Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 2

УДК 517.9+539.214 МАТЕМАТИКА

П. П. ЗАБРЕЙКО, М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, Е. А. ЛИФШИЦ

ОСЦИЛЛЯТОР НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ЭЛЕМЕНТЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 23 IV 1969)

1. В настоящей статье изучается уравнение колебаний материальной точки на одномерном упруго-пластическом элементе.

Через $x(t)$ будем обозначать переменную координату колеблющейся точки N массы m. Пусть в момент времени t на точку N действуют следующие силы: переменная внешняя сила $f(t)$, сила трения, напряжение упругого элемента (которое определяется по закону Гука) и напряжение Φ упруго-пластического элемента. Уравнение движения точки N запишется тогда в виде

$$m\, d^2x / dt^2 + b\, dx / dt + Ex + \Phi = f(t). \tag{1}$$

Мы будем пользоваться обобщенной моделью Прагера — Ишлинского упруго-пластического тела (ниже применяются обозначения и понятия из ([1])). Тогда напряжение упруго-пластического элемента определится формулой

$$\Phi = \int\limits_M F\{\alpha, \Gamma[x, l_-(\alpha), l_+(\alpha), l_0(\alpha)](t)\}\, d\mu(\alpha), \tag{2}$$

где $\Gamma[x, l_-, l_+, l_0]$ — оператор гистерант; $F(\alpha, l)$ — функция, которая характеризует напряжение инфинитезимального элемента упруго-пластического тела, а μ — некоторая мера (описывающая распределение модуля упругости по параметру α).

Ограничимся анализом движения точки N в условиях, когда состояние $l(\alpha) \equiv 0$ соответствует ненапряженному состоянию упруго-пластического тела; будем предполагать, что в пределах допустимых растяжений и сжатий инфинитезимальные элементы упруго-пластического тела подчиняются закону Гука. Тогда

$$\Phi = \int\limits_M \Gamma[x, l_-(\alpha), l_+(\alpha), l_0(\alpha)](t)\, d\mu(\alpha). \tag{3}$$

Приводимые ниже теоремы сохраняют силу и в случае, когда Φ определяется общей формулой (2), если предполагать, что нелинейная функция $F(\alpha, l)$ удовлетворяет по переменной l условию Липшица.

Итак, нас будут интересовать решения уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Ex + \int\limits_M \Gamma[x, l_-(\alpha), l_+(\alpha), l_0(\alpha)](t)\, d\mu(\alpha) = f(t). \tag{4}$$

2. Теорема 1. *Пусть суммарный модуль упругости пластического элемента конечен:*

$$\mu(M) = \int\limits_M d\mu(\alpha) < \infty. \tag{5}$$

Тогда уравнение (4) *при любом суммируемом начальном состоянии* $l_0(\alpha)$ *и при любом начальном условии*

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{6}$$

имеет единственное решение, определенное на промежутке $[0, \infty)$.

Доказательство этой теоремы легко получить при помощи принципа сжатых отображений, если перейти к соответствующему интегральному уравнению, а затем воспользоваться, с одной стороны, тем, что гистерант удовлетворяет условию Липшица, и, с другой стороны, легко доказываемым неравенством

$$|l_0(\alpha) - \Gamma[x, l_-(a), l_+(\alpha), l_0(\alpha)](t)| \leqslant \max_{0\leqslant\tau;\, s\leqslant t} |x(\tau) - x(s)|.$$

3. Функцию $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ называют асимптотически периодической с периодом ω, если существует такая ω-периодическая непрерывная функция $y(t)$, что

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0. \tag{7}$$

Функцию $x(t)$ называют асимптотически почти периодической, если из каждой последовательности h_n положительных чисел можно выбрать такую подпоследовательность $h_{n(i)}$, что последовательность функций $x(t + h_{n(i)})$ $(0 \leqslant t < \infty)$ сходится равномерно на промежутке $[0, \infty)$. Асимптотически почти периодические функции $x(t)$ в равномерной норме

$$\|x(t)\| = \sup_{0\leqslant t<\infty} |x(t)| \tag{8}$$

образуют банахово пространство B. Асимптотически периодические с периодом ω функции образуют подпространство B_ω пространства B.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (5) *и пусть начальное состояние* $l_0(\alpha)$ *суммируемо.*

Тогда нелинейный оператор

$$\Pi x(t) = \int_M \Gamma[x, l_-(\alpha), l_+(\alpha), l_0(\alpha)](t)\, d\mu(\alpha) \tag{9}$$

преобразует в себя пространство B *и удовлетворяет на нем условию Липшица с постоянной* $2\mu(M)$:

$$\|\Pi x - \Pi y\| \leqslant 2\mu(M)\|x - y\| \qquad (x, y \in B).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.

Тогда оператор (9) *оставляет инвариантным каждое подпространство* $B_\omega \subset B$ *асимптотически периодических функций с периодом* ω.

4. Последние две теоремы позволяют дать общее описание колебаний осциллятора на упруго-пластическом элементе в случае периодических, асимптотически периодических, почти периодических и асимптотически почти периодических внешних сил $f(t)$. Такое описание удалось получить в предположении, что суммарный модуль $\mu(M)$ упругости не слишком велик. В приводимых ниже теоремах, как и выше, предполагается, что начальное состояние $l_0(\alpha)$ суммируемо.

Теорема 4. *Пусть внешняя сила* $f(t)$ *асимптотически периодическая с периодом* ω.

Тогда при достаточно малых суммарных модулях упругости $\mu(M)$ *каждое решение уравнения* (4) *является асимптотически периодической функцией с тем же периодом* ω.

Теорема 5. *Пусть внешняя сила* $f(t)$ *асимптотически почти периодическая.*

Тогда при достаточно малых суммарных модулях упругости $\mu(M)$ *каждое решение уравнения* (4) *является асимптотически почти периодической функцией.*

В случае обычного осциллятора (линейного осциллятора на чисто упругом элементе) при наличии трения колебания, как хорошо известно, асимптотически устойчивы в целом. Возникает естественный вопрос о том,

имеет ли место такое же явление в случае осциллятора на упруго-пластическом элементе. Ответ отрицательный. Имеет место лишь обычная устойчивость по Ляпунову как по отношению к возмущениям начальных данных, так и по отношению к возмущениям начальных состояний пластического элемента. Приведем в качестве примера одно утверждение.

Теорема 6. *Пусть возмущающая сила $f(t)$ ограничена на промежутке $[0, \infty)$.*

Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $\mu(M) < \mu_0$ каждое решение уравнения (4) ограничено и устойчиво по Ляпунову.

5. Остановимся более подробно на случае, когда возмущающая сила $f(t)$ периодическая. По аналогии с нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (и в связи с теоремой 4) можно было бы ожидать, что при любом фиксированном начальном состоянии $l_0(\alpha)$ упруго-пластического элемента можно найти такие начальные условия, при которых осциллятор совершает периодические колебания с тем же периодом. Оказывается, что такая гипотеза неверна. Однако при некоторых начальных состояниях могут быть указаны начальные условия, которым соответствуют периодические решения.

Теорема 7. *Пусть заданы начальное состояние $l_0(\alpha)$ упруго-пластического элемента и ω-периодическая возмущающая сила $f(t)$. Пусть $x(t)$ — асимптотически периодическое с периодом ω решение уравнения (4). Пусть $y(t)$ — такая ω-периодическая функция, что*

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

Тогда найдется такое начальное состояние $l_0^*(\alpha)$ упруго-пластического тела, при котором осциллятор совершает ω-периодические колебания $y(t)$.

Начальное состояние $l_0^*(\alpha)$ в условиях теоремы 3 конструируется совсем просто. Вначале определяется функция

$$l(\alpha;\ t) = \Gamma[x,\ l_-(\alpha),\ l_+(\alpha),\ l_0(\alpha)](t).$$

Эта функция оказывается асимптотически периодической по переменной t с периодом ω. Поэтому последовательность функций $l(\alpha, n\omega)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится. Функцию $l_0^*(\alpha)$ нужно определить равенством

$$l_0^*(\alpha) = \lim_{n\to\infty} l(\alpha, n\omega).$$

6. Приведенные выше теоремы являются простейшими примерами утверждений качественной теории дифференциально-гистерантных уравнений. По-видимому, на такие уравнения удастся распространить многие другие теоремы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциально-гистерантные уравнения являются частным классом уравнений с вольтерровскими операторами; однако их теория должна оказаться существенно менее сложной, так как оператор гистерант обладает (см. ([1])) рядом важных дополнительных свойств.

Отметим, что численное решение дифференциальных уравнений с гистерантными членами нисколько не сложнее численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Укажем еще, что функции $l_-(\alpha)$, $l_+(\alpha)$ и мера $\mu(M)$, определяющие пластическое тело, могут быть определены экспериментально.

Авторы выражают благодарность Б. М. Даринскому и А. Ю. Ишлинскому за обсуждение полученных результатов.

Воронежский государственный университет
Институт автоматики и телемеханики
(технической кибернетики)
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 IV 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, В. М. Даринский и др., ДАН, 190, № 1 (1970).