Л. В. Ковалев, Монотонность обобщенного приведенного модуля, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 219–236

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

Л. В. Ковалев

МОНОТОННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО ПРИВЕДЕННОГО МОДУЛЯ

Приведенный модуль открытого множества характеризует асимптотическое поведение емкостей конденсаторов или модулей семейств кривых при вырождении соответствующих объектов. В идейном плане это понятие восходит к работам Г. Грётша и О. Тейхмюллера начала 20-го века, а его систематическое использование в теории функций в сочетании с симметризационной техникой берет начало в работах У. К. Хеймана (см. [1]). Впоследствии рассматривались многочисленные разновидности приведенных модулей [2, 3]. В. Н. Дубинин [4–6] рассмотрел приведенный модуль, возникающий при стягивании пластин обобщенного конденсатора в точки по степенному закону. Эта конструкция нашла дальнейшее развитие и приложения в статьях [7–10].

Достоинством этого подхода является широта класса решаемых задач: теоремы искажения, задачи об экстремальном разбиении, неравенства для полиномов и другие. Вместе с тем следует отметить, что описания экстремальных объектов в работах [4–10] неполны либо отсутствуют. Для устранения этого недостатка необходимо решить две задачи: найти необходимые и достаточные условия сохранения приведенного модуля при расширении открытого множества и при его симметризационных преобразованиях. В настоящей статье решена первая из этих задач.

В первом параграфе вводятся обозначения и доказываются леммы вспомогательного характера. В §2 найдено необходимое и достаточное условие равенства приведенных модулей открытых множеств Ω и B, где $\Omega \subset B$ и $\mathbb{R}^n \setminus B$ неполярно. С помощью этого критерия в §3 решена аналогичная задача при условии полярности множества $\mathbb{R}^n \setminus B$. В четвертом параграфе в качестве примера приложения результатов §3 найдены экстремальные функции для теоремы искажения в классе однолистных функций, отображаю-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-01-00443) и программы "Университеты России" (грант 991282).

щих единичный круг на область с ограниченным трансфинитным диаметром, доказанной ранее В.Н. Дубининым [5].

§1. Определения. Вспомогательные результаты

1.1. Всюду ниже $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_m = \{1, \dots, m\}$, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geqslant 2$, с нормой $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ и нулевым элементом $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Через $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ обозначается одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем, если не оговорено противное, топологические термины (например, граница множества E, обозначаемая ∂E) относятся к топологии $\overline{\mathbb{R}^n}$. Введем также следующие обозначения:

$$\mathbb{R}^n_* = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & n \geqslant 3, \\ \overline{\mathbb{R}^n}, & n = 2; \end{cases} \qquad K_n(x) = \begin{cases} -x^{2-n}, & n \geqslant 3, \\ \log x, & n = 2; \end{cases}$$

$$\mathbb{U}(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon |\mathbf{x}| < r\}, \quad \mathbb{U} = \mathbb{U}(1);$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leqslant r\}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbb{E}(\infty, r) = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \mathbb{U}(1/r);$$

$$\varkappa_n = \begin{cases} \Gamma(n/2)\pi^{-n/2}(2n-4)^{-1}, & n \geqslant 3, \\ (2\pi)^{-1}, & n = 2. \end{cases}$$

Борелевское множество $E \subset \mathbb{R}^n_*$ называется полярным, если для любой конечной ненулевой борелевской меры μ на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем, лежащим в E, выполняется равенство

$$\iint K_n(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\, d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y}) = -\infty.$$

Согласно этому определению, при $n \geqslant 3$ подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$, содержащее ∞, не является полярным. О полярных множествах см. [11–13]. В дальнейшем фраза "приблизительно всюду" означает "всюду, за исключением полярного множества".

Пусть B – открытое подмножество $\mathbb{R}^n_*$, $\mathbb{R}^n \setminus B$ неполярно. Функцией Грина $g_B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ множества B с полюсом в точке $\mathbf{y} \in B$ называем наименьшую из неотрицательных гармонических в $B \setminus \{\mathbf{y}\}$ функций, имеющих при $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ асимптотическое разложение

$$g_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$
$$= \begin{cases} \log|\mathbf{x}| + \log r(B, \mathbf{y}) + o(1), & \text{если } \ n = 2 \text{ и } \mathbf{y} = \infty, \\ -K_n(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + K_n(r(B, \mathbf{y})) + o(1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Входящая в это разложение величина $r(B,\mathbf{y})$ называется гармоническим радиусом множества B относительно точки $\mathbf{y}$ [14, 15]. Существование, единственность и основные свойства функции Грина доказаны в [11, с. 267–273], 12, с. 285–286].

Пусть $B\subset\mathbb{R}^n_*$ – открытое множество, $X=(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m)$ – упорядоченный набор различных точек B, $W=(w_1,\dots,w_m)\in\mathbb{R}^m\setminus\{\mathbf{0}\}$. Обозначим

$$\mathcal{S}(B,X,W)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{m}w_k^2K_n(r(B,\mathbf{x}_k))+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l\neq k}w_kw_lg_B(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l),$$

если множество $\mathbb{R}^n\setminus B$ неполярно, и

$$\mathcal{S}(B,X,W)\stackrel{\text{def}}{=}-\sum_{k\in I}\sum_{l\in I\setminus\{k\}}w_kw_lK_n(|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l|),$$

$$I=\{k\in\mathbb{N}_m\colon\mathbf{x}_k\neq\infty\},$$

в противном случае.

Под конденсатором понимается пара $(P\,|\,\Delta)$, где $P=(E_1,\dots,E_m)$ – конечная последовательность непересекающихся непустых замкнутых подмножеств $\overline{\mathbb{R}^n}$, называемых пластинами конденсатора, $\Delta=(\delta_1,\dots,\delta_m)\in\mathbb{R}^m$. При $n\geqslant 3$ дополнительно требуем $\infty\in\bigcup\limits_{k=1}^{m}E_k$. Емкость конденсатора $C=(P\,|\,\Delta)$ равна

$$\operatorname{cap}C\stackrel{\text{def}}{=}\inf\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^2\,d\mathbf{x},$$

где нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $v\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, липшицевым в $\mathbb{R}^n$ и равным δ_k на множестве E_k, $k\in\mathbb{N}_m$. Модуль конденсатора C равен $|C|\stackrel{\text{def}}{=}(\operatorname{cap}C)^{-1}$.

Пусть $B\subset\mathbb{R}^n_*$ – открытое множество; $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m$ – различные точки B; $\Delta=(\delta_1,\dots,\delta_m)\in\mathbb{R}^m\setminus\{\mathbf{0}\}$; $\Psi=(\psi_1,\dots,\psi_m)$, где $\psi_k(r)=\mu_kr^{\nu_k}$, $\mu_k,\nu_k>0$. Обозначим

$$\nu(n,\Delta,\Psi)=\left(\sum_{k=1}^{m}\delta_k^2\mu_k^{n-2}\nu_k^{-1}\right)^{-1},$$

$$C(r;B,X,\Delta,\Psi)=$$
$$=\left((\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B,\mathbb{E}(\mathbf{x}_1,\psi_1(r)),\dots,\mathbb{E}(\mathbf{x}_m,\psi_m(r)))\,|\,(0,\delta_1,\dots,\delta_m)\right).$$

Если имеет место асимптотическое разложение

$$|C(r;B,X,\Delta,\Psi)| =$$
$$= -\varkappa_n \nu(n,\Delta,\Psi) K_n(r) + \mathcal{M}(B,X,\Delta,\Psi) + o(1), \quad r \to 0,$$

то входящая в него величина $\mathcal{M}(B,X,\Delta,\Psi)$ называется приведенным модулем множества B относительно совокупностей X, Δ и Ψ.

При $m = \delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1$ и неполярном множестве $\mathbb{R}^n \setminus B$ описанная выше конструкция хорошо известна [1, 14, 16] и нашла многочисленные приложения в теории функций. В этом случае имеет место равенство

$$\mathcal{M}(B,(\mathbf{x}),(1),(r)) = \varkappa_n K_n(r(B,\mathbf{x})),$$

являющееся частным случаем формулы

$$\mathcal{M}(B,X,\Delta,\Psi) = \alpha \mathcal{S}(B,X,(\delta_1\mu_1^{n-2}\nu_1^{-1},\dots,\delta_m\mu_m^{n-2}\nu_m^{-1})) - \alpha\beta, \quad (1)$$

$$\text{где} \quad \alpha = \varkappa_n \nu(n,\Delta,\Psi)^2; \quad \beta = 0 \text{ при } n \geqslant 3,$$

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} \delta_k^2 \nu_k^{-2} \log \mu_k \text{ при } n = 2.$$

Для $m \geqslant 1$ к настоящему времени равенство (1) доказано в следующих случаях.

1) $n = 2$, $\Delta = (1,\dots,1)$, $\mathbb{R}^2 \setminus B$ неполярно: предварительное сообщение в [17], подробное изложение – [4].
2) $n = 2$, $\mathbb{R}^2 \setminus B$ неполярно: предварительное сообщение – [6], подробное изложение – [5], дополнение для случая $0 \in \{\delta_1,\dots,\delta_m\}$ – [7].
3) $n = 2$, $\mathbb{R}^2 \setminus B$ полярно, $\sum\limits_{k=1}^{m} \delta_k \nu_k^{-1} = 0$: предварительное сообщение – [6], подробное изложение – [7].
4) $n \geqslant 3$; $\delta_k \neq 0$, $\nu_k = 1$, $k \in \mathbb{N}_m$; $\mathbb{R}^n \setminus B$ неполярно и при $\mathbf{y} \in \partial B$, $k \in \mathbb{N}_m$ выполняется $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} g_B(\mathbf{x},\mathbf{x}_k) = 0$ – [8] (отметим, что в настоящей статье нормировка функции Грина отлична от [8]).

Замечание 1. Условие $\sum\limits_{k=1}^{m} \delta_k \nu_k^{-1} = 0$ в случае 3) необходимо для существования приведенного модуля. Действительно, пусть

$\sum\limits_{k=1}^{m} \delta_k \nu_k^{-1} \neq 0$. Обозначим

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{m} \delta_k \nu_k^{-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \nu_k^{-1} \right)^{-1}; \quad \tilde{\delta}_k = \delta_k - \varepsilon, \ k \in \mathbb{N}_m; \quad \widetilde{\Delta} = (\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_m).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{\nu(2, \widetilde{\Delta}, \Psi)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_k^2}{\nu_k} - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_k}{\nu_k} + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\nu_k} =$$

$$= \frac{1}{\nu(2, \Delta, \Psi)} - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\nu_k} < \frac{1}{\nu(2, \Delta, \Psi)}.$$

Из определения емкости конденсатора вытекает равенство

$$\operatorname{cap} C(r; B, X, \widetilde{\Delta}, \Psi) = \operatorname{cap} C(r; B, X, \Delta, \Psi).$$

Так как последовательности X, $\widetilde{\Delta}$ и Ψ удовлетворяют условиям пункта 3), то имеем

$$|C(r; B, X, \Delta, \Psi)| = |C(r; B, X, \widetilde{\Delta}, \Psi)| =$$

$$= -\frac{\nu(2, \widetilde{\Delta}, \Psi)}{2\pi} \log r + o(1), \quad r \to 0.$$

С учетом (2) получаем

$$\lim_{r \to 0} \left(|C(r; B, X, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu(2, \Delta, \Psi)}{2\pi} \log r \right) = +\infty.$$

Замечание 2. Условие $\delta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_m$, в пункте 4 несущественно для справедливости формулы (1). В этом легко убедиться, повторяя рассуждения из [7, с. 77] для случая $n \geqslant 3$.

1.2. Непосредственно из определения приведенного модуля следует его монотонность:

$$\mathcal{M}(\Omega, X, \Delta, \Psi) \leqslant \mathcal{M}(B, X, \Delta, \Psi), \tag{3}$$

если $\Omega \subset B$ и приведенные модули существуют. Это свойство в сочетании с (1) и симметризационными преобразованиями [17] приводит к ряду классических и новых результатов в теории функций [4–10]. В связи с этим является актуальной задача нахождения необходимых и достаточных условий равенства в (3). Ввиду соотношения (1), в настоящей статье вместо (3) рассматривается неравенство

$$\mathcal{S}(\Omega, X, W) \leqslant \mathcal{S}(B, X, W), \tag{4}$$

справедливое при $\Omega \subset B \subset \mathbb{R}^n_*$ за исключением случая, когда $n = 2$, $\mathbb{R}^2 \backslash B$ полярно, $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ неполярно и $\sum\limits_{k=1}^{m} w_k \neq 0$ одновременно.

Действительно, при полярном множестве $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ доказывать нечего. Если $n = 2$ и не имеет места указанный исключительный случай, то неравенство (4) следует из результата (3) работы Нехари [18]. При $n \geqslant 3$ положим $\Delta = W$, $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$, где $\psi_k(r) = r$, $k = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\{\Omega_k : k \in \mathbb{N}\}$ такую последовательность открытых множеств, что $\mathbf{x}_l \in \Omega_1$ при $l \in \mathbb{N}_m$, $\overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$ и для каждого Ω_k справедливо равенство (1). Если $\mathbb{R}^n \setminus B$ неполярно, то через $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим аналогичную последовательность для B; в противном случае положим $B_k = \mathbb{U}(k)$. Нетрудно видеть, что для любого натурального k существует такое число $p(k) \geqslant k$, что $\Omega_k \subset B_{p(k)}$. Ввиду (1) и (3) имеем $\mathcal{S}(\Omega_k, X, W) \leqslant \mathcal{S}(B_{p(k)}, X, W)$. Устремляя $k \to \infty$ и учитывая равенство [8, с. 102]

$$\mathcal{S}(\mathbb{U}(\rho), X, W) = -\sum_{k=1}^{m} w_k^2 (\rho - |\mathbf{x}_k|^2/\rho)^{2-n} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \sum_{l \neq k} w_k w_l \left(|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|^{2-n} - \left| \frac{|\mathbf{x}_k|}{\rho} \mathbf{x}_l - \frac{\rho}{|\mathbf{x}_k|} \mathbf{x}_k \right|^{2-n} \right), \tag{5}$$

получим (4).

Для описания случаев равенства в (4) нам потребуются дополнительные обозначения и вспомогательные результаты. Обозначим через $\langle E \rangle$ множество связных компонент множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$; $\langle E, \mathbf{x} \rangle$ – элемент $\langle E \rangle$, содержащий точку $\mathbf{x} \in E$; $\langle E, F \rangle$ – элемент $\langle E \rangle$, содержащий связное множество $F \subset E$.

Лемма 1. *Если $D \subset G \subset \mathbb{R}^n_*$ – области и множество $\partial D \cap G$ полярно, то $G \setminus D = \partial D \cap G$. В частности, $G \setminus D$ полярно.*

Доказательство. Условие связности D и включение $D \subset G$ приводят к равенству $D = \langle G \setminus \partial D, D\rangle$. Так как хаусдорфова размерность полярного множества $\partial D \cap G$ не превосходит $n-2$ [12, с. 245], оно не разделяет n-мерную область G. Следовательно, множество $G \setminus \partial D$ связно, что влечет $D = G \setminus \partial D$. Последнее равенство равносильно $G \setminus D = \partial D \cap G$. Лемма доказана.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n_*$ – область, $\mathbb{R}^n \setminus D$ неполярно. Гармоническая мера [11, с. 133, 265] борелевского множества $E \subset \partial D$, обозначаемая $\omega_D(\mathbf{x}, E)$, равна верхней огибающей функций h, гармонических в D и удовлетворяющих условиям

$$\varlimsup_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} h(\mathbf{x}) \leqslant \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in E, \\ 0, & \mathbf{y} \in \partial D \setminus E. \end{cases}$$

При $\mathbf{x} \in D$ $\omega_D(\mathbf{x}, \cdot)$ – борелевская мера на ∂D. Так как равенства $\omega_D(\mathbf{x}, E) = 0$ равносильны при всех $\mathbf{x} \in D$, запись $\omega_D(E) = 0$ является корректной. Носитель мер $\omega_D(\mathbf{x}, \cdot)$ обозначаем через $\operatorname{supp}\omega_D$.

Покажем, что регулярные граничные точки области D (т.е., точки $\mathbf{y} \in \partial D$, для которых при $\mathbf{x}_0 \in D$ выполняется $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} g_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$) принадлежат $\operatorname{supp}\omega_D$. Действительно, если $\mathbf{y}$ – регулярная граничная точка, то для любого $r > 0$ выполняется $\omega_D(\mathbf{x}, \partial D \cap \mathbb{E}(\mathbf{y}, r)) \to 1$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ [11, с. 265]. Следовательно, $\omega_D(\partial D \cap \mathbb{E}(\mathbf{y}, r)) > 0$, что влечет $\mathbf{y} \in \operatorname{supp}\omega_D$.

Заметим, что согласно определению регулярной граничной точки для всякой неограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, граничная точка ∞ является регулярной, и потому принадлежит $\operatorname{supp}\omega_D$.

Напомним два основных результата теории потенциала, используемые в дальнейшем. Лемма Келлога [11, с. 260]: множество нерегулярных граничных точек области полярно. Обобщенный принцип максимума [11, с. 250]: ограниченная субгармоническая в области $D \subset \mathbb{R}^n_*$ функция, граничные значения которой неположительны “приблизительно всюду” на ∂D, не превосходит нуля в D.

Лемма 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n_*$ – область, $\mathbb{R}^n \setminus D$ неполярно, E – борелевское подмножество ∂D. Тогда:*

a) *Если E полярно, то $\omega_D(E) = 0$* [11, с. 266].

b) *Если E открыто относительно ∂D и $\omega_D(E)=0$, то E полярно.*

Доказательство. Если E открыто в ∂D и $\omega_D(E) = 0$, то $E \cap \operatorname{supp}\omega_D = \varnothing$. По доказанному выше, множество E не содержит регулярных граничных точек области D. Согласно лемме Келлога, оно полярно. Утверждение b) доказано.

§2. Множества с неполярным дополнением

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset B \subset \mathbb{R}^n_*$ – открытые множества, $\mathbb{R}^n \setminus B$ неполярно, $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m$ – различные точки Ω. Обозначим $W = (w_1,\dots,w_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$,*

$$E = \left\{\mathbf{x} \in B\colon \sum_{k=1}^{m} w_k g_B(\mathbf{x},\mathbf{x}_k) = 0\right\}.$$

Тогда в неравенстве (4) равенство имеет место тогда и только тогда, когда множество $B \setminus (\Omega \cup E)$ полярно.

Доказательство. Предположим, что множество $B \setminus (\Omega \cup E)$ полярно, и покажем, что в (4) имеет место равенство. Из свойств функции Грина, леммы Келлога и обобщенного принципа максимума следует равенство

$$\sum_{k=1}^{m} w_k g_\Omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_k) = \sum_{k=1}^{m} w_k g_B(\mathbf{x},\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{6}$$

Прибавляя к обеим частям (6) $w_l K_n(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_l|)$ (или $w_l \log(1/|\mathbf{x}|)$, если $\mathbf{x}_l = \infty$), переходя к пределу при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_l$, умножая на w_l и суммируя по $l \in \mathbb{N}_m$, приходим к требуемому равенству.

Предположим, что множество $B \setminus (\Omega \cup E)$ не является полярным, и покажем, что в этом случае в (4) имеет место строгое неравенство. Обозначим $G_k = \langle B \setminus E, \mathbf{x}_k\rangle$, $D_k = \langle \Omega, \mathbf{x}_k\rangle$, $k \in \mathbb{N}_m$. Из определения множества E следует $B \setminus E = \bigcup_{k=1}^{m} G_k$. Отсюда

$$B \setminus (\Omega \cup E) = \bigcup_{k=1}^{m} (G_k \setminus \Omega) \subset \bigcup_{k=1}^{m} (G_k \setminus D_k).$$

Следовательно, для некоторого $p \in \mathbb{N}_m$ множество $G_p \setminus D_p$ неполярно. Обозначим $D = D_p$, $G = G_p$. С учетом леммы 1 получаем, что $\partial D \cap G$ неполярно. В силу леммы 2, $\omega_D(\partial D \cap G) > 0$. Пусть $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{supp} \omega_D \cap G$, тогда

$$\sum_{k=1}^{m} w_k g_B(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_0) \neq 0. \tag{7}$$

Пусть $E_r = \mathbb{E}(\mathbf{y}_0, r)$, где $r > 0$ настолько мало, что выполняются условия $E_r \subset B$ и $D \setminus E_r \neq \varnothing$. Обозначим $\gamma_r = \partial D \cap E_r$, $B(r) = \langle B \setminus \gamma_r, D \rangle$. Докажем равенство

$$\partial B(r) = \gamma_r \cup \partial \langle B, \mathbf{y}_0 \rangle \tag{8}$$

Действительно, из условий $\gamma_r \subset \partial D$, $D \subset B(r)$ и $\gamma_r \cap B(r) = \varnothing$ следует, что $\gamma_r \subset \partial B(r)$. Так как $\partial B(r) \subset \partial(B \setminus \gamma_r)$, имеем

$$\partial B(r) \cap E_r = \gamma_r. \tag{9}$$

Область $\langle B, \mathbf{y}_0 \rangle \setminus E_r$ содержится в $B \setminus \gamma_r$, пересекается с D и потому содержится в $B(r)$. С другой стороны, из условия $B(r) \subset \langle B, D \rangle = \langle B, \mathbf{y}_0 \rangle$ следует $B(r) \setminus E_r \subset \langle B, \mathbf{y}_0 \rangle \setminus E_r$. Итак, $B(r) \setminus E_r = \langle B, \mathbf{y}_0 \rangle \setminus E_r$, откуда $\partial B(r) \setminus E_r = \partial \langle B, \mathbf{y}_0 \rangle$, что вместе с (9) дает (8).

Учитывая, что $\gamma_r \subset \partial B(r) \cap \partial D$ и $D \subset B(r)$, согласно принципу Карлемана имеем

$$\omega_{B(r)}(\mathbf{x}, \gamma_r) \geqslant \omega_D(\mathbf{x}, \gamma_r) > 0, \quad \mathbf{x} \in D.$$

Пусть $I = \{k \in \mathbb{N}_m \colon \mathbf{x}_k \in \langle B, \mathbf{y}_0 \rangle\}$; $c_k = g_B(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_k)$, $k \in I$; $g_r = g_B - g_{B(r)}$. Заметим, что $g_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = K_n(r(B, \mathbf{x})) - K_n(r(B(r), \mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in B(r)$. В силу непрерывности функции Грина $g_B(\mathbf{y}, \mathbf{x}_k) = c_k + o(1)$, $\mathbf{y} \in \gamma_r$, $r \downarrow 0$, $k \in I$ (здесь и ниже, оценка остаточного члена $o(1)$ равномерна по $\mathbf{x}, \mathbf{y}$). Следовательно, при $k \in I$ равенство

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}} g_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = (c_k + o(1)) \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}} \omega_{B(r)}(\mathbf{x}, \gamma_r), \quad r \downarrow 0, \tag{10}$$

выполняется “приблизительно всюду” на γ_r. Кроме того, по лемме Келлога обе части (10) обращаются в нуль “приблизительно всюду” на $\partial \langle B, \mathbf{y}_0 \rangle$. Ввиду (8), по обобщенному принципу максимума имеем

$$g_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = (c_k + o(1)) \omega_{B(r)}(\mathbf{x}, \gamma_r), \quad r \downarrow 0, \ \mathbf{x} \in B(r).$$

Обозначая $\omega_k(r) = \omega_{B(r)}(\mathbf{x}_k, \gamma_r)$, $k \in I$, находим

$$g_r(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k) = (c_k + o(1)) \omega_l(r), \quad r \downarrow 0, \ k, l \in I. \tag{11}$$

Ввиду симметричности функции Грина,

$$g_r(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k) = g_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) = (c_l + o(1))\omega_k(r), \quad r \downarrow 0,\ k, l \in I. \tag{12}$$

Выберем $j \in I$ и положим $\alpha(r) = \omega_j(r)/c_j$. Тогда из (11) и (12) получаем $\omega_l(r) = (c_l + o(1))\alpha(r)$, $r \downarrow 0$, $l \in I$. Следовательно,

$$g_r(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k) = c_k c_l \alpha(r)(1 + o(1)), \quad r \downarrow 0,\ k, l \in I.$$

Итак,

$$\mathcal{S}(B, X, W) - \mathcal{S}(B \setminus \gamma_r, X, W) = \sum_{l\in I}\sum_{k\in I} w_l w_k g_r(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k) =$$

$$= \alpha(r)(1 + o(1)) \sum_{l\in I}\sum_{k\in I} w_l w_k c_l c_k = \alpha(r)(1 + o(1)) \left(\sum_{k\in I} w_k c_k\right)^2, \quad r \downarrow 0.$$

В силу (7) при достаточно малых $r > 0$ последнее выражение положительно. Следовательно,

$$\mathcal{S}(B, X, W) > \mathcal{S}(B \setminus \gamma_r, X, W) \geqslant \mathcal{S}(\Omega, X, W).$$

Теорема доказана.

§3. Множества с полярным дополнением

Если оба множества $\mathbb{R}^n \setminus B$ и $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ полярны, то (4) обращается в равенство по определению. Остается рассмотреть случай, когда полярно ровно одно из этих множеств, а именно $\mathbb{R}^n \setminus B$. Напомним, что при этом предположении и $n = 2$ для существования приведенного модуля области B необходимо и достаточно дополнительное условие на его параметры. В статье [8] была высказана гипотеза, что при $n \geqslant 3$ необходимости в подобном условии нет. Тем не менее, в настоящее время этот вопрос остается открытым, что отражает существенное различие свойств плоских и пространственных областей с полярным дополнением до $\mathbb{R}^n$. В настоящем параграфе случаи $n = 2$ и $n \geqslant 3$ рассматриваются отдельно.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset B \subset \overline{\mathbb{R}^2}$ – открытые множества, $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ неполярно, $\mathbb{R}^2 \setminus B$ полярно, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ – различные точки Ω. Пусть $W = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, где $\sum\limits_{k=1}^{m} w_k = 0$. Обозначим*

$$I = \{k \in \mathbb{N}_m \colon \mathbf{x}_k \neq \infty\}, \quad E(\lambda) = \left\{\mathbf{x} \in B \colon \sum_{k\in I} w_k \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| = \lambda\right\}.$$

Тогда в неравенстве (4) *равенство имеет место тогда и только тогда, когда при некотором* $\lambda \in \mathbb{R}$ *множество* $B \setminus (\Omega \cup E(\lambda))$ *полярно.*

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 3 статьи [7], получаем, что при условии полярности множества $B \setminus (\Omega \cup E(\lambda))$ в (4) имеет место равенство.

Предположим, что в (4) имеет место равенство и покажем, что в этом случае существует $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого множество $B \setminus (\Omega \cup E(\lambda))$ полярно. Ввиду определения $\mathcal{S}(B, X, W)$ можно считать, что $B = \overline{\mathbb{R}^2}$. Пусть $D \in \langle\Omega\rangle$, $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{supp} \omega_D \setminus \{\infty\}$,

$$\lambda = \sum_{k \in I} w_k \log |\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_k|.$$

При $0 < r < \sup\limits_{\mathbf{x} \in D} |\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|$ положим $\gamma_r = \partial D \cap \mathbb{E}(\mathbf{y}_0, r)$ и $B(r) = \langle \overline{\mathbb{R}^2} \setminus \gamma_r, D\rangle$. Следуя доказательству соотношения (9), получаем $\partial B(r) = \gamma_r$.

Так как $\Omega \subset B(r) \subset \overline{\mathbb{R}^2}$, предположение о равенстве в (4) влечет $\mathcal{S}(\Omega, X, W) = \mathcal{S}(B(r), X, W)$. По построению имеем $\omega_D(\gamma_r) > 0$. Учитывая лемму 2 и включение $\gamma_r \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(r)$, приходим к выводу, что $\mathbb{R}^2 \setminus B(r)$ не является полярным множеством. Применяя теорему 1 к множествам Ω и $B(r)$, получаем аналог равенства (6):

$$\sum_{k=1}^{m} w_k g_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{k=1}^{m} w_k g_{B(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{13}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда при достаточно малых $r > 0$

$$\left| \sum_{k \in I} w_k \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}_k| - \lambda \right| < \varepsilon, \quad \mathbf{y} \in \gamma_r. \tag{14}$$

В дальнейшем считаем условие (14) выполненным. Рассмотрим гармоническую в $B(r)$ функцию

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} w_k g_{B(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) - \left(\lambda - \sum_{k \in I} w_k \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \right).$$

Ввиду (14), “приблизительно всюду” на γ_r имеем $\left| \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}} h(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon$. По обобщенному принципу максимума, $|h(\mathbf{x})| < \varepsilon$ при $\mathbf{x} \in B(r)$.

Используя (13) и произвольность выбора ε, приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{m} w_k g_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \lambda - \sum_{k\in I} w_k \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

С учетом леммы Келлога получаем, что множество $\partial\Omega \setminus E(\lambda)$ полярно. Применяя лемму 1 к связным компонентам множеств $\Omega \setminus E(\lambda)$ и $\overline{\mathbb{R}^2} \setminus E(\lambda)$, приходим к выводу, что $\mathbb{R}^2 \setminus (\Omega \cup E(\lambda))$ также полярно.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 3$, $\Omega \subset B \subset \mathbb{R}^n$ – открытые множества, $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ неполярно, $\mathbb{R}^n \setminus B$ полярно, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ – различные точки Ω. Обозначим $W = (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$,*

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in B : \sum_{k=1}^{m} w_k |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^{2-n} = 0 \right\}.$$

Тогда в неравенстве (4) равенство имеет место тогда и только тогда, когда множество $B \setminus (\Omega \cup E)$ полярно.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $B = \mathbb{R}^n$. Видоизменяя доказательство теоремы 3 статьи [7], получаем, что при условии полярности множества $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup E)$ в (4) имеет место равенство.

Предположим, что в (4) имеет место равенство, и покажем, что в этом случае $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup E)$ полярно. Вначале заметим, что множество Ω неограничено. Действительно, в противном случае при достаточно большом ρ выполнялось бы $\Omega \subset \mathbb{U}(\rho)$. Ввиду (4) и (5) последнее включение влечет

$$\mathcal{S}(\Omega, X, W) \leqslant \mathcal{S}(\mathbb{U}(\rho), X, W) < \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, X, W),$$

что противоречит нашему предположению. Итак, существует по крайней мере одна неограниченная связная компонента множества Ω, которую мы обозначим через D. При $0 < r < \sup_{\mathbf{x}\in D} |\mathbf{x}|^{-1}$ положим $\gamma_r = \partial D \setminus \mathbb{U}(1/r)$ и $B(r) = \langle \mathbb{R}^n \setminus \gamma_r, D\rangle$. Следуя доказательству (9), получаем $\partial B(r) = \gamma_r$. Так как $\Omega \subset B(r) \subset \mathbb{R}^n$, то наше предположение дает $\mathcal{S}(\Omega, X, W) = \mathcal{S}(B(r), X, W)$. В силу леммы 2, множество $\mathbb{R}^n \setminus B(r) \supset \gamma_r$ неполярно. Применяя теорему 1 к множествам Ω и $B(r)$, получаем (13). Пусть $\varepsilon > 0$, тогда при достаточно малых $r > 0$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} w_k |\mathbf{y} - \mathbf{x}_k|^{2-n} \right| < \varepsilon, \quad \mathbf{y} \in \gamma_r. \tag{15}$$

В дальнейшем считаем условие (15) выполненным. Рассмотрим гармоническую в $B(r)$ функцию

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} w_k \left(g_{B(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^{2-n} \right).$$

Ввиду (15), "приблизительно всюду" на γ_r имеем $\left| \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}} h(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon$. По обобщенному принципу максимума $|h(\mathbf{x})| < \varepsilon$ при $\mathbf{x} \in B(r)$. Используя (13) и произвольность выбора ε, получаем

$$\sum_{k=1}^{m} w_k g_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{k=1}^{m} w_k |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^{2-n}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

По лемме Келлога множество $\partial\Omega \setminus E$ полярно. Применяя лемму 1 к связным компонентам множеств $\Omega \setminus E$ и $\mathbb{R}^n \setminus E$, приходим к выводу, что $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup E)$ также полярно.

Теорема доказана.

§4. Приложения

Результаты §§2,3 являются основой для получения полных описаний экстремальных конфигураций во многих задачах, решаемых с привлечением обобщенных приведенных модулей. В качестве примера укажем экстремальные функции для теоремы 7 статьи [5]. Как обычно, $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ отождествляются с $\mathbb{R}^2$ и $\overline{\mathbb{R}^2}$ при помощи биекции $z \leftrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. Нам потребуется следующий результат, несколько усиливающий теорему 4 из [5].

Теорема 4. *Пусть $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ – открытое множество, содержащее точки 0 и $z_1, \ldots, z_n$, где $\arg z_k = 2\pi k/n$, $k \in \mathbb{N}_n$. Обозначим $Z = (0, z_1, \ldots, z_n)$, $W = (-n, 1, \ldots, 1)$. Тогда*

$$\exp(\mathcal{S}(B, Z, W)) \leqslant n^{-n} \prod_{k=1}^{n} |z_k|^{n+1}. \tag{16}$$

Равенство в (16) *имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие числа* $R, \lambda > 0$, *что* $|z_1| = \cdots = |z_n| = R$ *и множество* $\mathbb{C} \setminus (B \cup \{z \in \mathbb{C}\colon |1-(R/z)^n| = \lambda\})$ *полярно.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в неравенстве (11) статьи [5]

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{l \neq k} |z_k - z_l| \geqslant n^n \prod_{k=1}^{n} |z_k|^{n-1}, \quad \arg z_k = 2\pi k/n, \ k \in \mathbb{N}_n, \tag{17}$$

равенство имеет место только при $|z_1| = \cdots = |z_n|$. Действительно, как показано в [5, с. 67], левая часть (17) не меньше

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n \prod_{k=1}^{n} |z_k|^{n/2-1} \left(|z_k|^{n/2} + |z_{k+1}|^{n/2}\right), \text{ где } \ z_{n+1} = z_1.$$

Так как $|z_k|^{n/2} + |z_{k+1}|^{n/2} \geqslant 2|z_k z_{k+1}|^{n/4}$, последнее выражение не меньше правой части (17) и равно ей только при $|z_1| = \cdots = |z_n|$.

При $\lambda > 0$ обозначим $E(\lambda) = \left\{z \in \mathbb{C}\colon \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{z_k}{z}\right| = \lambda\right\}$. По теореме 2 в неравенстве

$$\exp(\mathcal{S}(B, Z, W)) \leqslant \prod_{k=1}^{n} |z_k|^{2n} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l \neq k} |z_k - z_l|^{-1}, \tag{18}$$

являющемся следствием (4), равенство имеет место тогда и только тогда, когда при некотором $\lambda > 0$ множество $\mathbb{C} \setminus (B \cup E(\lambda))$ полярно. Согласно (17), правая часть (18) не превосходит правой части (16).

Итак, для достижения равенства в (16) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $|z_1| = \cdots = |z_n|$ и множество $\mathbb{C} \setminus (B \cup E(\lambda))$ было полярным. Остается заметить, что при $|z_1| = \cdots = |z_n| = R$ имеем $E(\lambda) = \{z \in \mathbb{C}\colon |1-(R/z)^n| = \lambda\}$. Теорема доказана.

Следующее утверждение распространяет теорему 7 статьи [5] на неоднолистные функции с полным описанием случаев равенства. Через $d(E)$ обозначается трансфинитный диаметр множества E [19, с. 286].

Теорема 5. *Пусть регулярная в круге $\mathbb{U}$ функция f отображает $\mathbb{U}$ в ограниченную область D, причем $d(\overline{D}) \leqslant 1$. Предположим, что точки w_0 и $z_1, \dots, z_n$ удовлетворяют условиям $f(z_k) \neq w_0$ и*

$$\arg\left[(f(z_k) - w_0)/(f(z_1) - w_0)\right] = 2\pi(k-1)/n, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$n^n \prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)||f(z_k) - w_0|^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{l \neq k} |z_k - z_l| \prod_{l=1}^{n} |1 - z_k \bar{z}_l|^{-1} \right), \tag{19}$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$D = \{w \in \mathbb{C}\colon\ |(w - w_0)^n - \eta^n| < 1\} \tag{20}$$

и

$$f(z) = w_0 + (1 - |\eta|^{2n})^{1/n} \left(e^{i\psi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right) \times$$

$$\times \left(1 - \bar{\eta}^n \left(e^{i\psi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right)^n \right)^{-1/n}, \tag{21}$$

где $\eta, z_0 \in \mathbb{U}$ и $\psi \in \mathbb{R}$ таковы, что $e^{i\psi} \dfrac{z_k - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_k} = \eta \exp\{2\pi i(k-1)/n\}$ при $k \in \mathbb{N}_n$.

Доказательство. Обозначим правую часть (19) через M и введем следующие обозначения:

$$F(z) = 1/(f(z) - w_0), \quad B_1 = F(\mathbb{U}), \quad B_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_1},$$

$$\Phi = (0, F(z_1), \dots, F(z_n)), \quad W = (-n, 1, \dots, 1).$$

Нетрудно видеть, что $r(B_0, 0) = 1/d(\overline{D}) \geqslant 1$. Используя принцип Линделефа [19, с. 328], получаем

$$\exp(\mathcal{S}(B_0 \cup B_1, \Phi, W)) =$$

$$= r(B_0, 0)^{n^2} \prod_{k=1}^{n} r(B_1, F(z_k)) \prod_{k=1}^{n} \prod_{l \neq k} \exp\{g_{B_1}(F(z_k), F(z_l))\} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{n} |F'(z_k)|(1-|z_k|^2) \prod_{k=1}^{n} \prod_{l\neq k} \left| \frac{1-z_k\bar{z}_l}{z_k-z_l} \right| =$$

$$= M^{-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{|f'(z_k)|}{|f(z_k)-w_0|^2}. \tag{23}$$

По теореме 4

$$\exp(\mathcal{S}(B_0\cup B_1,\Phi,W)) \leqslant n^{-n} \prod_{k=1}^{n} |f(z_k)-w_0|^{-n-1}. \tag{22}$$

Из (22) и (23) немедленно следует (19). Пусть в (19) имеет место равенство. Тогда $d(\overline{D})=1$ и соотношения (22), (23) обращаются в равенства. Согласно принципу Линделефа, это возможно лишь для однолистной функции f. Ввиду теоремы 4, существуют такие числа $R,\lambda>0$ и $\theta\in\mathbb{R}$, что

$$F(z_k) = R\exp\{i(\theta-2\pi(k-1)/n)\}, \quad k\in\mathbb{N}_n, \tag{24}$$

и множество

$$\mathbb{C}\setminus\big(B_0\cup B_1\cup\{\zeta\in\mathbb{C}\colon\ |1-(Re^{i\theta}/\zeta)^n|=\lambda\}\big)$$

полярно. Учитывая, что B_1 – односвязная область, содержащая точки $F(z_k)$, получаем

$$B_1=\{\infty\}\cup\{\zeta\in\mathbb{C}\colon\ |1-(Re^{i\theta}/\zeta)^n|<\lambda\},$$

$$D=\{w\in\mathbb{C}\colon\ |1-(Re^{i\theta}(w-w_0))^n|<\lambda\},$$

где $\lambda>1$. Из равенства $d(\overline{D})=1$ следует $\lambda=R^n$. Нетрудно видеть, что при $\eta=e^{-i\theta}/R$ имеет место (20).

Заметим, что $w_0\in D$ и обозначим $z_0=f^{-1}(w_0)$. По доказанному, функция $z\mapsto(f(z)-w_0)^n-\eta^n$ является произведением Бляшке степени n с нулями в точках $z_1,\dots,z_n$ и единственной критической точкой z_0. Следовательно,

$$(f(z)-w_0)^n-\eta^n =$$

$$= \left(\left(e^{i\psi}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right)^n-\eta^n\right)\left(1-\bar{\eta}^n\left(e^{i\psi}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right)^n\right)^{-1},$$

где $\psi \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $e^{i\psi}\dfrac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} = \eta$. Отсюда немедленно следует (21). С учетом (21) и (24) получаем

$$e^{i\psi}\frac{z_k - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_k} = \eta \exp\{2\pi i(k-1)/n\} \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}_n.$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом могут быть описаны экстремальные конфигурации теоремы 11 статьи [4], теоремы 6 из [5], теорем 5 и 6 [7], теорем 2 и 3 [8], теорем 1 и 2 [9].

Литература

1. В. К. Хейман, *Многолистные функции,* М., 1960.
2. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций I,II,* Алгебра и анализ **9**, No. 3 (1997), 41–103; No. 5 (1997), 1–50.
3. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы,* Алгебра и анализ **11**, No. 1 (1999), 3–86.
4. В. Н. Дубинин, *Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля,* Сиб. мат. журн. **35**, No. 4 (1994), 774–792.
5. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.
6. В. Н. Дубинин, *Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций,* Докл. РАН **363**, No. 6 (1998), 731–734.
7. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, *Приведенный модуль комплексной сферы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 76–94.
8. В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, *Об экстремальном разбиении пространственных областей,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 95–107.
9. В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, *Приведенные модули и неравенства для полиномов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 70–83.
10. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности,* Мат. сб. (в печати).
11. У. К. Хейман, П. Б. Кеннеди, *Субгармонические функции,* М., 1980.
12. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала,* М., 1966.
13. T. Ransford, *Potential theory in the complex plane,* Cambridge Univ. Press, 1995.
14. Б. Е. Левицкий, *Приведенный p-модуль и внутренний p-гармонический радиус,* Докл. АН СССР **316**, No. 4 (1991), 812–815.
15. C. Bandle, M. Flucher, *Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouville's equations* $\Delta U = e^U$ *and* $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$, SIAM Review **38**, No. 2 (1996), 191–238.
16. Б. Е. Левицкий, И. П. Митюк, *"Узкие" теоремы о пространственных модулях,* Докл. АН СССР **248**, No. 4 (1979), 780–783.
17. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, No. 1 (1994), 3–76.

18. Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions,* Trans. Amer. Math. Soc. **75**, No. 2 (1953), 256–286.
19. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-е изд, М., 1966.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток
E-mail: lkovalev@iam-mail.febras.ru

Поступило 29 июня 2000