K. M. Mirzoev, T. A. Safonova, Representations of $\zeta(2n+1)$ and related numbers in the form of definite integrals and rapidly convergent series, *Dokl. RAN. Math. Inf. Proc. Upr.*, 2020, Volume 494, 48–52

DOI: 10.31857/S2686954320050380

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 48–52

МАТЕМАТИКА

УДК 517.521.15, 517.589

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $\zeta(2n+1)$ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ЧИСЕЛ В ВИДЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ И БЫСТРО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

 К. А. Мирзоев[1,*], Т. А. Сафонова[2,]**

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 12.07.2020 г.
Поступило 14.07.2020 г.
После доработки 14.07.2020 г.
Принято к публикации 28.07.2020 г.

Пусть $\zeta(s)$ и $\beta(s)$ – дзета-функция Римана и бета-функция Дирихле. Формулы для вычисления значений $\zeta(2m)$ и $\beta(2m-1)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ являются классическими и хорошо известны. Наша цель – представление $\zeta(2m+1)$, $\beta(2m)$ и родственных с ними чисел в виде определенных интегралов от элементарных функций и быстро сходящихся числовых рядов, содержащих $\zeta(2m)$. Метод настоящей работы, с одной стороны, позволяет единообразно доказать как формулы, уже ставшие классическими, так и формулы, полученные сравнительно недавно другими авторами, а с другой стороны – получить многочисленные новые.

Ключевые слова: интегральное представление сумм рядов, значения дзета-функции Римана в нечетных точках, значения бета-функции Дирихле в четных точках, постоянные Каталана и Апери

DOI: 10.31857/S2686954320050380

1. Пусть, как обычно, $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана. Следуя [1, гл. 23], символами $\beta(s)$, $\lambda(s)$ и $\eta(s)$ обозначим родственные с $\zeta(s)$ функции, определяемыми равенствами

$$\beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \quad \lambda(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s},$$
$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

соответственно. Хорошо известно, что эти функции аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость за возможным исключением точки $s = 1$ и

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \lambda(s) = (1-2^{-s})\zeta(s),$$
$$\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s).$$

Функцию $\beta(s)$ называют бета-функцией Дирихле, а числа $\beta(2)(= G)$ и $\zeta(3)$ – постоянными Каталана и Апери соответственно (см., например, [2, гл. 1, п.п. 1.7 и 1.6]).

Объект исследования настоящей работы – это различные представления значений функций $\beta(s)$, $\lambda(s)$, $\eta(s)$ и $\zeta(s)$ при натуральных значениях аргумента. Формулы для вычисления значений $\lambda(s)$, $\eta(s)$ и $\zeta(s)$ при $s = 2m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и формула для $\beta(s)$ при $s = 2m+1$ $(m = 0, 1, \ldots)$ являются классическими и хорошо известны (см., например, [1, гл. 23, формулы 23.2.16, 23.2.19, 23.2.20 и 23.2.22], а также [3, гл. 25]). Из этих формул немедленно следует, что числа $\beta(2m+1)$, $\lambda(2m)$, $\eta(2m)$ и $\zeta(2m)$ являются трансцендентными. С другой стороны, интегральные представления для чисел $\beta(2m)$ и $\zeta(2m+1)$, уже ставшие классическими (в терминах многочленов Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$, определяемых ниже в п. 2)

$$\beta(2m) = \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{4(2m-1)!} \int_0^1 \frac{E_{2m-1}(x)}{\cos(\pi x)} dx,$$
$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m+1} (2\pi)^{2m+1}}{2(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(x) \operatorname{ctg}(\pi x) dx \qquad (1)$$

(см., например, [1, гл. 23, формулы 23.2.17 и 23.2.23]), и сравнительно недавние для чисел $\lambda(2m+1)$ и $\eta(2m-1)$

$$\lambda(2m+1) = \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{2(2m)!} \int_0^{1/2} \frac{E_{2m}(x)}{\sin(\pi x)} dx,$$
$$\eta(2m-1) = \frac{(-1)^m (2\pi)^{2m-1}}{(2m-1)!} \int_0^{1/2} B_{2m-1}(x) \operatorname{tg}(\pi x)\, dx \qquad (2)$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия*
**E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru*
***E-mail: t.Safonova@narfu.ru*

(см. [4, теорема 1]) не позволяют судить об их арифметической природе, и об этом мало что известно (см. [5] и список цитированной литературы в ней). В частности, по этой причине отыскание различных представлений этих чисел в виде интегралов или быстро сходящихся рядов представляет особый интерес, а литература, посвященная этой тематике, весьма обширна (см. обзорную работу [6] и список литературы в ней).

Метод, предложенный авторами в работах [7–9], позволяет получить новые интегральные представления производящих функций для чисел $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$, $\eta(2m-1)$ и $\zeta(2m+1)$ $(m = 1, 2\ldots)$, а именно, доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $-1 < a < 1$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2} = \frac{1}{2a\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin ax}{\sin x}dx, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2}\left(\operatorname{tg}(a\pi/2)\int_0^{\pi/2}\frac{\sin ax}{\sin x}dx - \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos ax}{\sin x}dx\right), \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-a^2} = \frac{1}{a\sin a\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin ax}{\sin x}\right)^2 dx, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\times \left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2ax}{2a} - x\right)\frac{dx}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg} a\pi}{a}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin ax}{\sin x}\right)^2 dx\right). \tag{6}$$

Если a является правильной положительной рациональной дробью, то интегралы, стоящие в правых частях равенств (3)–(6), можно вычислить в терминах элементарных функций. Таким образом, из теоремы 1 следует, что значения производящих функций в рациональных точках для интересующих нас чисел явно вычисляются. При этом получаются аналоги и еще одно доказательство известной теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках (см., например, [3, гл. 5, формула 5.4.19], а также [10, приложения II.2]).

С другой стороны, эти же интегралы можно вычислить (уже при любом допустимом a), используя теорию гипергеометрических функций, и тем самым получить формулы для производящих функций перечисленных выше чисел в виде гипергеометрических рядов, содержащих a в качестве параметра.

В работе авторов [11] приведена формулировка части теоремы 1, а именно, сформулированы тождества (3) и (5) этой теоремы и приведен краткий обзор результатов, полученных для них указанными выше способами.

Левые части равенств (3)–(6) являются аналитическими функциями внутри единичного круга и производящими функциями для $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$, $\eta(2m-1)$ и $\zeta(2m+1)$ $(m = 1, 2\ldots)$, а точка $a = 0$, очевидно, является устранимой особой точкой правых частей этих равенств, и если их значения в этой точке трактовать как соответствующие пределы при $a \to 0$, то они также становятся регулярными аналитическими функциями внутри единичного круга. В данной работе, раскладывая левые и правые части равенств (3)–(6) из теоремы 1 в ряды Тейлора по степеням a и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получены представления чисел $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$, $\eta(2m-1)$ и $\zeta(2m+1)$ в виде определенных интегралов от некоторых элементарных функций. Из этих формул, в частности, следует, что их можно представить в виде быстро сходящихся рядов

$$\pi^{\nu(m)}\sum_{k=0}^{+\infty}A_{mk}\zeta(2k), \tag{7}$$

где $\nu(m)$ – некоторое натуральное число, а A_{mk} – некоторые рациональные числа, зависящие от m и k (см. теорему 3).

Отметим также, что метод данной работы, основанный на применении теоремы 1, позволяет единообразно доказать как уже многочисленные известные формулы, полученные другими авторами, так и получить новые.

2. Напомним, что многочлены Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$ определяются из разложений

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad \frac{2e^{tx}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t| < 2\pi$, а второе – при $|t| < \pi$, числа Бернулли B_n и числа Эйлера E_n определяются равенствами

$$B_n = B_n(0) \quad \text{и} \quad E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

соответственно (см., например, [1, п. 23, формулы 23.1.1 и 23.1.2]).

Из теоремы 1 можно извлечь, что справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. *При* $m = 1, 2, \ldots$ *справедливы следующие равенства*:

$$\beta(2m) = (-1)^m\left(\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-k)}\frac{(-1)^{k-1}\beta(2k)}{(2m-2k)!} - \frac{1}{2(2m-1)!}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2m-1}}{\sin x}dx\right), \tag{8}$$

$$\lambda(2m+1) = (-1)^m \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-k)+1} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(-1)^k \beta(2k)}{(2m-2k+1)!} + \frac{1}{2(2m)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m}}{\sin x} dx \right), \tag{9}$$

$$\eta(2m-1) = \frac{(-1)^m}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1} \pi^{2(m-k)+1} \eta(2k-1)}{(2m-2k+1)!} - \right.$$
$$\left. - \frac{2^{2m}}{2(2m)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m}}{\sin^2 x} dx \right), \tag{10}$$

$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^m 2^{2m}}{2^{2m+1} - 1} \times \tag{11}$$
$$\times \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1} \pi^{2(m-k)} \eta(2k+1)}{(2m-2k)!} + \frac{2^{2m}}{(2m+1)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m+1}}{\sin^2 x} dx \right),$$

где суммы по пустому множеству считаются равными нулю.

Следствие 2. *При $m = 1, 2, \ldots$ справедливы следующие равенства*:

$$\beta(2m) = \frac{(-1)^m \pi^{2m-1}}{2(2m-1)!} \int_0^{\pi/2} E_{2m-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right) \frac{dx}{\sin x}, \tag{12}$$

$$\lambda(2m+1) = \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{2(2m)!} \int_0^{\pi/2} E_{2m}\left(\frac{x}{\pi}\right) \frac{dx}{\sin x}, \tag{13}$$

$$\eta(2m-1) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m-1}}{(2m)!} \times$$
$$\times \int_0^{\pi/2} \left(B_{2m}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right) - B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \frac{dx}{\sin^2 x}, \tag{14}$$

$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m+1}}{(2m+2)!} \times$$
$$\times \int_0^{\pi/2} \left(B_{2m+2}\left(\frac{x}{\pi}\right) - B_{2m+2} \right) \frac{dx}{\sin^2 x}. \tag{15}$$

Отметим, что формулы (8) и (9) можно извлечь также из одного тождества Рамануджана (см. [12, entry 14, p. 261]), а формулы (10) и (11), за исключением формул для $\eta(1)$ и $\eta(3)$ (см. ниже), насколько нам известно, являются новыми, и, напротив, формулы (12)–(15) в несколько иной формулировке, а именно, в виде (1) и (2), являются известными.

Интересно заметить, что формулы для представления интегралов

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^m}{\sin^\sigma x} dx, \quad \sigma = 1, 2; \quad m = \sigma, \sigma+1, \sigma+2, \ldots \tag{16}$$

в виде сходящихся рядов (7), где $\nu(m) = m + 1 - \sigma$, A_{mk} – некоторые рациональные числа, хорошо известны (см., например, [10, гл. 2, п. 2.5.4, формулы 4 и 6]), а формулы (8)–(11) следствия 1 показывают, что эти же интегралы можно представить в виде линейной комбинации последовательностей $\beta(2k)$, $\lambda(2k+1)$ и $\eta(2k-1)$.

Приведем список формул, которые получаются из следствий 1 и 2 при $m = 1$, а для $\eta(2m-1)$ и при $m = 2$

$$G = \beta(2) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx,$$

$$\lambda(3) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{x(\pi - x)}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}\beta(2) - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin x} dx,$$

$$\eta(1) = \ln 2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin^2 x} dx,$$

$$\eta(3) = \frac{1}{6\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2(\pi^2 - 2x^2)}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^4}{\sin^2 x} dx,$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2(\pi - x)^2}{\sin^2 x} dx = \frac{2\pi^2}{7}\ln 2 - \frac{8}{21} \int_0^{\pi/2} \frac{x^3}{\sin^2 x} dx.$$

Большинство из этих формул хорошо известны и, как правило, приводятся в различных монографиях и справочниках. Например, формулы для $\beta(2)$, $\eta(1)$ и $\eta(3)$ приведены в [10, гл. 2, п. 2.5.4, формулы 5 и 7], а формула для $\lambda(3)$ следует из формулы Рамануджана, упомянутой выше. Однако, как мы уже отмечали выше, у нас все они получаются единообразно, а вторая часть формулы для $\zeta(3)$, по-видимому, является новой. Заметим также, что из формул для $\eta(3)$ и $\zeta(3)$ следует справедливость следующего интересного равенства:

$$\int_0^1 \frac{x^3(12 - 7x)}{1 - \cos \pi x} dx = \frac{16 \ln 2}{\pi^2}.$$

Кроме того, формула (9), очевидно, позволяет представить значение $\zeta(2m+1)$ в виде линейной комбинации чисел $\beta(2), \ldots, \beta(2m)$ и интеграла вида (16) с заменой числа m на $2m$ и $\sigma = 1$. Таким образом, формула (9) является обобщением хорошо известной формулы

$$2\pi\beta(2) - \frac{7}{2}\zeta(3) = \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin x} dx$$

(см. вторую формулу из приведенного выше списка).

3. Как известно (см., например, [3, формулы 4.19.4 и 4.19.6]), при $|x| < \pi$ справедливы разложения

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

и $$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Учитывая эти равенства в интегральных представлениях (8)–(15) из следствий 1 и 2, можно доказать справедливость следующих теорем.

Т е о р е м а 2. *При $m = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\beta(2m) = (-1)^m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k-1}\times\right.\\ \left.\times\frac{(-1)^{k-1}\beta(2k)}{(2m-2k)!} - \frac{1}{(2m-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2^{2n}-2)\zeta(2n)}{4^{2n}(2n+2m-1)}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\lambda(2m+1) = (-1)^m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k-1}\times\right.\\ \left.\times\frac{(-1)^{k}\beta(2k)}{(2m-2k+1)!} + \frac{1}{(2m)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2^{2n-1}-1)\zeta(2n)}{4^{2n}(n+m)}\right),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\eta(2m-1) = (-1)^m\pi^{2(m-1)}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{k-1}\eta(2k-1)}{\pi^{2(k-1)}(2m-2k+1)!}+\right.\\ \left.+\frac{2}{(2m-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{2^{2n}(2n+2m-1)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{(2^{2m+1}-1)}\left(\frac{\ln 2}{(2m)!}+\right.\\ \left.+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k(2^{2k}-1)\zeta(2k+1)}{(2\pi)^{2k}(2m-2k)!} + \frac{1}{(2m)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{2^{2n}(n+m)}\right).\end{aligned}$$

Т е о р е м а 3. *При $m = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\beta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}4}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\times\\ \times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}-1}{4^{2n}}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{kC_{2m}^{2k}E_{2(m-k)}}{2n+2k-1}\right)\zeta(2n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda(2m+1) = \frac{(-1)^m\pi^{2m}}{(2m)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2^{2n-1}-1)}{4^{2n}}\times\\ \times\left(\frac{1}{2^{2m}(n+m)} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_{2m}^{2k}(2^{2(m-k)+1}-2)B_{2(m-k)}}{2^{2k}(2k+1)(2n+2k+1)}\right)\zeta(2n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta(2m-1) = \frac{(-1)^{m-1}4\pi^{2m-2}}{(2m)!}\times\\ \times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{kC_{2m}^{2k}(2^{2(m-k)}-2)B_{2(m-k)}}{2n+2k-1}\right)\zeta(2n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{(2m)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\times\\ \times\left(\frac{1}{2^{2m}(n+m)} - \sum_{k=0}^{m}\frac{2C_{2m}^{2k}B_{2(m-k)}}{2^{2k}(2k+1)(2n+2k+1)}\right)\zeta(2n).\end{aligned}$$

Часть результатов, сформулированных нами в этих теоремах, были получены ранее другими авторами, например, формулы для $\zeta(2m+1)$ и $\eta(2m-1)$ теоремы 2 другими методами были установлены в [13] (см. также [6, формулы 58 и 59]), а формула для $\zeta(2m+1)$ теоремы 3 – в [14] (см. также [6, формула 40]). Литература, посвященная этой тематике, как мы уже отмечали выше, весьма обширна, и более полное сравнение полученных ранее результатов (см. обзорную работу [6]) с изложенными здесь, по-видимому, требует скрупулезного исследования и является темой отдельной работы. Отметим лишь, что, насколько нам известно, формулы для $\beta(2m)$ и $\lambda(2m+1)$ в теореме 2 и формулы для $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$ и $\eta(2m-1)$ в теореме 3 являются новыми.

4. В заключение приведем небольшой список формул, которые получаются из теорем 2 и 3 при малых значениях m. При этом сначала перечислим те из них, которые известны также из работ других авторов:

$$\eta(1) = \ln 2 = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{4^n(2n+1)}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{9}\ln 2 + \frac{4\pi^2}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{4^n(2n+3)} =\\ = \frac{2\pi^2}{7}\ln 2 + \frac{2\pi^2}{7}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{4^n(n+1)},\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\zeta(5) = -\frac{2\pi^4}{225}\ln 2 + \frac{2\pi^2}{15}\zeta(3) - \frac{4\pi^4}{225}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{4^n(2n+5)} =\\ = -\frac{2\pi^4}{93}\ln 2 + \frac{6\pi^2}{31}\zeta(3) - \frac{2\pi^4}{93}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{4^n(n+2)}.\end{aligned} \tag{21}$$

Формулы (19) и (20) приведены, например, в [6] (см. формулы 62, 60 и 9).

Далее, полагая $m = 1$ и $m = 2$ в формуле (17) и используя равенства (19) и (20), после некоторых элементарных преобразований получим, что

$$\begin{aligned}\beta(2) = \pi\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{4n}}\right)\frac{\zeta(2n)}{2n+1} =\\ = -\frac{\pi}{4}\ln 2 - \pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^n(2n+1)},\end{aligned} \tag{22}$$

$$\beta(4) = \frac{\pi^2}{8}\beta(2) - \frac{\pi^3}{24}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{4n}}\right)\frac{\zeta(2n)}{2n+3} =$$
$$= \frac{\pi^3}{96}\ln 2 + \frac{\pi^2}{8}\beta(2) - \frac{3\pi}{64}\zeta(3) + \frac{\pi^3}{24}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^n(2n+3)}.$$

Кроме того, при $m = 1$ из формулы (18) следует, что

$$\lambda(3) = \frac{\pi}{2}\beta(2) - \frac{\pi^2}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{4n}}\right)\frac{\zeta(2n)}{n+1}.$$

Из этого соотношения и формулы (20) можно извлечь, что

$$2\pi\beta(2) - \frac{35}{8}\zeta(3) = -\frac{\pi^2}{4}\ln 2 - \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^n(n+1)}. \quad (23)$$

Интересно отметить, что сравнение этой формулы с известной формулой Рамануджана (см. [12, example (ii), p. 269]) приводит к следующему удивительному соотношению:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!(n+1)^2} + \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^n(n+1)} = 0.$$

Если же положить $m = 2$ в формуле (18) и использовать равенства (21)–(23), то можно установить, что

$$64\pi\beta(4) - \frac{527}{4}\zeta(5) = -\frac{29\pi^4}{70}\ln 2 -$$
$$- \frac{\pi^4}{35}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(58n^2 + 203n + 139)\zeta(2n)}{16^n(2n+1)(n+1)(n+2)}.$$

Формула (23) является первой, а последнее соотношение – второй из бесконечной серии формул, связывающих $\beta(2k)$, $\zeta(2k+1)$ и суммы рядов вида (7), причем благодаря наличию множителя 16^{-n} в общем члене эти ряды довольно быстро сходятся.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 20–11–20261).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. N.Y.: Dover, 1972. 1046 p.
2. *Finch S.R.* Mathematical constants. N.Y.: Cambridge University Press, 2003. 602 p.
3. NIST Handbook of Mathematcal Functuios. N.Y.: Cambridge, 2010. 951 p.
4. *Cvijovic D., Klinowski J.* Integral Representations of the Riemann Zeta Function for Odd-Integer Arguments // J. Computational and Applied Mathematics. 2002. V. 142. P. 435–439.
5. *Зудилин В.В.* Об иррациональности значений дзета-функции Римана // Известия РАН. Серия матем. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 49–102.
6. *Srivastava H.M.* The Zeta and Related Functions: Recent Developments // J. Advanced Engineering and Computation. 2019. V. 3. № 1. P. 329–354.
7. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 500–503.
8. *Мирзоев К.А.,Сафонова Т.А.* Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 470–475.
9. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Тр. ММО. 2019. Т. 80. Вып. 2. С. 157–177.
10. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Физматлит, 2002. Т. 1. 632 с.
11. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Интегральное представление сумм некоторых рядов, связанных со специальными функциями // Матем. заметки. 2020. Т. 108. № 2. С. 632–637.
12. *Berndt B.C.* Ramanujan's Notebooks: Part I. N.Y.: Springer Verlag, 1985. 357 p.
13. *Srivastava H.M., Glasser M.L., Adamchik V.S.* Some Definite Integrals Associated with the Riemann Zeta Function // J. for Analysis and its Applications. 2000. V. 19. № 3. P. 831–846.
14. *Cvijovic D., Klinowski J.* New Rapidly Convergent Series Representations for $\zeta(2n+1)$ // Proc. Amer. Math. Society. 1997. V. 125. № 5. P. 1263–1271.

REPRESENTATIONS $\zeta(2n + 1)$ AND RELATED NUMBERS IN THE FORM DEFINITE INTEGRALS AND RAPIDLY CONVERGENT SERIES

K. A. Mirzoev[a] and T. A. Safonova[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Northern Arctic Federal University, Arkhangelsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

Let $\zeta(s)$ and $\beta(s)$ be the Riemann zeta function and the Dirichlet beta function. The formulas for calculating the values of $\zeta(2m)$ and $\beta(2m-1)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ are classical and well known. Our aim is to represent $\zeta(2m+1)$, $\beta(2m)$ and numbers related to them in the form of definite integrals of elementary functions and rapidly converging numerical series containing $\zeta(2m)$. The method of the present work, on the one hand, allows us to prove uniformly both formulas that have already become classical and formulas obtained relatively recently by others researchers, and on the other hand, to get numerous new ones.

Keywords: integral representation of series sums, values of the Riemann zeta function in odd points, values of the Dirichlet beta function in even points, Catalan and Aperi constants