Г. Н. Пазин, В. А. Тупчиев, Об условиях на разрыве обобщенных автомодельных решений квазилинейных систем,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 35–38

https://www.mathnet.ru/mzm6836

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОБ УСЛОВИЯХ НА РАЗРЫВЕ ОБОБЩЕННЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Г. Н. Пазин, В. А. Тупчиев

В заметке приводится пример, показывающий, что условия на разрыве О. А. Олейник [1], пригодные для определения допустимого обобщенного решения в скалярном случае задачи о распаде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$u(x, 0)=\begin{cases} u_r, & x>0, \\ u_l, & x\leqslant 0, \end{cases} \tag{1'}$$

не могут быть перенесены на случай гиперболической системы (1) ($\dim u = n$) без существенных дополнительных ограничений, как это сделано в работах [2], [3], в то время как сформулированные в [4] общие условия на разрыве обеспечивают построение единственного допустимого обобщенного решения задачи о распаде.

Переходим к детальной постановке вопроса. С этой целью сформулируем определение допустимого обобщенного решения задачи о распаде, изложенное в [4].

В автомодельных переменных $y = x/t$ задача Коши (1), (1′) становится краевой задачей:

$$(f_u(u) - yE)\, \mathrm{d}u/\mathrm{d}y = 0, \tag{2}$$

$$u(-\infty) = u_l,\ u(\infty) = u_r. \tag{2'}$$

Система (2) допускает два типа гладких решений: либо постоянное решение, либо $u = u_m(y)$ непостоянное, на котором выполняется тождество $\det(f_u(u) - yE) = 0$. Так как последнее уравнение удовлетворяется при $y = \rho_k(u_m(y))$, где $\rho_k(u)$ — вещественные и различные собственные значения матрицы $f_u(u)$ в силу гиперболичности системы (1), то решение его следует различать по индексу k. Решение последнего типа называют волной разрежения k-го индекса.

Определение 1. Под обобщенным решением задачи (2), (2′) будем понимать кусочно гладкую функцию $u = u(y)$, имеющую конечное число точек разрыва, удовлетворяющую в этих точках условиям Гюгонио:

$$f(u_+) - f(u_-) - y_0(u_+ - u_-) = 0, \tag{3}$$

где y_0 — точка разрыва, а u_-, u_+ — соответственно левые и правые значения функции $u(y)$ на разрыве, и удовлетворяющую также условию (2′).

Таких обобщенных решений задача (2), (2′) может иметь много. Для определения допустимого решения мы путем введения «вязкости» в систему (1) строим систему погранслоя в точке разрыва y_0, имеющую вид

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\tau = f(u) - f(u_-) - y_0(u - u_-). \tag{4}$$

При построении системы (4) мы использовали простейший вариант введения вязкости в систему (1), рассмотренный в [4].

Введем ряд понятий. Рассмотрим множество

$$Z(u_-) = \{u \mid f(u) - f(u_-) - \bar{y}(u - u_-) = 0;\ -\infty < \bar{y} < \infty;\ u, u_- \in G\},$$

где G — область гиперболичности системы (1) в пространстве u; $f(u)$ будем считать аналитической в G.

Определение 2. 1) Назовем две точки $u_1, u_2 \in Z(u_-)$ при $\bar{y} = y_0$ соседними, если они соединяются простой дугой $\widetilde{u_1 u_2} \in Z(u)$, на которой выполнено условие

$$\bar{y}(u) > y_0,\ u \neq u_1, u_2. \tag{5}$$

2) Множество точек $\{u_j\}_0^n \in Z(u_-)$ при $\bar{y} = y_0$ назовем цепочкой, если каждая пара (u_j, u_{j+1}) при $j = 0, 1, \ldots, n-1$, где $u_0 = u_-$, $u_n = u_+$, является соседней.

3) Если дуга $\widetilde{u_1 u_2} \in Z(u_-)$ при $\bar{y} = y_0$, то назовем ее особой дугой.

Определение 3. Назовем цепочку $\{u_j\}_0^n$ устойчивой, если для каждой пары $(u_j;\ u_{j+1})$ выполнено условие

$$\dim \mathfrak{M}^-(u_j) + \dim \mathfrak{M}^+(u_{j+1}) > n, \tag{6}$$

где $\mathfrak{M}^-(u_j)$, $\mathfrak{M}^+(u_{j+1})$ — соответственно неустойчивое и устойчивое инвариантные многообразия системы (4) в особых точках u_j, u_{j+1}.

Определение 4. Обобщенное решение является допустимым, если

1) либо u_- и u_+ — концы особой дуги при $\bar{y} = y_0$;

2) либо u_- и u_+ суть начальная и конечная точки устойчивой цепочки на $Z(u_-)$ при $\bar{y} = y_0$.

Определение допустимого решения в работах [2], [3] не содержит требования устойчивости цепочки и пункта 2) в определении 4, т. е. основано на условии (5), которое в скалярном случае системы (1) обычно называют условием О. А. Олейник. Возможность распространения условия (5) на системы в работах [2], [3] связана с сильными ограничениями на системы (1). Нашей целью является показать на примере системы (1), что единственность допустимого обобщенного решения теряется, если опустить требование устойчивости цепочки в определении 4.

Приступим к рассмотрению примера. Пусть

$$\dim u = 2, \qquad u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} 2v^2 + w \\ (1/5)\,v^5 - (7/6)\,v^3 + v/16 \end{pmatrix}, \qquad u_l = \begin{pmatrix} v_l \\ w_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $f_u(u)$, $\rho_1(u)$ и $\rho_2(u)$ следующие: $\rho_1(u) = 3/4 - (v-1)^2$, $\rho_2(u) = (v+1)^2 - 3/4$, и так как $\rho_2 - \rho_1 = 2v^2 + 1/2$, то система (1) гиперболична во всей плоскости $\{v, w\}$.

Множество $Z(u_l)$ задается уравнениями кривых:

$$Z^{(1)}(u_l)\colon\ w - w_l = -(v^2 - v_l^2) - (v - v_l)\sqrt{\Delta}/2,$$

$$Z^{(2)}(u_l)\colon\ w - w_l = -(v^2 - v_l^2) + (v - v_l)\sqrt{\Delta}/2,$$

где $-\infty < v < v_1$, $v > v_2$, $v_1 \approx 0{,}9$, $v_2 \approx 2{,}5$, $\Delta(v_1) = \Delta(v_2) = 0$,

$$\Delta(v) = 4\,\{(v^4 + v^3 v_l + v^2 v_l^2 + v v_l^3 + v_l^4)/5 - (v - v_l)^2/3 + (v^2 + v v_l + v_l^2)/6 + 1/16\},$$

причем на ветви $Z^{(1)}(u_l)$: $\bar{y} = (v-2) - \sqrt{\Delta}/2$, а на $Z^{(2)}(u_l)$: $\bar{y} = (v-2) + \sqrt{\Delta}/2$ волны разрежения определяются из уравнений

$$\tilde{H}^{(1)}: \frac{dw}{dv} = -\rho_2(v), \qquad \tilde{H}^{(2)}: \frac{dw}{dv} = -\rho_1(v).$$

Обозначим через $\tilde{C}^{(0)}$, $\tilde{C}^{(1)}$, $\tilde{C}^{(2)}$ участки на кривой $Z(u_l)$, на которых $\bar{y} < \rho_1(u)$, $\rho_1(u) < \bar{y} < \rho_2(u)$, $\bar{y} > \rho_2(u)$ соответственно. Очевидно, что в точках $\tilde{C}^{(k)}$ $\dim \mathfrak{M}^+ = k$, $\dim \mathfrak{M}^- = 2-k$. Легко убедиться в том, что $Z^{(1)}(u_l)$ при $-2 < v < v_1$ является участком $\tilde{C}^{(0)}$, а $Z^{(2)}(u_l)$ при $-2 < v < v_A$ представляется участком $\tilde{C}^{(2)}$, при $v_A < v < v_B$ — участком $\tilde{C}^{(1)}$ и при $v_B < v < v_1$ — участком $\tilde{C}^{(0)}$, где u_A, u_B — точки на $Z^{(2)}(u_l)$, в которых $\bar{y}(u)$ удовлетворяет условиям

$$\bar{y}(u_A) = \bar{y}(u_D) = \rho_2(u_A), \quad \bar{y}(u_B) = \rho_1(u_B).$$

На участке $\tilde{C}^{(0)}(u_D)$ кривой $Z^{(2)}(u_l)$ при $v_D < v < v_1$ и на $Z^{(1)}(u_l)$, рассматриваемой как продолжение $Z^{(2)}(u_l)$ из точки u_1 и представленной участком $\tilde{C}^{(0)}(u_l)$ при $v_l < v < v_1$, условие (5) выполняется, а условие (6) — нет. Точки $\tilde{C}^{(0)}(u_l)$ являются неустойчивыми узлами системы (4), и ударный переход в эти точки невозможен, хотя условие О. А. Олейник (5) выполнено. Если не принимать во внимание условие (6) и считать достаточным условие (5), то не только разрыв будет неустойчивым, но и возникает неединственность. Действительно, если взять $u_r \in Z^{(1)}(u_l)$, то, помимо неустойчивого ударного перехода из u_l в u_r, мы имеем другое решение, состоящее из перехода по волне разряжения из u_l в u_m и ударного перехода из u_m в $u_r \in \tilde{C}^{(2)}(u_m)$. Это же справедливо, если $u_r \in \tilde{C}^0(u_D)$ на $Z^{(1)}(u_l)$.

Обнинский филиал
Московского инженерно-физического
института

Поступило
8.XI.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Олейник О. А., О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения, Успехи матем. наук, 14, № 2 (1959), 165—170.

[2] Liu T. P., Rieman problem for general 2 × 2 conservation laws, Trans. Amer. Math. Soc., 199 (1974), 84—112.

[3] Liu T. P., Rieman problem for general systems of conservation laws, J. Differential Equations, 18 (1975), 218—234.

[4] Тупчиев В. А., О методе введения вязкости в изучении задачи о распаде разрыва, Докл. АН СССР, 211, № 1 (1973), 55—58.