$\frac{dF(z;t,\cdot)}{dt}=\mathscr{A}F(z;t,\cdot)+\delta_0(\cdot)f(F(z;t,\cdot)) \tag{14}$$

с начальным условием $F(z,0,\cdot)=e^{-z}$.

Аналогично, в силу равномерной по $x,y\in\mathbf{Z}^d$ непрерывной дифференцируемости функции $F(z;t,x,y)$ по переменной t при каждом $z\geqslant 0$ уравнение (12) также может быть представлено как зависящая от параметров z и y задача Коши в банаховом пространстве $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$:

$$\frac{dF(z;t,\cdot,y)}{dt}=\mathscr{A}F(z;t,\cdot,y)+\delta_0(\cdot)f(F(z;t,\cdot,y)) \tag{15}$$

с начальным условием $F(z,0,\cdot,y) = e^{-z\delta_y(\cdot)}$.

Поскольку правые части уравнений (14) и (15) непрерывны и удовлетворяют условию Липшица как операторы в $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$, из (14) и (15) по теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров вытекает, в частности, что функции $F(z;t,\cdot)$ и $F(z;t,\cdot,y)$ при каждом y непрерывно по норме $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$ зависят от параметра z при $z \geqslant 0$ и, более того, имеют такую же гладкость по z, как и функция $f(u)$.

Лемма 2. *Функция $F(z,t,x)$ монотонно не убывает по t при фиксированных $z \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{Z}^d$, а следовательно, вероятность продолжения процесса $Q(t,x)$ монотонно не возрастает по t при каждом фиксированном $x \in \mathbf{Z}^d$.*

Доказательство вытекает из теоремы о положительных решениях для дифференциальных уравнений в $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$ с внедиагонально положительной правой частью (см., например, [15]). Отметим, что данный факт верен для любых размерностей d независимо от предположения о критичности параметра β.

Из (15) при помощи формулы вариации произвольной постоянной легко получить (см. теорему 2.7 в [5]) интегральные уравнения для производящих функций

$$F(z;t,x) = e^{-z} + \int_0^t p(t-s,x,0)\, f(F(z,s,0))\, ds, \tag{16}$$

$$F(z;t,x,y) = 1 + (e^{-z} p(t,x,y) + \int_0^t p(t-s,x,0)\, f(F(z,s,0,y))\, ds. \tag{17}$$

Соотношения (13) позволяют выписать уравнения для вероятностей продолжения процесса.

Теорема 3. *Вероятности продолжения процесса $Q(t,x,y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$\partial_t Q(t,x,y) = (\mathscr{A} Q(t,\cdot,y))(x) - \delta_0(x) f(1 - Q(t,x,y)), \tag{18}$$

$$\partial_t Q(t,x,y) = (\mathscr{A} Q(t,x,\cdot))(y) - \delta_0(y) f(1 - Q(t,x,y)), \tag{19}$$

с начальными условиями $Q(0,\cdot,y) = \delta_y(\cdot)$ и $Q(0,x,\cdot) = \delta_x(\cdot)$, а также интегральным уравнениям

$$Q(t,x,y) = p(t,x,y) - \int_0^t p(t-s,x,0)\, f(1 - Q(s,0,y))\, ds, \tag{20}$$

$$Q(t,x,y) = p(t,x,y) - \int_0^t p(t-s,0,y)\, f(1 - Q(s,x,0))\, ds. \tag{21}$$

При этом функция $Q(t,x,y)$ является симметричной по переменным x и y, то есть $Q(t,x,y) = Q(t,y,x)$. Вероятности выживания частиц на решетке $Q(t,x)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\partial_t Q(t,x) = (\mathscr{A} Q(t,\cdot))(x) - \delta_0(x) f(1 - Q(t,x)), \tag{22}$$

с начальным условием $Q(0,x) = 1$, а также интегральным уравнениям

$$Q(t,x) = 1 - \int_0^t p(t-s,x,0)\, f(1 - Q(s,0))\, ds. \tag{23}$$

Доказательство. Дифференциальные уравнения для $q(t,x,y) = 1 - Q(t,x,y)$ и $q(t,y) = 1 - Q(t,x)$ в точности совпадают с уравнениями (11) и (12) для производящих функций при $z = \infty$. Отсюда сразу получаем (18) и (22). Уравнения (20) и (23) получаются из (18) и (22) методом вариации произвольной постоянной [16]. Отметим, что с точностью до обозначений уравнение (20) совпадает с уравнением (3.4) из [5].

Уравнение (19) является так называемым прямым уравнением и выводится с учетом изменения числа частиц в точке y за время $[t, t+h]$ с точностью до членов порядка $o(h)$, которое определяется одним из следующих случаев:

(а) прыжком частицы из некоторой точки y', $y' \neq y$, в y;

(б) прыжком частицы из точки y в какую-то другую точку, и, наконец,

(в) ветвлением частиц в точке y, при условии, что $y = 0$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} Q(t+h,x,y) - Q(t,x,y) &= a(y,y)Q(t,x,y)h - \delta_0(y)b_1(1-Q(t,x,y))h + o(h) \\ &\quad + \sum_{y'\neq y} a(y',y)Q(t,x,y')h - \delta_0(y)\sum_{n\neq 1} b_n(1-Q(t,x,y))^n h + o(h) \\ &= \sum_{y'} a(y',y)Q(t,x,y')h - \delta_0(y)f(1-Q(t,x,y))h + o(h) \\ &= \sum_{y'} a(y,y')Q(t,x,y')h - \delta_0(y)f(1-Q(t,x,y))h + o(h) \\ &= ((\mathscr{A}Q(t,x,\cdot))(y) - \delta_0(y)f(1-Q(t,x,y)))h + o(h), \end{aligned}$$

откуда предельным переходом при $h \to 0$ получаем (19).

Докажем симметричность функции $Q(t,x,y)$. По предположению функция $Q(t,x,y)$ есть решение задачи Коши (19). Поэтому функция $n(t,x,y) = Q(t,y,x)$ удовлетворяет задаче Коши (18) и является ее единственным решением. Но функция $Q(t,x,y)$ также является решением задачи Коши (18). Следовательно, $Q(t,y,x) = n(t,x,y) = Q(t,x,y)$.

Наконец, как и выше, уравнение (21) получается из (19) методом вариации произвольной постоянной. Доказательство теоремы 3 завершено.

Отметим, что теорема 3 справедлива для решеток произвольной размерности d.

Для удобства изложения сведем необходимые в дальнейшем очевидные свойства инфинитезимальной производящей функции (1) в размерностях $d = 1, 2$ в критическом случае $\beta = \beta_c$ в следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $b_n \geqslant 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_n b_n = 0$, $\sum_n n b_n = 0$. Пусть, кроме того, при каждом $r \geqslant 1$ производные $f^{(r)}(u)$ функции $f(u)$ в точке $u = 1$ определены и конечны. Тогда*

(а) *функция $f(u) = f^{(0)}(u)$ и все ее производные $f^{(r)}(u)$, $r \geqslant 1$, имеют вид*

$$f^{(r)}(u) = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{n!}{(n-r)!} b_n u^{n-r},$$

где ряд в правой части сходится при всех $u \in [0,1]$;

(б) *функции $f(u)$ и $f^{(r)}(u)$, $r \geqslant 2$, неотрицательны при всех $u \in [0,1]$, а функция $f'(u)$ неположительна при этих же значениях u;*

(в) $f(u) = (1/2)f''(1)(1-u)^2 + o((1-u)^2)$ *при* $u \to 1$.

4. Вероятность продолжения процесса в источнике на Z

Согласно теореме 3, вероятность наличия частиц в нуле $Q(t) = Q(t,0,0)$ в момент времени t имеет вид

$$Q(t) = p(t) - \int_0^t p(t-s) f(1-Q(s))\, ds. \tag{24}$$

Введем, кроме того, функцию

$$M(t) = \int_t^\infty f(1-Q(s))\, ds. \tag{25}$$

В доказываемых ниже леммах 4–6 устанавливаются свойства функций $Q(t)$ и $M(t)$, необходимые для доказательства основного утверждения настоящего раздела — теоремы 4 об асимптотическом поведении локальной вероятности $Q(t)$.

Лемма 4. *Справедливо равенство* $M(0) = 1$, *и значит, функция* $M(t)$ *корректно определена при всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим через

$$\widehat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t)\, dt, \qquad \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(1-Q(t))\, dt$$

преобразования Лапласа при $\lambda \geqslant 0$ функций $Q(t)$ и $f(1-Q(t))$ соответственно. Из (24) по определению (2) вытекает, что

$$\widehat{Q}(\lambda) = G_\lambda(0,0) - G_\lambda(0,0)\hat{f}(\lambda) = G_\lambda(0,0)(1-\hat{f}(\lambda)), \tag{26}$$

и значит, $\hat{f}(\lambda) \leqslant 1$ при $\lambda \geqslant 0$. Кроме того, из определения функции $\hat{f}(\lambda)$ в силу неотрицательности $f(u)$ (см. утверждение (б) леммы 3) следует, что функция $\hat{f}(\lambda)$ монотонно возрастает при $\lambda \to 0$. Поэтому существует конечный предел

$$M(0) = \int_0^\infty f(1-Q(s))\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \hat{f}(\lambda) = c_0 \leqslant 1. \tag{27}$$

Из асимптотического поведения переходных вероятностей (3) с помощью тауберовой теоремы для плотностей (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) получаем, что при $\lambda \to 0$

$$G_\lambda(0,0) \sim \gamma_1 \sqrt{\pi/\lambda}, \tag{28}$$

из которого в силу (26) и (27) при $\lambda \to 0$ вытекает соотношение

$$\widehat{Q}(\lambda) \sim (1-c_0)\gamma_1\sqrt{\pi/\lambda}.$$

Тогда по тауберовой теореме (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) при $t \to \infty$

$$\int_0^t Q(u)\, du = 2(1-c_0)\gamma_1\sqrt{t} + o(\sqrt{t}).$$

Покажем теперь, что $c_0 = 1$. В силу интегрального неравенства Гельдера и утверждения (в) леммы 3, при достаточно больших t имеют место оценки

$$\frac{1}{t}\left(\int_t^{2t} Q(u)\, du\right)^2 \leqslant \int_t^{2t} Q^2(u)\, du \leqslant \frac{2}{f''(1)}\int_t^{2t} f(1-Q(u))\, du. \tag{29}$$

Если бы выполнялось неравенство $c_0 < 1$, то здесь при $t \to \infty$ имело бы место соотношение

$$\int_t^{2t} Q(u)\,du \sim 2(\sqrt{2}-1)(1-c_0)\gamma_1\sqrt{t}.$$

Тогда при $t \to \infty$ левая часть неравенства (29) оценивалась бы снизу ненулевой константой, что влекло бы расходимость интеграла $\int_0^\infty f(1-Q(u))\,du$, приводя к противоречию с утверждением (27). Полученное противоречие опровергает предположение, что $c_0 < 1$. В силу (27) лемма доказана.

Следствие 1. *Справедлива оценка $Q(t) \leqslant p(t)M(t)$, и потому $Q(t) = o(p(t))$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. В силу леммы 4, интегральное уравнение (24) может быть представлено в виде

$$Q(t) = p(t) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s))\,ds = p(t)M(0) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s))\,ds.$$

Отсюда в силу монотонности $p(t)$ получаем оценку

$$Q(t) \leqslant p(t)M(0) - p(t)\int_0^t f(1-Q(s))\,ds = p(t)M(t),$$

из которой в силу неотрицательности функции $Q(t)$ вытекает утверждение следствия.

Введем функцию $L(\lambda) = 1 - \hat{f}(\lambda)$. Согласно (26), функция $L(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$L(\lambda) = 1 - \hat{f}(\lambda) = \frac{\widehat{Q}(\lambda)}{G_\lambda(0,0)}. \tag{30}$$

Лемма 5. *Функция $L(\lambda)$ медленно меняется в нуле.*

Доказательство. Напомним, что положительная функция $L(\lambda)$, $\lambda > 0$, называется медленно меняющейся в нуле, если при каждом фиксированном c выполняется равенство $\lim_{\lambda\to 0} L(c\lambda)/L(\lambda) = 1$. Аналогично вводится понятие функции, медленно меняющейся на бесконечности [18]. Отметим, что соотношение $\lim_{\lambda\to 0} L(c\lambda)/L(\lambda) = 1$ достаточно доказать лишь для всех $c > 1$ или для всех $c < 1$.

В силу утверждения (в) леммы 3, существует такая константа C_1, что при всех $u \in [0,1]$ выполняется неравенство $f(u) \leqslant C_1(1-u)^2$. Тогда, как следует из (30), для любого $c > 1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} L(c\lambda) - L(\lambda) = \hat{f}(\lambda) - \hat{f}(c\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1-e^{-(c-1)\lambda s})f(1-Q(s))\,ds \\ &\leqslant C_1\int_0^\infty e^{-\lambda s}(1-e^{-(c-1)\lambda s})Q^2(s)\,ds = I_1(\lambda) + I_2(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$I_1(\lambda) = C_1\int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s}(1-e^{-(c-1)\lambda s})Q^2(s)\,ds,$$
$$I_2(\lambda) = C_1\int_{1/\lambda}^\infty e^{-\lambda s}(1-e^{-(c-1)\lambda s})Q^2(s)\,ds.$$

Так как $1-e^{-x} \leqslant x$ и $1-e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, справедливы неравенства

$$I_1(\lambda) \leqslant C_1(c-1)\lambda \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s} s Q^2(s)\,ds \leqslant C_1(c-1)\sqrt{\lambda} \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s}(\sqrt{s}Q(s))Q(s)\,ds,$$

$$I_2(\lambda) \leqslant C_1 \int_{1/\lambda}^{\infty} e^{-\lambda s} Q^2(s)\,ds \leqslant C_1 \max_{t \geqslant 1/\lambda} Q(t) \int_{1/\lambda}^{\infty} e^{-\lambda s} Q(s)\,ds.$$

Заметим теперь, что $\widehat{Q}(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to 0$, а $\sqrt{t}Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому при $\lambda \to 0$

$$\int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s}(\sqrt{s}Q(s))Q(s)\,ds \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}(\sqrt{s}Q(s))Q(s)\,ds = o\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} Q(s)\,ds\right),$$

и следовательно,

$$\frac{I_1(\lambda)}{L(\lambda)} \leqslant C_1(c-1)\sqrt{\lambda} G_\lambda(0,0) \frac{o(\widehat{Q}(\lambda))}{\widehat{Q}(\lambda)}.$$

Здесь в силу (28) произведение $\sqrt{\lambda} G_\lambda(0,0)$ ограничено при $\lambda \to 0$, и, следовательно, $I_1(\lambda) = o(L(\lambda))$.

Оценивая сверху с помощью следствия 1 интеграл $I_2(\lambda)$, находим, что

$$I_2(\lambda) \leqslant C_1 p(\lambda^{-1}) \int_{1/\lambda}^{\infty} Q^2(s)\,ds \int_{1/\lambda}^{\infty} e^{-\lambda s} Q(s)\,ds.$$

Тогда

$$\frac{I_2(\lambda)}{L(\lambda)} \leqslant C_1 p(\lambda^{-1}) G_\lambda(0,0) \int_{1/\lambda}^{\infty} Q^2(s)\,ds,$$

откуда $I_2(\lambda) = o(L(\lambda))$.

Таким образом, $L(c\lambda) - L(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda) = o(L(\lambda))$, для любого $c > 1$, откуда в силу определения медленно меняющейся функции вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Следствие 2. *При $t \to \infty$ справедливо асимптотическое соотношение $M(t) \sim L(t^{-1})$, и следовательно, функция $M(t)$ медленно меняется на бесконечности.*

Доказательство. В силу (30) функция $L(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$L(\lambda) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(1-Q(s))\,ds = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} M(s)\,ds,$$

то есть

$$\lambda^{-1} L(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} M(s)\,ds.$$

Так как по лемме 5 функция $L(\lambda)$ медленно меняется в нуле, по тауберовой теореме для плотностей (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) получаем предельное при $t \to \infty$ соотношение $M(t) \sim L(t^{-1})$, из которого вытекает требуемое утверждение. Следствие доказано.

Следствие 3. *Справедливо асимптотическое при $t \to \infty$ соотношение*

$$\int_0^t Q(s)\,ds \sim 2\gamma_1 \sqrt{t} M(t). \tag{31}$$

Доказательство. В силу (30) справедливо равенство $\widehat{Q}(\lambda) = G_\lambda(0,0)(\lambda)L(\lambda)$, в котором $L(\lambda)$ медленно меняется в нуле при $\lambda \to 0$. Тогда из (28) по тауберовой теореме (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) вытекает асимптотическое при $t \to \infty$ соотношение

$$\int_0^t Q(s)\,ds \sim 2\gamma_1\sqrt{t}L(t^{-1}).$$

Отсюда по следствию 2 получаем требуемое соотношение (31). Следствие доказано.

Лемма 6. *При $t \to \infty$ справедливо соотношение*

$$I(t) = \int_0^t f(1-Q(s))(p(t-s)-p(t))\,ds = o(p(t)M(t)). \tag{32}$$

Доказательство. Представим функцию $I(t)$ в виде $I(t) = I_{1,\varepsilon}(t) + I_{2,\varepsilon}(t) + I_{3,\varepsilon}(t)$, где

$$I_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{\varepsilon t} f(1-Q(s))(p(t-s)-p(t))\,ds, \tag{33}$$

$$I_{2,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon t}^{t-\varepsilon t} f(1-Q(s))(p(t-s)-p(t))\,ds, \tag{34}$$

$$I_{3,\varepsilon}(t) = \int_{t-\varepsilon t}^{t} f(1-Q(s))(p(t-s)-p(t))\,ds, \tag{35}$$

а $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число.

Оценим сначала интеграл $I_{1,\varepsilon}(t)$. Представим $I_{1,\varepsilon}(t)$ в виде

$$I_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t\varepsilon} f(1-Q(s))\left(\int_{t-s}^{t}(-p'(u))\,du\right)ds.$$

По лемме 1 функция $(-p'(t))$ положительна и не возрастает, поэтому

$$I_{1,\varepsilon}(t) \leqslant |p'(t)|\int_0^{t\varepsilon} sf(1-Q(s))\,ds. \tag{36}$$

Здесь интеграл в правой части можно представить в виде

$$\int_0^{\varepsilon t} sf(1-Q(s))\,ds = \int_0^{\varepsilon t} s\,d(-M(s)) = -\varepsilon tM(\varepsilon t) + \int_0^{\varepsilon t} M(s)\,ds. \tag{37}$$

Покажем, что при $t \to \infty$

$$\int_0^t M(s)\,ds \sim tM(t). \tag{38}$$

Положим

$$U(t) = \int_0^t M(s)\,ds.$$

Тогда производная $u(t)$ функции $U(t)$ совпадает с $M(t)$ и в силу определения (25) монотонна. Кроме того, функция $u(t)$ может быть представлена в виде $u(t) = t^{\rho-1}\tilde{L}(t)/\Gamma(\rho)$, где $\rho = 1$, а функция $\tilde{L}(t) = \Gamma(\rho)M(t)$ по следствию 2 медленно меняется на бесконечности. Следовательно, по тауберовой теореме (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) функция

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} u(s)\, ds$$

при $\lambda \to 0$ имеет асимптотическое представление

$$\omega(\lambda) \sim \lambda^{-1}\Gamma(\rho)\tilde{L}(\lambda^{-1}),$$

или, при $\lambda \to 0$, поскольку при $\rho = 1$ выполняется соотношение $\Gamma(\rho) = \Gamma(1) = 1$,

$$\omega(\lambda) \sim \lambda^{-1} M(\lambda^{-1}). \tag{39}$$

Представив теперь функцию $\omega(\lambda)$ в виде $\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, dU(s)$, по тауберовой теореме (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) получаем, что соотношение (39) влечет (38).

Из (38) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ получаем, что при $t \to \infty$

$$\int_0^{t\varepsilon} M(s)\, ds \sim \varepsilon t M(\varepsilon t)$$

и в силу (37)

$$\int_0^{\varepsilon t} s f(1 - Q(s))\, ds = o(p(\varepsilon t)M(\varepsilon t)) = o(p(t)M(t)).$$

Отсюда в силу (36) $I_{1,\varepsilon}(t) \leqslant |p'(t)|o(p(t)M(t))$, и в силу леммы 1

$$I_{1,\varepsilon}(t) = o(p(t)M(t)). \tag{40}$$

Перейдем к оценке интеграла $I_{2,\varepsilon}(t)$. В силу невозрастания переходной вероятности $p(t)$ выражение $p(t-s) - p(t)$ в (34) оценивается в промежутке интегрирования следующим образом: $p(t-s) - p(t) \leqslant p(\varepsilon t)$, потому

$$I_{2,\varepsilon}(t) \leqslant p(\varepsilon t)\left(\int_{\varepsilon t}^\infty f(1 - Q(s))\, ds - \int_{t-\varepsilon t}^\infty f(1 - Q(s))\, ds\right) = p(\varepsilon t)(M(\varepsilon t) - M(t - \varepsilon t)).$$

Здесь согласно следствию 2 функция $M(\varepsilon t)$ медленно меняется в нуле. Поэтому $M(\varepsilon t) - M(t - \varepsilon t) = o(M(t))$, и следовательно,

$$I_{2,\varepsilon}(t) \leqslant p(\varepsilon t)o(M(t)) = o(p(t)M(t)). \tag{41}$$

Оценим интеграл

$$I_{3,\varepsilon}(t) = \int_{t-t\varepsilon}^t f(1 - Q(s))p(t-s)\, ds - p(t)\int_{t-t\varepsilon}^t f(1 - Q(s))\, ds,$$

для него справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} I_{3,\varepsilon}(t) &\leqslant \int_{t-t\varepsilon}^t f(1 - Q(s))p(t-s)\, ds \leqslant C_1 \int_{t-t\varepsilon}^t Q^2(s)p(t-s)\, ds \\ &\leqslant C_1 \max_{t(1-\varepsilon) \leqslant s \leqslant t} Q^2(s) \int_0^{t\varepsilon} p(s)\, ds. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $Q(t) \leqslant p(t)M(t)$ по следствию 1. Тогда в силу невозрастания функции $p(t)M(t)$ при достаточно больших t выполняется неравенство

$$I_{3,\varepsilon}(t) \leqslant 2C_1\gamma_1 p^2((1-\varepsilon)t)M^2((1-\varepsilon)t)\int_0^{t\varepsilon} p(s)\,ds. \tag{42}$$

Здесь из (28) и тауберовой теоремы (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) вытекает, что для интеграла в правой части при $x \to \infty$ справедливо соотношение

$$\int_0^x p(s)\,ds \sim \gamma_1\sqrt{x},$$

и поэтому найдется такая константа C_2, что

$$\int_0^x p(s)\,ds \leqslant C_2\gamma_1\sqrt{x}, \qquad x \geqslant 0.$$

Тогда отсюда и из (42) получаем, что

$$I_{3,\varepsilon}(t) \leqslant 2C_1C_2\gamma_1^2 p^2((1-\varepsilon)t)M^2((1-\varepsilon)t)\sqrt{\varepsilon t}. \tag{43}$$

В силу представления (3) для функции $p(t)$ найдется такая константа C_3, что $p(t) \leqslant C_3\gamma_1 t^{-1/2}$, потому неравенство (43) может быть преобразовано к виду

$$I_{3,\varepsilon}(t) \leqslant 2C_1C_2C_3\gamma_1^3 p((1-\varepsilon)t)M^2((1-\varepsilon)t)\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}.$$

Так как функция $M(t)$, согласно следствию 2, медленно меняется и стремится к нулю при $t \to \infty$, из последнего неравенства получаем соотношение

$$I_{3,\varepsilon}(t) = o(p(t)M(t)). \tag{44}$$

Итак, в силу (40), (41), (44) каждый из интегралов $I_{1,\varepsilon}(t)$, $I_{2,\varepsilon}(t)$, $I_{3,\varepsilon}(t)$ имеет порядок $o(p(t)M(t))$ при $t \to \infty$. Следовательно, функция $I(t) = I_{1,\varepsilon}(t) + I_{2,\varepsilon}(t) + I_{3,\varepsilon}(t)$ также имеет порядок $o(p(t)M(t))$ при $t \to \infty$. Лемма доказана.

Следствие 4. *При $t \to \infty$ справедливо равенство $Q(t) = p(t)M(t)(1 + o(1))$.*

Доказательство. Согласно лемме 4, справедливо равенство $M(0) = 1$, поэтому интегральному представлению (24) можно придать вид

$$\begin{aligned} Q(t) &= p(t)M(0) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s))\,ds \\ &= p(t)M(t) - \int_0^t f(1-Q(s))(p(t-s)-p(t))\,ds. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом леммы 6 получаем утверждение следствия.

Теорема 4. *При $t \to \infty$*

$$Q(t) \sim 2(\beta_2\gamma_1\sqrt{t}\ln t)^{-1}. \tag{45}$$

Доказательство. Положим

$$y(t) = \int_t^\infty Q^2(s)\,ds, \qquad \varphi(t) = \frac{Q(t)}{p(t)y(t)}.$$

Так как функция $y(t)$ не возрастает при $t \to \infty$, ее производная неположительна и $Q(t) = \sqrt{-y'(t)}$. Тогда по следствию 4

$$-\frac{y'(t)}{y^2(t)} = p^2(t)\varphi^2(t), \tag{46}$$

где

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2} f''(1) + o(1).$$

Проинтегрировав левую и правую части (46), получим, что

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)} = \int_0^t p^2(s)\varphi^2(s)\,ds.$$

Здесь при $t \to \infty$

$$\int_0^t p^2(s)\varphi^2(s)\,ds \sim \left(\frac{f''(1)}{2}\right)^2 \gamma_1^2 \ln t.$$

Следовательно, при $t \to \infty$

$$y(t) \sim \frac{4}{(f''(1)\gamma_1)^2 \ln t}$$

или, что равносильно,

$$\int_t^\infty Q^2(s)\,ds \sim \frac{4}{(f''(1)\gamma_1)^2 \ln t}.$$

Так как при достаточно больших t по утверждению (в) леммы 3 имеет место асимптотическое равенство

$$p(t)M(t) \sim p(t)\int_t^\infty \frac{f''(1)}{2} Q^2(s)\,ds,$$

в силу следствия 4 и асимптотического представления для $p(t)$, а также определения β_2, получаем утверждение (45). Теорема доказана.

5. Вероятность продолжения процесса в источнике на $\mathbf{Z}^2$

Теперь перейдем к исследованию локальной вероятности продолжения процесса в источнике на $\mathbf{Z}^2$. Прежде чем приступить к доказательству основного утверждения настоящего раздела, теоремы 5, докажем две вспомогательные леммы 7 и 8.

Лемма 7. *Справедливо неравенство $M(0) < 1$, и значит, функция $M(t)$ корректно определена при всех $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Как отмечалось в начале раздела 4, вероятность наличия частиц в нуле $Q(t)$ удовлетворяет уравнению (24). В силу монотонности $p(t)$ (см. лемму 1) из интегрального уравнения (24) вытекает оценка

$$Q(t) = p(t) - \int_0^t p(t-s) f(1-Q(s))\,ds \leqslant p(t)\left(1 - \int_0^t f(1-Q(s))\,ds\right).$$

С другой стороны, по определению $Q(t) = \mathbf{P}_0\{\mu_t(0) > 0\}$. Поэтому, введя обозначение $m_n(t) = m_n(t, 0, 0) = \mathbf{E}_0\mu_t^n(0)$, с помощью неравенства Коши–Буняковского получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} m_1^2(t) &= (\mathbf{E}_0\mu_t(0))^2 = (\mathbf{E}_0\mu_t(0)I(\mu_t(0) > 0))^2 \leqslant \mathbf{E}_0\mu_t^2(0)\mathbf{E}_0 I(\mu_t(0) > 0) \\ &= m_2(t)\mathbf{P}_0\{\mu_t(0) > 0\} = m_2(t)Q(t), \end{aligned}$$

откуда вытекает оценка снизу для $Q(t)$

$$\frac{m_1^2(t)}{m_2(t)} \leqslant Q(t).$$

Заметим теперь, что $m_1(t) = p(t)$ при $d = 2$ [3, 8]. Следовательно, для вероятности $Q(t)$ продолжения процесса в источнике справедливы неравенства

$$\frac{p^2(t)}{m_2(t)} \leqslant Q(t) \leqslant p(t)\left(1 - \int_0^t f(1 - Q(s))\,ds\right),$$

из которых вытекает оценка

$$\frac{p(t)}{m_2(t)} \leqslant 1 - \int_0^t f(1 - Q(s))\,ds$$

или, что то же,

$$\int_0^t f(1 - Q(s))\,ds \leqslant 1 - \frac{p(t)}{m_2(t)}. \tag{47}$$

Здесь, как показано в [8], $m_2(t) \sim C_2(0,0)t^{-1}$ при $t \to \infty$, где $C_2(0,0) = \beta_2\gamma_2^2 > 0$. В этом случае при $t \to \infty$ правая часть неравенства (47) в силу асимптотического поведения (3) функции $p(t)$ стремится к константе $1 - (\beta_2\gamma_2)^{-1} < 1$. Следовательно,

$$M(0) = \int_0^\infty f(1 - Q(s))\,ds \leqslant 1 - (\beta_2\gamma_2)^{-1} < 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если $M(0) < 1$ и $p(t) \sim \gamma_2 t^{-1}$, то*

$$\int_0^t p(t - s) f(1 - Q(s))\,ds \sim \gamma_2 M(0) t^{-1} \tag{48}$$

при $t \to \infty$.

Доказательство. Представим интеграл в левой части асимптотического равенства (48) в виде

$$\int_0^t p(t-s) f(1 - Q(s))\,ds = p(t)\int_0^t f(1 - Q(s))\,ds + \int_0^t (p(t-s) - p(t)) f(1 - Q(s))\,ds.$$

Здесь первое слагаемое по условию леммы 8 при $t \to \infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$p(t)\int_0^t f(1 - Q(s)) \sim M(0)p(t),$$

и поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что

$$I(t) = \int_0^t (p(t-s) - p(t)) f(1 - Q(s))\, ds = o(p(t)). \tag{49}$$

Представим интеграл $I(t)$ в виде

$$I(t) = \int_0^t f(1 - Q(s)) \left(\int_{t-s}^t (-p'(u))\, du \right) ds.$$

По лемме 1 функция $(-p'(t))$ положительна и не возрастает, и поэтому

$$I(t) \leqslant |p'(t)| \int_0^t s f(1 - Q(s))\, ds.$$

Здесь правая часть неравенства может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} |p'(t)| \int_0^t s f(1 - Q(s))\, ds &= |p'(t)| \int_0^t s\, d(-M(s)) \\ &= |p'(t)|(-tM(t)) + |p'(t)| \int_0^t M(s)\, ds. \end{aligned}$$

Так как для функции $(-p'(t))$ справедливо асимптотическое представление (8) и из леммы 7 следует, что $M(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$, отсюда получаем (49). Лемма доказана.

Теорема 5. *При $t \to \infty$*

$$Q(t) \sim \gamma_2 (1 - M(0)) t^{-1}. \tag{50}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 3, вероятность продолжения процесса в источнике $Q(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (24). В этом уравнении в силу (3) $p(t) \sim \gamma_2 t^{-1}$ при $t \to \infty$, и поэтому согласно (48) справедливо представление (50), в котором $M(0) < 1$. Теорема доказана.

Обратим внимание на тот факт, что $M(0) < 1$ при $d = 2$. Этим объясняется идентичность асимптотического поведения по времени t переходной вероятности $p(t)$ и локальной вероятности продолжения процесса в источнике $Q(t)$ на $\mathbf{Z}^2$.

6. Вероятности продолжения процесса в произвольных узлах $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$

В разделах 4–5 предполагалось, что процесс стартовал в источнике ветвления, то есть в точке $x = 0$. В настоящем разделе будет показано, что на решетках низких размерностей асимптотическое поведение локальных вероятностей продолжения процесса $Q(t, x, y)$ не зависит от расположения узлов x и y.

Теорема 6. *Если $\beta = \beta_c$ и $d = 1, 2$, то для произвольных x и y при $t \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство $Q(t, x, y) \sim Q(t)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $d = 1$. Из интегральных уравнений (20) и (24) вытекает равенство

$$Q(t,x,y) - Q(t,0,y) - (p(t,x,y) - p(t,0,y)) \\ = \int_0^t (p(t-s) - p(t-s,x,0)) f(1 - Q(s,0,y))\,ds. \quad (51)$$

Вначале исследуем асимптотику свертки в правой части (51) при $y = 0$. В силу (3), при $d = 1$ справедливо асимптотическое $t \to \infty$ представление

$$p(t) - p(t,x,0) \sim \tilde{\gamma}_1(x) t^{-3/2}. \quad (52)$$

В то же время из теоремы 4 и утверждения (в) леммы 3 вытекает, что при $t \to \infty$

$$f(1 - Q(t)) \sim \frac{2}{\beta_2 \gamma_1^2 t \ln^2 t}. \quad (53)$$

Тогда по лемме о свертках степенно-логарифмических функций (см. лемму 5.1.2 в [8]) получаем из (52) и (53), что при $t \to \infty$

$$\int_0^t (p(t-s) - p(t-s,x,0)) f(1 - Q(s))\,ds \sim \frac{2}{\beta_2 \gamma_1^2 t \ln^2 t} \int_0^\infty (p(s) - p(s,x,0))\,ds. \quad (54)$$

Таким образом, при $t \to \infty$

$$Q(t,x,0) - Q(t) \sim \frac{2}{\beta_2 \gamma_1^2 t \ln^2 t} \int_0^\infty (p(s) - p(s,x,0))\,ds. \quad (55)$$

Здесь по теореме 4 $Q(t) \sim 2(\beta_2 \gamma_1 \sqrt{t} \ln t)^{-1}$, значит, функция $Q(t)$ убывает на бесконечности медленнее, чем правая часть в асимптотическом представлении (55). Следовательно, $Q(t) \sim Q(t,x,0)$ при $t \to \infty$.

Теперь перейдем к исследованию представления (51) при произвольном значении переменной y. Согласно теореме 3, функция $Q(t,x,y)$ симметрична, и поэтому $Q(t) \sim Q(t,y,0) = Q(t,0,y)$. Тогда при $t \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство $f(1 - Q(t,0,y)) \sim f(1 - Q(t))$, из которого следует, что свертка, стоящая в правой части (51), асимптотически ведет себя так же, как и свертка (54). Из свойств однородности и симметричности переходной вероятности случайного блуждания следует, что $p(t,x,y) = p(t,0,y-x) = p(t,y-x,0)$. Поэтому, в силу (3), в размерности $d = 1$ справедливо асимптотическое представление $p(t) - p(t,y-x,0) \sim \gamma_1(y-x) t^{-3/2}$. Следовательно, $Q(t,x,y) \sim Q(t)$ при $t \to \infty$. Доказательство теоремы для размерности $d = 1$ завершено.

Докажем теперь теорему в случае $d = 2$. В силу (20) и свойства симметричности $Q(t,x,y)$, локальные вероятности продолжения процесса $Q(t,0,y)$ удовлетворяют равенствам

$$Q(t,0,y) = p(t,0,y) - \int_0^t p(t-s) f(1 - Q(s,0,y))\,ds \\ = p(t,y,0) - \int_0^t p(t-s,y,0) f(1 - Q(s,0,0))\,ds. \quad (56)$$

Переходные вероятности симметричны относительно переменных x и y, то есть $p(t,0,y) = p(t,y,0)$, поэтому

$$\int_0^t p(t-s) f(1 - Q(s,0,y))\,ds = \int_0^t p(t-s,y,0) f(1 - Q(s,0,0))\,ds. \tag{57}$$

Здесь при $d = 2$ и $t \to \infty$ в силу (3) справедливо асимптотическое равенство $p(t,y,0) \sim \gamma_2 t^{-1}$, и $M(0) < 1$ по лемме 7. Отсюда с помощью леммы о поведении сверток степенно-логарифмических функций (см. лемму 5.1.2 в [8]) получаем, что асимптотическое поведение свертки, стоящей в правой части равенства (57), имеет вид $\gamma_2 t^{-1} M(0)$. Тогда из первого равенства в (56) следует, что при $t \to \infty$

$$Q(t,0,y) = Q(t,y,0) \sim \gamma_2(1 - M(0))t^{-1}, \tag{58}$$

и значит, первый член асимптотического разложения $Q(t,0,y)$ по t не зависит от y. Таким образом, нами получено равенство $M(0,y) = M(0)$, где

$$M(t,y) = \int_t^\infty f(1 - Q(s,0,y))\,ds.$$

Теперь установим, что $Q(t,x,y) \sim Q(t)$ при $t \to \infty$. В силу (3) $p(t,x,0) \sim \gamma_2 t^{-1}$ при $t \to \infty$, и поэтому согласно лемме 5.1.2 в [8] при $t \to \infty$

$$\int_0^t p(t-s,x,0) f(1 - Q(s,0,y))\,ds \sim \gamma_2 t^{-1} M(0,y).$$

Отсюда и из интегрального уравнения (20) получаем соотношение

$$Q(t,x,y) = \gamma_2 t^{-1}(1 - M(0,y))(1 + o(1)), \tag{59}$$

но, как было показано выше, $M(0,y) = M(0)$. Отсюда и из (58), (59) вытекает требуемая асимптотика для $Q(t,x,y)$. Теорема доказана.

7. Вероятность выживания популяции частиц на $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$

Лемма 9. *В размерностях $d = 1, 2$ в случае $\beta = \beta_c$ при каждых фиксированных x и $z \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\lim_{t\to\infty} F(z,t,x) = 1, \qquad \lim_{t\to\infty} Q(t,x) = 0.$$

Доказательство. При любых фиксированных x и $z \geqslant 0$ в силу леммы 2 найдется такое $c_0(z,x) \geqslant 0$, что $\lim_{t\to\infty} F(z,t,x) = 1 - c_0(z,x) \leqslant 1$. Предположив, что $c_0(z,x) > 0$, преобразуем уравнение (16) к виду

$$F(z,t,x) - e^{-z} = \int_0^t p(t-s,x,0) f(F(z,s,0))\,ds.$$

Устремив теперь в полученном уравнении t к бесконечности, получим, что

$$1 - c_0(z,x) - e^{-z} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t p(t-s,x,0) f(F(z,s,0))\,ds, \tag{60}$$

откуда вытекает, что предел в правой части (60) конечен.

С другой стороны, в силу утверждения (в) леммы 3, в наших предположениях при $t \to \infty$ справедливо соотношение $f(F(z,t,0)) = (f''/2)c_0^2(z,0) + o(t)$, то есть функция $f(F(z,t,0))$ имеет при каждом фиксированном $z \geqslant 0$ конечный ненулевой предел при $t \to \infty$. Но тогда в силу (3) предел в правой части (60) должен быть бесконечным. Таким образом, мы приходим к противоречию с предположением $c_0(z,x) > 0$. Значит, $c_0(z,x) \equiv 0$, и из равенства (13) получаем, что при каждом фиксированном x выполняется соотношение $\lim_{t\to\infty} Q(t,x) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $\beta = \beta_c$. Тогда при $t \to \infty$ имеют место асимптотические равенства*

$$Q(t,x) \sim \sqrt{2}(\beta_2\gamma_1\pi)^{-1/2}t^{-1/4} \quad \text{\textit{при}} \quad d = 1, \tag{61}$$

$$Q(t,x) \sim \sqrt{2}(\beta_2\gamma_2)^{-1/2}\ln^{-1/2} t \quad \text{\textit{при}} \quad d = 2. \tag{62}$$

Доказательство. Интегральное уравнение (23) в размерностях $d = 1, 2$ принимает вид

$$1 - Q(t,x) = \int_0^t p(t-s,x,0)f(1-Q(s,0))\,ds. \tag{63}$$

Положив в этом уравнении $x = 0$ и затем применив преобразование Лапласа к обеим его частям, в силу определения (2) получим, что

$$\widehat{(1-Q)}(\lambda) = G_\lambda(0,0)\widehat{f(1-Q)}(\lambda), \tag{64}$$

где в левой части стоит преобразование Лапласа вероятности вырождения процесса $1 - Q(t,0)$. По лемме 9 эта вероятность стремится к 1 при $t \to \infty$, и значит, $\widehat{(1-Q)}(\lambda) \sim \lambda^{-1}$. Из асимптотического поведения $p(t,0,0)$ (3) с помощью тауберовых теорем (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) определяем асимптотическое поведение функции Грина (2) при $\lambda \to 0$, которое имеет вид

$$G_\lambda(0,0) \sim \gamma_1\Gamma(1/2)\lambda^{-1/2} \quad \text{при} \quad d = 1, \tag{65}$$

$$G_\lambda(0,0) \sim \gamma_2\ln(1/\lambda) \quad \text{при} \quad d = 2. \tag{66}$$

Так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, отсюда и из равенства (64) получаем, что при $\lambda \to 0$

$$\widehat{f(1-Q)}(\lambda) \sim \gamma_1^{-1}(\pi\lambda)^{-1/2} \quad \text{при} \quad d = 1, \tag{67}$$

$$\widehat{f(1-Q)}(\lambda) \sim (\gamma_2\lambda\ln(\lambda^{-1}))^{-1} \quad \text{при} \quad d = 2. \tag{68}$$

В силу определения инфинитиземальной производящей функции f и леммы 2 о монотонности функции Q, функция $f(1-Q(t,0))$ также является монотонной. Как и выше, применяя тауберову теорему к (67), (68) получаем при $t \to \infty$ асимптотические равенства

$$f(1-Q(t,0)) \sim (\gamma_1\pi)^{-1}t^{-1/2} \quad \text{при} \quad d = 1,$$

$$f(1-Q(t,0)) \sim (\gamma_2\ln t)^{-1} \quad \text{при} \quad d = 2.$$

Отсюда, по лемме 3, получаем, что асимптотическое поведение $Q^2(t,0)$ при $t \to \infty$ имеет вид

$$Q^2(t,0) \sim 2(\beta_2\gamma_1\pi)^{-1}t^{-1/2} \quad \text{при} \quad d = 1, \tag{69}$$

$$Q^2(t,0) \sim 2(\beta_2\gamma_2\ln t)^{-1} \quad \text{при} \quad d = 2, \tag{70}$$

откуда и следует утверждение леммы при $x = 0$.

Так как первый член асимптотического разложения (при $\lambda \to 0$) функций Грина $G_\lambda(x, y)$ не зависит от x, из соотношений (69), (70) вытекает, что асимптотика $Q(t, x)$ не зависит от x и ведет себя как $Q(t, 0)$. Следовательно, при любом x справедливы асимптотические равенства (61)–(62). Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть* $\beta = \beta_c$. *Тогда в размерностях* $d = 1, 2$ *при* $t \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$1 - F(z, t, x) \sim \sqrt{(1 - e^{-z})}Q(t, x). \tag{71}$$

Доказательство. Интегральное уравнение (16) при $x = 0$ в размерностях $d = 1, 2$ принимает вид

$$F(z, t, 0) = e^{-z} + \int_0^t p(t - s, 0, 0) f(F(z, s, 0))\, ds. \tag{72}$$

Применив преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (72), получим, что

$$\widehat{F}(\lambda) = \frac{e^{-z}}{\lambda} + G_\lambda(0, 0)\widehat{f(F)}(\lambda).$$

По лемме 9, функция $F(z, t, 0)$ при $t \to \infty$ стремится к 1. Следовательно, для преобразования Лапласа от $F(z, t, 0)$ при $\lambda \to 0$ справедливо асимптотическое равенство $\widehat{F}(\lambda) \sim \lambda^{-1}$. Асимптотическое поведение функций Грина $G_\lambda(0, 0)$ при $\lambda \to 0$ в размерностях $d = 1, 2$ имеет вид (65), (66). Следовательно, из (67), (68) при $\lambda \to 0$ получаем, что $\widehat{f(F)}(\lambda) \sim (1 - e^{-z})\widehat{f(1 - Q)}(\lambda)$, $d = 1, 2$. В силу леммы 2 и тауберовой теоремы из [17], получаем при $t \to \infty$ асимптотические равенства $f(F(z, t, 0)) \sim (1 - e^{-z}) f(1 - Q(t, 0))$, $d = 1, 2$. Здесь в силу утверждения (в) леммы 3 левая часть равенства имеет вид

$$f(F(z, t, 0)) \sim \frac{f''(1)}{2}(1 - F(z, t, 0))^2,$$

а правая часть в силу того же утверждения (в) леммы 3 имеет вид

$$(1 - e^{-z}) f(1 - Q(t, 0)) \sim (1 - e^{-z})\frac{f''(1)}{2}Q^2(t, 0).$$

Из последних двух асимптотических равенств вытекают соотношения (71) между производящими функциями $F(z, t, 0)$ и вероятностями продолжения процесса $Q(t, 0)$. Так как первый член асимптотического разложения функций Грина (65), (66) при $\lambda \to 0$ не зависит от x, отсюда вытекает, что асимптотика $F(z, t, x)$ не зависит от x и ведет себя как $F(z, t, 0)$. Следовательно, при любом x справедливо утверждение леммы (71). Лемма доказана.

Таким образом, доказательства всех утверждений теоремы 1 завершены.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Так как $\mathsf{P}_x\{\mu_t = 0 \mid \mu_t > 0\} = 0$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_x[e^{-z\mu_t} \mid \mu_t > 0] &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-zn}\mathsf{P}_x\{\mu_t = n \mid \mu_t > 0\} = \mathsf{P}_x^{-1}\{\mu_t > 0\}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-zn}\mathsf{P}_x\{\mu_t = n\} \\ &= \mathsf{P}_x^{-1}\{\mu_t > 0\}(F(z, t, x) - \mathsf{P}_x\{\mu_t = 0\}),\end{aligned}$$

откуда, используя (13), получаем, что

$$\mathsf{E}_x[e^{-z\mu_t} \mid \mu_t > 0] = \frac{F(z,t,x) - F(\infty,t,x)}{1 - F(\infty,t,x)} = 1 - \frac{1 - F(z,t,x)}{Q(t,x)}.$$

Отсюда в силу леммы 11 при $t \to \infty$ вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Автор благодарен В. А. Ватутину за внимание к работе и рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
2. Яровая Е. Б., Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве. *Теор. матем. физ.* (1991) **88**, №1, 25–30.
3. Богачев Л. В., Яровая Е. Б., Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. *Доклады РАН* (1998) **363**, №4, 439–442.
4. Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B., Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.* (1998) **326**, №8, 975–980.
5. Albeverio S., Bogachev L. V., Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations. *Positivity* (2000) **4**, 41–100.
6. Yarovaya E. B., About limit theorems for branching symmetric random walk on $\mathbf{Z}^d$. В сб.: *Kolmogorov and Contemporary Mathematics*. МГУ, Москва, 2003, с. 592–593.
7. Яровая Е. Б., Предельная теорема для критического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с одним источником. *Успехи матем. наук* (2005) **60**, №1, 175–176.
8. Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*. ЦПИ при мех-мате МГУ, Москва, 2007.
9. Vatutin V. A., Topchii V. A., Yarovaya E. B., Catalytic branching random walk and queuing systems with random number of independent servers. *Theory Probab. Math. Stat.* (2004) **69**, 1–15.
10. Ватутин В. А., Топчий В. А., Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятностей и ее применения* (2004) **49**, №3, 461–484.
11. Vatutin V. A., Xiong J., Limit theorems for a particle system of single point catalytic branching random walks. *Acta Mathematica Sinica* (2007) **23**, №6, 997–1012.
12. Fleischmann K., Le Gall J., A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Theory Relat. Fields* (1995) **102**, 63–82.
13. Greven A., Klenke A., Wakolbinger A., The long time behavior of branching random walk in a catalytic medium. *Electron. J. Probab.* (1999) **4**, №12, 1–80.
14. Гихман И. И., Скороход А. В., *Теория случайных процессов*, **2**. Наука, Москва, 1973.
15. Красносельский М. А., *Оператор сдвига по траекториям обыкновенных дифференциальных уравнений*. Наука, Москва, 1966.
16. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. Наука, Москва, 1970.
17. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **2**. Мир, Москва, 1984.
18. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*. Наука, Москва, 1985.

Статья поступила 24.11.2007.
Переработанный вариант поступил 30.12.2008.