Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 78—79.

УДК 517.8

О НУЛЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ АБЕЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

Ю. С. Ильяшенко

Нижеследующие результаты позволяют подсчитать число предельных циклов, рождающихся при специальном возмущении из замкнутых фазовых кривых некоторых гамильтоновых систем, что, в свою очередь, необходимо для изучения бифуркаций особых точек эквивариантных векторных полей на плоскости R^2 [1].

1. Обозначения. А. $j = 1, 2, 3$. Б. G_j — группа вращений R^2 порядка j. В. $H_j \in R[z, w]$ — G_j-инвариантный многочлен с морсовскими критическими точками и ровно двумя критическими значениями c_0, c_1. Г. $i = 0; 1$; $\bar{i} = i + 1 \pmod 2$.

Аффинными преобразованиями в образе и R-линейными в прообразе многочлен H_j приводится к одной из нормальных форм: $H_1 = w^2 + 3z - z^3$, H_2 — один из многочленов $\pm w^2 \pm 2z^2 + z^4$ (знаки независимые), $H_3 = z^3 - 3zw^2 + 2(z^2 + w^2)$. Д. $\theta_0 = wdz$, $\theta_1 = zwdz$, $\theta_2 = z^2wdz$, $\theta_3 = (z^2w + w^2/3)\,dz$. Формы $d\theta_0$ и $d\theta_j$ G_j-инвариантны. Е. $\varphi_c^j = \{H_j = c\} \subset \mathbf{C}^2$. Ж. l_j — овал многочлена H_j, т. е. гомеоморфная окружности компонента пересечения $\varphi_j^c \cap R^2$. З. $\{l_j(c)\}$ — семейство всех овалов многочлена H_j, получаемых из l_j непрерывной деформацией; σ_{l_j} — соответствующий интервал оси c; интервал σ_{l_j} не содержит критических значений (см. таблицу раздела 9). И. $H_1(\varphi_c^j)$ — группа целочисленных гомологий с компактными носителями. К. $\gamma \in R$, $\omega_j = \gamma\theta_0 - \theta_j$. Л. Если $l \in H_1(\varphi_c^j)$ и ω — 1-форма, то $(l, \omega) = \int_l \omega$; $(\omega_j, l_j(c))$ — основной интеграл.

2. Теорема. *При любом фиксированном $\gamma \in R$ основной интеграл имеет на интервале σ_{l_j} не более одного нуля, если цикл l_j — исчезающий; не более двух нулей, если цикл l_j — не исчезающий; в последнем случае для всех γ из некоторого непустого интервала основной интеграл имеет на σ_{l_j} ровно два нуля.*

3. Лемма. *Существует ровно одна точка $(c_0, \gamma_0) \in \bar{\sigma}_{l_j} \times R$, в которой основной интеграл имеет двукратный нуль по c. Если цикл l_j — исчезающий, то соответствующее критическое значение и есть c_0; в противном случае $c_0 \in \sigma_l$.*

Теорема легко следует из леммы, доказательству которой посвящены разделы 4—9. Всюду в дальнейшем значение j и многочлен H_j фиксированы, и индекс j опускается.

4. Фактор-гомологии и фактор-монодромия. Пусть $\tilde{\varphi}_c = \varphi_c/G$, π — естественный гомоморфизм $H_1(\varphi_c) \to H_1(\tilde{\varphi}_c)$. Положим $\pi\gamma = \tilde{\gamma}$.

Исчезающие циклы образуют базис в группе гомологий $H_1(\varphi_c)$ (см. [2]); пусть $\delta_i(c)$ — произвольный цикл, исчезающий в точке P: $H(P) = c_i$. В силу условия 1В, циклы $\tilde{\delta}_0(c)$ и $\tilde{\delta}_1(c)$ образуют базис в группе $H_1(\tilde{\varphi}_c)$. Поэтому $\tilde{l}(c) = A\tilde{\delta}_0(c) + B\tilde{\delta}_1(c)$, причем A и B — целые, не зависящие от c. (Мы предполагаем, что циклы $\delta_i(c)$ зависят от c непрерывно, поэтому A и B — непрерывные целочисленные функции.) Нумерацию точек c_i выберем так, что $A \neq 0$.

Группа $H_1(\varphi_c)$ при обходе критического значения испытывает преобразование монодромии, описываемое теоремой Пикара — Лефшеца. В силу G-инвариантности многочлена H, это преобразование уважает проектирование π; поэтому обходу точки c_i соответствует корректно определенное преобразование «фактор-монодромии» $\tilde{T}_i$: $\tilde{\delta}_i \mapsto \tilde{\delta}_i$, $\tilde{\delta}_{\bar{i}} \mapsto \tilde{\delta}_{\bar{i}} + a_i\tilde{\delta}_i$.

5. Предложение. *При всех $c \in \sigma_l$ форма $\omega \mid \varphi_c$ не точна.*

Доказательство. Пусть $j = 1$, $b \in H_1(\varphi_c)$. Положим $M_b(c) = (\theta, b(c))/(\theta_0, b(c))$. Простые геометрические соображения показывают, что «момент» $M_l(c)$ отрицателен при $c \in \sigma_l$. Но $\delta_1(c) = \mathcal{J}\delta_0(-c)$, где $\mathcal{J}(z, w) = (-z, iw)$ и $\mathcal{J}_*\theta_0 = i\theta_0$, $\mathcal{J}_*\theta_1 = -i\theta_1$. Поэтому момент $M_{\delta_1}(c)$ при $c \in \sigma_l$ положителен; следовательно, интегралы $(\omega, l(c))$ и $(\omega, \delta_1(c))$ при $c \in \sigma_l$ одновременно в нуль не обращаются. Сходные рассуждения проходят при $j = 2$. Пусть $j = 3$. Легко доказать, что для любого некритического c размерность пространства G-инвариантных точных форм на φ_c совпадает с размерностью пространства непостоянных ограничений на φ_c G-инвариантных многочленов степени не выше 4 и равна 3. Отсюда следует, что если форма $\omega|\varphi_c$ точна, то $\omega|\varphi_c = dR|\varphi_c$, где R — G-инвариантный многочлен степени не выше 4; элементарные вычисления показывают, что это невозможно.

6. Основной определитель — это определитель Вронского функций $(\omega, \delta_0(c))$ и $(\omega, \delta_1(c))$; обозначается он через $W(c, \gamma)$.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Функциональный анализ и его приложения», 1977

Предложение. *$W(c, \gamma) = a(\gamma)c - b(\gamma)$, где a и b — многочлены степени 1 и 2 соответственно.*

Доказательство этого предложения для $j = 1$ проведено в [3] (§ 3 Н) с помощью прямых вычислений и проводится аналогично для $j = 2$; 3. Заметим здесь, что основной определитель однозначен, поскольку преобразования фактор-монодромии унимодулярны.

7. Нули основного определителя. Нас интересуют точки (c, γ), в которых обращается в нуль первый столбец определителя Вронского $W_l(c, \gamma)$ функций $(\omega, l(c))$ и $(\omega, \delta_1(c))$; в силу рассуждений раздела 4, $W_l(c, \gamma) = AW(c, \gamma)$, $A \neq 0$.

Предложение. *Система $(\omega, l(c)) = W(c, \gamma) = 0$ эквивалентна на $\sigma_l \times R$ системе $(\omega, l(c)) = (\omega, l(c))' = 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть (c, γ) — решение первой системы, не удовлетворяющее второй. Тогда $(\omega, l(c)) = (\omega, \delta_1(c)) = 0$. В силу G-инвариантности рассматриваемых интегралов, $(\omega, \delta_k(c)) = 0$ для всех исчезающих циклов $\delta_k(c) \in H_1(\varphi_c)$. Следовательно, форма $\omega \mid \varphi_c$ точна. Пришли к противоречию.

8. Заключительные соображения. Рассмотрим на плоскости (c, γ) кривые $\Gamma_1 = \{W(c, \gamma) = 0\} = \{c = b(\gamma)/a(\gamma)\}$ и $\Gamma_2 = \{\gamma = M_l(c) \overset{\text{def}}{=} (\theta, l(c))/(\theta_0, l(c)), c \in \sigma_l\}$. Кривая Γ_1 состоит из двух компонент — это гипербола с горизонтальной (параллельной оси c) асимптотой в силу предложения 6. Кривая Γ_2 связна. Заметим, что система $\gamma = M_l(c)$, $M_l'(c) = 0$ эквивалентна системе $(\omega, l(c)) = (\omega, l(c))' = 0$. Поэтому в каждой точке пересечения Γ_1 с Γ_2 касательная к кривой Γ_2 горизонтальна. Следовательно, кривая Γ_2 имеет не более одной общей точки с каждой из компонент кривой Γ_1. Этой оценки еще не достаточно для доказательства леммы. Очевидно следующее

Предложение. *Функция $M_l(c)$ непрерывно продолжается на $\partial\sigma_l$. Пусть цикл $l(c)$ исчезает в точке с критическим значением c_i. Тогда $p \overset{\text{def}}{=} (c_i, M_l(c_i)) \in \partial\Gamma_2 \cap \Gamma_1$, т. е. $W_l(p) = 0$; касательная к $p \cup \Gamma_2$ в точке p существует и горизонтальна.*

Кривая Γ_1 делит плоскость (c, γ) на три области Ω_k. Если выполнено условие (*): «цикл $l(c)$ — исчезающий, и точки кривой Γ_2, близкие к p, расположены в области Ω_k, свободной от точек кривой Γ_1», то $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$.

9. Вычисления. В следующей таблице перечислены все овалы многочленов H_j; условие (*) выполнено во всех случаях, кроме 4-го и 5-го; оно легко проверяется, если известны σ_l, p и $\Gamma_1 = \{c = f(\gamma)\}$, где $f(\gamma) = b(\gamma)/a(\gamma)$.

№	j	H_j	c_0	c_1	$\tilde{l}(c)$	p'	σ_l	$f(\gamma)$
1	1	$w^2 + 3z - z^3$	-2	2	$\tilde{\delta}_0(c)$	$(-2, -1)$	$(-2, 2)$	$(7\gamma^2 - 1)/3\gamma$
2	2	$w^2 - 2z^2 + z^4$	-1	0	$\delta_0(c)$	$(-1, 1)$	$(-1, 0)$	$(5\gamma^2 - 4\gamma)/(-2\gamma + 1)$
3	2	$-w^2 - 2z^2 + z^4$	0	-1	$\tilde{\delta}_0(c)$	$(0, 0)$	$(-1, 0)$	$(5\gamma^2 - 4\gamma)/(-2\gamma + 1)$
4	2	$w^2 - 2z^2 + z^4$	-1	0	$2\tilde{\delta}_0(c) + \tilde{\delta}_1(c)$	ϕ	$(0, \infty)$	$(5\gamma^2 - 4\gamma)/(-2\gamma + 1)$
5	2	$w^2 + 2z^2 + z^4$	0	-1	$\tilde{\delta}_0(c)$	$(0, 0)$	$(0, \infty)$	$(5\gamma^2 + 4\gamma)/(2\gamma + 1)$
6	3	$2z^3 - 6zw^2 + 3(z^2 + w^2)$	0	1	$\tilde{\delta}_0(c)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(4\gamma^2 - 3\gamma)/(3\gamma - 2)$

Многочлен $-w^2 + 2z^2 + z^4$ овалов не имеет. В 4-м и 5-м случаях кривая Γ_2 целиком расположена в первой четверти, с которой пересекается только одна компонента кривой Γ_1. Поэтому в обоих случаях пересечение $\bar{\Gamma}_2 \cap \Gamma_1$ состоит не более чем из одной точки. В 5-м случае это точка $p = (0, 0)$, и $\Gamma_2 \cap \Gamma_1 = \phi$. Наконец, в 4-м случае простые геометрические соображения показывают, что в окрестности точки $c = 0$ функция $M_l(c)$ убывает, а при $c \to \infty$ растет; следовательно, существует точка c_0, где $M_l'(c_0) = 0$. Лемма полностью доказана.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 15 декабря 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Функц. анализ 11, вып. 2 (1977), 1—10. 2. Жиженко А. Б., Изв. АН СССР, серия матем. 25 (1961), 765—788. 3. Ильяшенко Ю. С., Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 3 (1977), 49—60.