



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. S. Ilyashenko, Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1984, Volume 18, Issue 3, 32–42

<https://www.mathnet.ru/eng/faa1472>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

April 28, 2025, 01:51:22



УДК 517.9+517.5

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

Ю. С. И л ь я ш е н к о

§ 1. Введение

1.1. Основные результаты.

Т е о р е м а 1. *Полиномиальное векторное поле на вещественной плоскости, все особые точки которого, включая бесконечно удаленные, невырождены, имеет лишь конечное число предельных циклов.*

Эта теорема доказывает следующее утверждение из первой части мемуара Дюлака [1], § 23: «В окрестности C_0 (C_0 — сложный цикл (см. определение ниже), содержащий только невырожденные особые точки) существует кольцевая область A , ограниченная с одной стороны циклом C_0 , такая, что в ней возможен только один из следующих случаев:

1. В области A нет ни одной замкнутой характеристики.
2. Все характеристики, проходящие в A , — циклы».

Как известно [3], доказательство этого утверждения в мемуаре [1] содержит пробел. Из теоремы 1 следует также гипотеза Сотомайора и Патерлини [8]:

В пространстве полиномиальных векторных полей степени не выше n на \mathbf{R}^2 существует собственное алгебраическое подмногообразие, дополнение к которому состоит из полей, имеющих лишь конечное число предельных циклов.

Эта гипотеза доказана в [8] для $n = 2$.

Т е о р е м а 2. *Аналитическое векторное поле с конечным числом невырожденных особых точек на замкнутой аналитической двумерной поверхности имеет лишь конечное число предельных циклов.*

Теорема 1 выводится из теоремы 2 для сферы с помощью хорошо известных рассуждений Пуанкаре [6]. Теорема 2 доказывается с помощью исследования окрестности так называемого сложного цикла.

О п р е д е л е н и е. Сложным циклом векторного поля называется связанное объединение конечного непустого множества особых точек этого

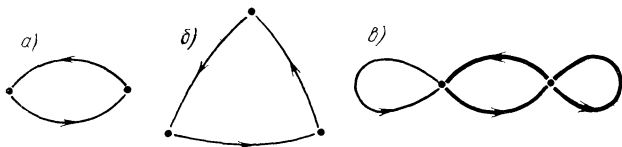


Рис. 1. Сложные циклы.

поля и конечного числа фазовых кривых, идущих из одной особой точки этого множества в другую, причем сложный цикл не стягивается по себе ни в какое свое собственное подмногообразие.

Примеры сложных циклов изображены на рис. 1.

Преобразование монодромии сложного цикла определяется так же, как преобразование монодромии замкнутой фазовой кривой, только вместо трансверсали используется полутрансверсаль — гомеоморфный образ полуинтервала с вершиной на сложном цикле, гладкий и трансверсальный полю всюду вне вершины (рис. 2).

Сложный цикл с невырожденными особыми точками, не допускающий преобразования монодромии, показан на рис. 1 жирной линией. Сложный цикл, допускающий преобразование монодромии, называется монодромным.

Т е о р е м а 3. *К сложному циклу аналитического векторного поля на вещественно двумерной поверхности, содержащему только невырожденные особые точки, не могут накапливаться предельные циклы этого поля.*

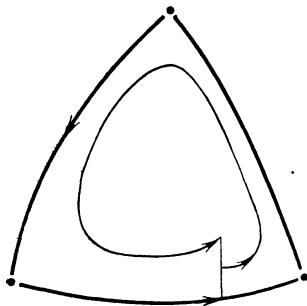


Рис. 2. Преобразование монодромии сложного цикла.

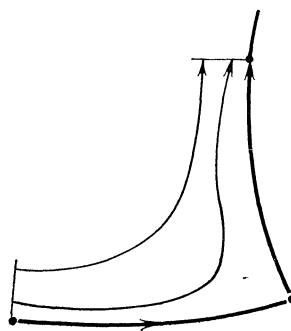


Рис. 3. Отображение соответствия.

Вывод теоремы 2 из теоремы 3 проводится с помощью теоремы Пуанкаре — Бендиксона, как это сделано в [1]. Если к сложному циклу накапливаются предельные, то этот цикл монодромный. Если сложный цикл в теореме 3 одноточечный, то соответствующая особая точка монодромна и невырождена и, следовательно, является центром по линейным членам. Теорема 3 в этом случае следует из классических результатов [5, 6]. Всюду в дальнейшем считаем, что сложный цикл в теореме 3 неодноточечный. Поскольку он монодромный, каждая особая точка на цикле имеет гиперболический сектор (рис. 3), и все эти особые точки — седла в силу невырожденности.

Обозначим через A класс аналитических векторных полей на вещественно двумерных, не обязательно замкнутых, аналитических поверхностях, и через S множество сложных циклов таких полей, содержащих только невырожденные седла и допускающих преобразование монодромии. В теореме 3 рассматриваются сложные циклы класса S .

1.2. Вспомогательные результаты. Хотя мемуар [1] посвящен аналитическим векторным полям, основной доказанный в [1] результат обобщается на бесконечно гладкие векторные поля и может быть сформулирован следующим образом.

Обобщенная теорема Дюлака. *Если последовательность предельных циклов бесконечно гладкого векторного поля с особыми точками конечной кратности сходится к сложному циклу этого поля, то полутрансверсаль к этому циклу можно выбрать так, что соответствующее преобразование монодромии будет отличаться от тождественного преобразования на плоский в вершине добавок¹). Если все особые точки на цикле — невырожденные седла, то полутрансверсаль можно строить, как половину любой бесконечно гладкой трансверсали в неособой точке к сложному циклу.*

¹ Функция называется плоской в вершине полуинтервала $[0, \varepsilon)$, если она бесконечно гладко продолжается нулем в окрестность точки 0 на прямой. Изложению мемуара [1] и доказательству обобщенной теоремы Дюлака будет посвящена другая статья.

З а м е ч а н и е. Векторные поля класса A , удовлетворяющие условию этой теоремы, разумеется, существуют. Теорема показывает, в частности, что преобразование монодромии соответствующих сложных циклов не может иметь вид $x \mapsto x + O(x^N) \sin 1/x$.

Назовем полутрансверсаль к сложному циклу аналитической, если она принадлежит аналитической трансверсали к циклу в неособой точке.

В этой работе доказана

О с н о в н а я л е м м а 1. *Если преобразование монодромии для аналитической полутрансверсали сложного цикла класса S отличается от тождественного на плоский в вершине добавок, то оно тождественно.*

Теорема 3 следует из обобщенной теоремы Дюлака и основной леммы 1.

1.3. Дополнительные результаты. В работе [1] построены асимптотические ряды для преобразований монодромии сложных циклов. Следующая теорема показывает, что эти ряды могут иногда сходиться не к преобразованию монодромии (в случае общего положения, когда особые точки поля нерезонансны, эти ряды всегда сходятся к преобразованию монодромии [4]).

Т е о р е м а 4. *Существуют поля класса A , имеющие сложный цикл (двуугольник с вырожденными особыми точками типа седло-узел), причем соответствующее этому циклу преобразование монодромии — тождественное плюс ненулевой плоский в вершине полутрансверсали добавок.*

З а м е ч а н и е. Аналогичный пример для аналитических векторных полей в области на плоскости построен недавно С. Трифиновым.

1.4. Проблемы. Общая теорема конечности для полиномиальных векторных полей, а также теорема 2 без каких-либо условий на особые точки (число которых все-таки должно быть конечно) будет доказана, если получить следующее обобщение теоремы 3.

Г и п о т е з а. *К сложному циклу векторного поля класса A , содержащему только элементарные особые точки ¹⁾, не могут накапливаться предельные циклы этого поля.*

Редукция имеются у Дюлака [1]. Теорема 4 показывает, что с этой гипотезой связаны новые принципиальные трудности.

Аналог теоремы 4 интересно получить для полиномиальных векторных полей.

Г и п о т е з а. *Рассмотрим уравнение класса A , имеющее только невырожденные особые точки, и его конечно-параметрическую деформацию. Тогда существует такая окрестность исходного уравнения в этом семействе и такое N , что каждое уравнение из этой окрестности имеет не более чем N предельных циклов с учетом кратности.*

С л е д с т в и е. *Для любого компакта в пространстве полиномиальных векторных полей степени не выше n на вещественной плоскости, имеющих только невырожденные особые точки, включая бесконечно удаленные, существует такое N , что каждое поле из компакта имеет не более N предельных циклов с учетом кратности.*

Эта работа является продолжением исследований И. Г. Петровского и Е. М. Ландиса по аналитической теории дифференциальных уравнений. Я посвящаю ее

светлой памяти *Ивана Георгиевича Петровского,*
Евгению Михайловичу Ландису, моему учителю.

§ 2. Выход в комплексную область

2.1. Схема доказательства основной леммы 1. Пусть Γ — сложный цикл класса S (с невырожденными особыми точками), p — произвольная неособая точка на Γ . Фиксируем локальную карту в точке p и отождествим

¹⁾ Так называются особые точки векторного поля, линеаризация которого в этих точках имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение.

окрестность точки p с подобластью плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть Δ_γ — преобразование монодромии сложного цикла γ , определенное на полуинтервале Γ с вершиной p , принадлежащем прямой, трансверсальной γ . Рассмотрим на соответствующей комплексной прямой диск D с центром p и радиусом Γ . Доказательство основной леммы использует продолжение преобразования монодромии в комплексную область. Это продолжение, как правило, имеет логарифмическую точку ветвления p ; поэтому Δ_γ естественно продолжать в подобласть универсальной накрывающей \hat{D}_p над проколотым диском $D \setminus \{p\}$

Предположим временно, что отображение Δ_γ продолжено до голоморфного отображения $\tilde{\Delta}_\gamma$ всей универсальной накрывающей \hat{D}_p в некоторый диск D' . Пусть z и w — карты на D и D' , $z(p) = 0$; $\xi = -\ln z$ — карта на \hat{D}_p , отображающая \hat{D}_p в некоторую правую полуплоскость $\xi > C$, $\xi = \xi + i\eta$. Положим $\psi(\xi) = \tilde{\Delta}_\gamma(e^{-\xi}) - e^{-\xi}$ (считаем, что функция $\exp(-\xi)$ отображает полуплоскость $\xi > C$ на универсальную накрывающую \hat{D}_p). По условию основной леммы 1, $\psi(\xi) = o(\exp(-N\xi))$ при любом $N > 0$. В силу теоремы Фрагмена — Линделефа, $\psi \equiv 0$ и, следовательно, $\Delta_\gamma = \text{id}$ — все фазовые кривые, пересекающие полутрансверсаль Γ , замкнуты, и основная лемма 1 доказана.

К сожалению, отображение Δ_γ , вообще говоря, не продолжается аналитически на всю накрывающую \hat{D}_p . Однако это отображение продолжается в область настолько большую, что теорема Фрагмена — Линделефа по-прежнему применима (п. 2.5). Исследование преобразования монодромии сводится в п. 2.6 к исследованию так называемых отображений соответствия (см. рис. 3 и начало п. 2.6), которое в свою очередь изучается с помощью следующего предложения.

Предложение 1. Пусть вещественно аналитическое векторное поле имеет невырожденное седло, Γ и Γ' — вещественные полутрансверсали к его сепаратрисам с вершинами p и p' , принадлежащие дискам D и D' на комплексных прямых, и пусть определено отображение соответствия $\Delta: \Gamma \rightarrow \Gamma'$. Обозначим через σ преобразование на сечения универсальной накрывающей \hat{D}_p , соответствующее обходу в положительном направлении вокруг выколотой точки p на диске D , а через Δ_1 — преобразование монодромии, соответствующее комплексной сепаратрисе седла¹⁾, проходящей через p' . Тогда, если отрезок Γ достаточно мал, то всюду на Γ выполнено соотношение $\tilde{\Delta} \circ \sigma = \Delta_1^{-1} \circ \Delta$, где $\tilde{\Delta}$ — аналитическое продолжение Δ на D_p .

Это предложение легко следует из леммы 3 § 3, и в формальном доказательстве не используется. Оно позволяет оценить, сколько раз можно обойти окружность радиуса r с центром p на диске D , чтобы вдоль полученной кривой существовало аналитическое продолжение отображения Δ , переводящее эту кривую в диск D' . А именно, функция Δ продолжается из точки $r \in \Gamma$ над n раз пройденной окружностью, если итерации $\Delta_1^{-j} \circ \Delta(r)$, $j = 1, \dots, n = n(r)$, принадлежат диску D' . Мультипликатор биголоморфного отображения Δ_1 в неподвижной точке p' , по модулю равен 1 (это следует из вещественности векторного поля на \mathbb{R}^2); поэтому расстояние до нуля вдоль орбиты диффеоморфизма Δ_1 меняется примерно так же, как вдоль орбиты отображения $w \mapsto w(1-w)^{-1} = g_{w^2}^1$ (сдвиг за единичное время вдоль фазовых кривых поля $w^2 \frac{\partial}{\partial w}$). Вдоль последних орбит расстояние до нуля меняется в 2 раза за время, не меньшее чем $O(|w|^{-1})$. Можно доказать, что $\Delta(r) = O(r^\lambda)$, где λ — характеристическое число особой точки (определение см. в п. 2.7). Следовательно, $n(r)$ имеет порядок $O(r^{-\lambda})$. Итак, отобра-

¹⁾ Определение комплексной сепаратрисы и ее монодромии см. в [2].

жение Δ может быть продолжено из точки $r \in \Gamma$ над n раз пройденной окружностью $|z| = r$, где $n = O(r^{-\lambda})$. Перейдя к карте $\xi = -\ln z$ на \hat{D}_p , получаем, что функция $\Delta \circ \exp(-\xi)$ может быть продолжена из точки $\xi = -\ln r$ на отрезок прямой $\operatorname{Re} \xi = \xi$, $\xi = \xi + i\eta$, $|\eta| \leq Cr^{-\lambda} = Ce^{\lambda\xi}$. Другими словами, отображение $\Delta \circ \exp(-\xi)$ продолжается в область $\xi \geq C_1 + C_2 \ln |\eta^2 + 1|$ при достаточно больших C_1 и C_2 . Эти рассуждения служат фоном для формальных доказательств § 3. Для целей, выходящих за рамки настоящей статьи, полезно иметь более сильные оценки на продолженное отображение соответствия, чем только ограниченность; для этого области, в которых продолжение определено, придется несколько сузить. В этом параграфе доказательство основной леммы 1 сводится к основной лемме 3 о продолжении отображений соответствия, а в § 3 доказана основная лемма 3.

2.2. Области класса L и накрывающие отображения.

О п р е д е л е н и я. 1. Стандартной областью типа C на плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ называется множество $\Omega_C = \{\zeta \mid \xi > C(\eta^2 + 1)^{1/4}\}$, $C > 0$.

2. Всюду в дальнейшем D — единичный диск $|z| \leq 1$, \hat{D}_0 — универсальная накрывающая над $D \setminus 0$ с базисной точкой из $[0, 1]$, $\xi = -\ln z$ — естественная карта на \hat{D}_0 . Область $\Omega \subset \hat{D}_0$ называется областью класса L , если ее образ при отображении ξ содержит стандартную область типа C для некоторого $C > 0$.

3. Пусть D и D' — два экземпляра единичного диска, a и b — точки отрезка $[0, 1]$ на D и D' соответственно, $f: [0, a] \rightarrow [0, b]$ — непрерывное отображение, аналитическое во внутренних точках отрезка. Накрывающее отображение \hat{f} для f — это аналитическое продолжение f до отображения каких-либо (не обязательно максимально возможных) областей на универсальных накрывающих \hat{D}_0 и \hat{D}'_0 .

З а м е ч а н и е. В естественных картах на \hat{D}_0 и \hat{D}'_0 : $\hat{f}(\zeta) = -\ln \hat{f}(e^{-\zeta})$, \hat{f} — аналитическое продолжение f на \hat{D}_0 (выбирается ветвь логарифма, вещественная на полуоси $\xi > 0$).

2.3. Выход в комплексную область. Комплексификацией связного вещественно k -мерного аналитического многообразия M будем называть любое связное аналитическое многообразие комплексной размерности k , содержащее подмногообразие, \mathbf{R} — аналитически диффеоморфное M (комплексификация M обозначается cM). Рассмотрим векторное поле v класса A на поверхности M и комплексификацию cM , выбранную так, что поле v продолжается до голоморфного поля ${}^c v$ на cM . Пусть γ — сложный цикл класса S поля v (т. е. γ содержит только невырожденные особые точки), p — неособая точка цикла γ . Как и выше, координатную окрестность точки p отождествим с подобластью плоскости \mathbf{C}^2 . Пусть Γ — полуинтервал с вершиной p на прямой, трансверсальной γ , \hat{D} — диск на соответствующей комплексной прямой с центром p , радиусом Γ и картой $z: z(p) = 0$, $z(\Gamma) = [0, 1]$, $z(\hat{D}) = D$.

О с н о в н а я л е м м а 2. Накрывающее преобразование монодромии сложного цикла γ (обозначаемое $\hat{\Delta}_\gamma$) допускает аналитическое продолжение в некоторую подобласть Ω класса L на универсальной накрывающей \hat{D}_0 , причем всюду в $\Omega \operatorname{Re} \hat{\Delta}_\gamma > 0$.

2.4. Редукция. Выведем основную лемму 1 из основной леммы 2. Пусть преобразование монодромии Δ_γ удовлетворяет условию леммы 1, \hat{D}_0 , $\hat{\Delta}_\gamma$ и ξ — те же, что и выше. Положим: $\psi = \exp(-\hat{\Delta}_\gamma) - \exp(-\xi)$. Эта функция уже рассматривалась в п. 2.1, где было доказано, что она убывает быстрее любой экспоненты вдоль положительной полуоси. В силу основной леммы 2 эта функция ограничена. Основная лемма 1 вытекает теперь из следующего утверждения.

Л е м м а 1. *Функция, голоморфная и ограниченная в области класса L , убывающая вдоль положительной полуоси быстрее любой экспоненты, $e^{N\xi}$, $N > 0$ тождественно равна нулю.*

2.5. Доказательство леммы 1. Непосредственным следствием теоремы Фрагмена — Линделефа является теорема, которая получится, если в формулировке леммы 1 область класса L заменить правой полуплоскостью (автор благодарен Е. А. Горину за разъяснения по этому вопросу).

Рассмотрим отображение $\varphi: \omega \mapsto \xi = \omega + C'(1 + \omega)^{1/2}$. При $C' \gg C$ отображение φ переводит правую полуплоскость $\operatorname{Re} \omega > 0$ внутрь стандартной области Ω_C . Функция $\psi \circ \varphi$ голоморфна и ограничена в правой полуплоскости и по-прежнему убывает быстрее любой экспоненты на положительной полуоси, поскольку $\varphi(\omega)/\omega \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$. Следовательно, $\psi \circ \varphi \equiv 0$. \triangleleft

2.6. Локализация. Пусть γ — сложный цикл класса S , Γ — аналитическая полутрансверсаль к этому циклу, Δ_γ — соответствующее преобразование монодромии. Это преобразование распадается в суперпозицию отображений соответствия для гиперболических секторов особых точек, принадлежащих циклу, и биголоморфных отображений. Гиперболический сектор седла изображен на рис. 3. Отображение соответствия переводит полутрансверсаль, через которую фазовые кривые входят в сектор, в полутрансверсаль, через которую фазовые кривые выходят из сектора; образ и прообраз принадлежат одной кривой (рис. 3); вершина полутрансверсали переходит в вершину. Перенумеруем гиперболические секторы особых точек в том порядке, в котором их проходит дуга фазовой кривой с началом и концом на полутрансверсали Γ , не имеющая других общих точек с этой полутрансверсалью. Пусть Γ_j и Γ'_j — аналитические полутрансверсали, через первую из которых фазовые кривые входят в j -й сектор, а через вторую — выходят, $\Delta_j: \Gamma_j \rightarrow \Gamma'_j$ — отображение соответствия. Пусть $f_j: \Gamma'_j \rightarrow \Gamma_{j+1}$ (нумерация циклическая) — отображение вдоль фазовых кривых; оно продолжается до биголоморфного отображения трансверсали, т. е. биголоморфно продолжается в вершину. Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma_1 = \Gamma$. Преобразование монодромии разлагается в суперпозицию

$$\Delta_\gamma = f_n \circ \Delta_n \circ \dots \circ f_1 \circ \Delta_1.$$

2.7. Накрывающие отображения соответствия. Напомним обозначение: $\xi = -\ln z$ — карта на универсальной накрывающей над проколотым кругом $0 < |z| < 1$. Голоморфная замена $w = H(z)$, $H(0) = 0$, $v = H'(0) > 0$, меняет естественную карту ξ на естественную карту ω , отличающуюся от ξ на величину $-\ln v + h(\xi)$, $\operatorname{Im} \ln v = 0$; $h(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Действительно, пусть $H(z) = vz(1 + g(z))$, $g(0) = 0$. Тогда $\omega(\xi) = -\ln [ve^{-\xi}(1 + g(e^{-\xi}))] = \xi - \ln v + O(e^{-\xi})$. Тем самым доказана

Л е м м а 2. *Для любого ростка отображения $f: (\mathbf{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^+, 0)$, биголоморфно продолжаемого в точку 0, накрывающее отображение определено в некоторой области класса L , и в естественных картах ω и ξ на образе и прообразе отличается от сдвига на $O(e^{-\xi})$.*

О с н о в н а я л е м м а 3. *Накрывающее отображение соответствия для гиперболического сектора невырожденного седла аналитического векторного поля, вещественного на \mathbf{R}^2 , допускает аналитическое продолжение в некоторую область Ω класса L . В естественных картах ω и ξ на образе и прообразе продолженное отображение отличается от подобия $\xi \mapsto \lambda\xi + a$ ($-\lambda$ — характеристическое число¹⁾ особой точки, $a \in \mathbf{R}$ — константа, зависящая от выбора карт) на величину, стремящуюся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, $\xi \in \Omega$. Образ области Ω содержит область класса L .*

Основная лемма 2 следует из двух последних лемм.

¹⁾ Характеристическим числом особой точки векторного поля называется отношение собственных значений линейной части поля в этой точке; это число определено с точностью дообращения.

§ 3. Доказательство основной леммы 3

3.1. Нормализация. Докажем основную лемму 3, выбрав удобные естественные карты в образе и прообразе отображения соответствия; для этих карт $a = 0$. На этом доказательство будет закончено: переход к другой естественной карте меняет покрывающее отображение соответствия на величину $a + O(e^{-\zeta})$, $a \in \mathbf{R}$, как показано в п. 2.7.

В первой части мемуара Дюлака [1] доказано следующее

Предложение 2. Пусть аналитическое векторное поле на вещественной плоскости имеет особую точку нуль с отрицательным характеристическим числом $-\lambda$. Тогда для любого натурального N существует вещественно-аналитическая замена координат в некоторой окрестности особой точки 0, приводящая исходное уравнение к виду

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z, \\ \dot{w} &= -w(\lambda + z^N w f(z, w)),\end{aligned}$$

если λ иррационально,¹ и к виду

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z, \\ \dot{w} &= -w(\lambda + P(u) + u^N f(z, w)), \quad P(0) = 0,\end{aligned}$$

если $\lambda = p/q$ рационально; здесь $u = z^p w^q$ — резонансный моном, P — многочлен степени меньше N ; в обеих формулах функция f голоморфна в окрестности нуля.

Следствие. В условиях предыдущей леммы существует натуральное число $n \geq \lambda$ и вещественно-аналитическая замена координат в некоторой окрестности особой точки 0, приводящая исходное уравнение к виду

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z, \\ \dot{w} &= -w(\lambda + z^n w f(z, w)),\end{aligned} \quad (*)$$

f — функция, голоморфная в единичном бидиске $\Delta = \{|z| \leq 1, |w| \leq 1\}$, причем

$$\max_{\Delta} |f| \leq \frac{1}{2} \lambda, \quad \max_{\Delta} |f| \leq 1.$$

З а м е ч а н и я. 1. Выполнения последних требований на f можно добиться изменением масштаба в плоскости (z, w) .

2. Основную лемму 3 достаточно доказать для уравнения (*) и трансверсалей $\Gamma_+ = \{(z, w) \mid z \in [0, 1], w = 1\}$ и $\Gamma_- = \{(z, w) \mid z = 1, w \in [0, 1]\}$.

3.2. Построение аналитического продолжения. Определим стандартные кривые, используемые при продолжении. Обозначим через D_0 и D_1 проколотые диски

$$\begin{aligned}D_0 &= \{(z, w) \mid 0 < |z| \leq 1, w = 0\}, \\ D_1 &= \{(z, w) \mid 0 < |z| \leq 1, w = 1\}\end{aligned}$$

с картой z , и через \hat{D}_0, \hat{D}_1 — универсальные покрывающие над ними с базисной точкой p_0 (соответственно p_1): $z(p_0) = z(p_1) = 1$ и картой $\zeta = -\ln z$, $\zeta(p_0) = \zeta(p_1) = 0$. Очевидно, $\Gamma_+ \subset D_1$. Пусть $\zeta \in \Omega_C$, $\zeta = \xi + i\eta$, $C > 0$ произвольно. Обозначим через μ^ζ (ζ — индекс, а не степень) кривую с началом 0 и концом ζ , состоящую из двух отрезков $[0, \xi]$ и $[\xi, \zeta]$, параметризованную длиной дуги s : $s(0) = 0, s(\zeta) = S, S = \xi + |\eta|$.

Точку, соответствующую параметру s , обозначим $\mu^\zeta(s)$; тем самым определено отображение $\mu^\zeta: [0, S] \rightarrow \mathbf{C}, s \mapsto \mu^\zeta(s)$.

Определим следующие кривые:

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= \gamma^{\zeta, 1}: [0, S] \rightarrow \mathbf{C} \times \{1\}, \quad s \mapsto (\exp(-\mu^\zeta(s)), 1); \\ \gamma^0 &= \gamma^{\zeta, 0}: [0, S] \rightarrow \mathbf{C} \times \{0\}, \quad s \mapsto (\exp(\mu^\zeta(s) - \zeta), 0).\end{aligned}$$

Кривые μ^ζ , γ^1 , γ^0 изображены на рис. 4. Положим $\gamma_T^\zeta = \gamma^{\zeta,0} |_{[0, T]}$. Обозначим через Φ_P фазовую кривую уравнения (*), проходящую через точку P . Следующая лемма тривиальна для линейных уравнений и указывает на сходство уравнения (*) с его линейной частью.

Лемма 3. *Рассмотрим уравнение (*), вещественное на вещественной плоскости, и пусть Δ — отображение соответствия $\Gamma_+ = \{(x, 1) \mid x \in [0, 1]\} \rightarrow \Gamma_- = \{(1, y) \mid y \in [0, 1]\}$. Тогда для любого достаточно большого $C > 0$ выполнены следующие утверждения.*

1. Пусть $\zeta \in \Omega_C$. Тогда на римановой поверхности Φ_P , $p = (e^{-\zeta}, 1)$, существует дуга с началом p , накрывающая кривую $\gamma^{\zeta,0}$ при проектировании $\pi_2: (z, w) \rightarrow z$. Обозначим эту дугу $\hat{\gamma}^\zeta$.

2. Конец дуги $\hat{\gamma}^\zeta$ является результатом аналитического продолжения отображения соответствия Δ вдоль кривой $\gamma^{\zeta,1}$ с начальным значением $\Delta(1) = 1$.

3. Первый интеграл $u = -(\lambda \ln z + \ln w)$ линеаризованного уравнения (*) при продолжении вдоль кривой $\hat{\gamma}^\zeta$ из начального значения $u_0 = -\lambda \zeta (\ln z(p) = -\zeta, \ln w(p) = 0)$ меняется по модулю не более чем на 1; более того,

$$|u(q) - u(p)| \leq \alpha(\zeta) \text{ при } q \in \hat{\gamma}^\zeta, \\ \alpha(\zeta) \rightarrow 0 \text{ при } \zeta \rightarrow \infty, \zeta \in \Omega_C.$$

3.3. Доказательство основной леммы 3. Рассмотрим проколотый диск $D_2 = \{(z, w) \mid z = 1, 0 < |w| \leq 1\}$, и универсальную накрывающую \hat{D}_2 над ним с базисной точкой $p_2 = (1, 1)$ и с естественной картой $u = -\ln w$ на \hat{D}_2 . Пусть $\Delta: \Gamma_+ \rightarrow \Gamma_-$ — отображение соответствия для уравнения (*), вещественного на \mathbb{R}^2 . Обозначим через $\hat{\Delta}$ накрывающее отображения для Δ . В силу утверждения 2 леммы 3 оно допускает аналитическое продолжение вдоль кривой μ^ζ при $\zeta \in \Omega_C$. При этом $u(\hat{\Delta}(\zeta)) = u(\zeta) + h(\zeta)$, где $u(\zeta) = \lambda \zeta$ (всюду на \hat{D}_1 $\ln w = 0$) и $|h(\zeta)| < 1$ в силу утверждения 3 леммы 3. При достаточно большом C' в области $\Omega_{C'}$ имеем: $|h'| < 1$; это следует из оценки Коши. Поэтому отображение $\hat{\Delta}: \zeta \rightarrow u = \lambda \zeta + h(\zeta)$ в области $\Omega_{C'}$ биголоморфно, и область $\hat{\Delta}(\Omega_{C'})$ принадлежат классу L . Наконец, $h(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$ в силу утверждения 3 леммы 3. \triangleleft

Перейдем к доказательству леммы 3.

3.4. Априорная оценка. Обозначим через $\hat{\gamma}_T^\zeta \subset \hat{\gamma}^\zeta$ дугу с началом $(\exp(-\zeta), 1)$, накрывающую на Φ_P над кривой γ_T^ζ при проектировании $\pi_2: (z, w) \rightarrow z$; при малых $T > 0$ дуги $\hat{\gamma}_T^\zeta$ определены. Докажем следующую априорную оценку. \dagger

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое ξ_0 , что если $\zeta = \xi + i\eta \in \Omega_C$ и $\xi > \xi_0$, то для всех $q \in \hat{\gamma}_T^\zeta$

$$|u(q) - u(p)| < \varepsilon, \text{ где } p = (\exp(-\zeta), 1).$$

\triangleleft Продифференцируем функцию u в силу уравнения (*). Получим $\dot{u} = z^n w f(z, w)$. Отсюда $|\dot{u}| \leq |e^u|$ всюду в единичном бидиске, поскольку в нем $|z^n w| \leq |z^\lambda w| = |e^u|$, $|f| \leq 1$.

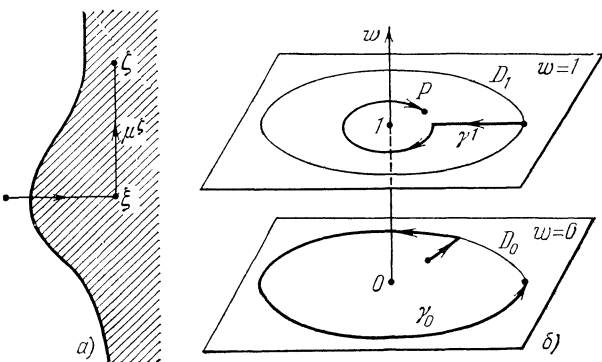


Рис. 4. а) кривая μ^ζ и стандартная область класса L (заштрихована); б) кривые $\gamma^{\zeta,1}$ и $\gamma^{\zeta,0}$. Ось w изображена вещественно одномерной, а ось z — двумерной.

Пусть s — естественный параметр на $\hat{\gamma}_T^\xi$: $\pi_z \circ \hat{\gamma}_T^\xi(s) = \gamma_T^\xi(s)$. Имеем $\left| \frac{d(u \circ \hat{\gamma})}{ds} \right| = |\dot{u} \circ \hat{\gamma}|$, поскольку «время, соответствующее системе (*)», определяется из первого уравнения этой системы и равно $\ln z$. Положим $v(s) = |u \circ \hat{\gamma}_T^\xi(s) - u(p)|$. Имеем

$$|\dot{v}(s)| \leq |\exp(u(p) + v(s))| = \exp(-\lambda\xi + v(s)).$$

Время s , за которое величина v вырастет от нуля до ε , не меньше чем

$$\int_0^\varepsilon e^{\lambda\xi - v} dv \geq \frac{1}{3} e^{\lambda\xi} \varepsilon \text{ при } 0 \leq \varepsilon \leq 1. \text{ Но } s \in [0, T], T \leq S \leq \xi + (\varepsilon/C)^2.$$

Если C достаточно велико и $\xi > C$, то $3^{-1} \exp(\lambda\xi) > \xi + (\xi/C)^2$. Отсюда следует, что при таком C $|u(p) - u(q)| < 1$, если $q \in \hat{\gamma}_T^\xi$, $\xi \in \Omega_C$.

Если $C > 1$ фиксировано и $\xi > \xi_0(\varepsilon)$, то выполнено неравенство $1/3 e^{\lambda\xi} \varepsilon > \xi + (\xi/C)^2$. Отсюда следует априорная оценка. \triangleleft

3.5. Проектирование на стенку. Грань $|z| = 1$, $|w| \leq 1$ единичного бидиска назовем для краткости стенкой.

Лемма 4. *Существует отображение внутренности единичного бидиска с выкинутой осью w на стенку, определяемое следующим образом: каждая точка $p = (z, w)$, $z \neq 0$, переходит в конец дуги с началом в точке p , накрывающей над отрезком $[z, z/|z|]$ при проектировании $\pi_z: (z, w) \mapsto z$ на фазовой кривой Φ_p ; накрывающая дуга вся принадлежит единичному бидиску. \triangleleft Описываемая в лемме накрывающая дуга (если она существует), является фазовой кривой уравнения (*), рассматриваемого как уравнение с вещественным временем. Вдоль фазовых кривых этого уравнения, расположенных внутри единичного бидиска, функция $|w|$ не убывает. Действительно, пусть точка — дифференцирование в силу системы (*) с вещественным временем. Имеем $\frac{1}{2}(w\bar{w})' = -w\bar{w} \operatorname{Re}(\lambda - z^n w f(z, w)) < 0$, поскольку в единичном бидиске $|z^n w f| \leq \frac{1}{2}\lambda$. Утверждение леммы следует теперь из теоремы о продолжении решений дифференциального уравнения. \triangleleft*

3.6. Доказательство утверждений 1 и 3 леммы 3. Дуга $\hat{\gamma}_T^\xi$ при $T = \xi$ определена в силу леммы 4, поскольку γ_ξ^0 — это отрезок $[\exp(-\xi), \exp(-i\eta)]$. Пусть $T > \xi$, и дуга $\hat{\gamma}_T^\xi$ существует. Дуга $\hat{\gamma}_T^\xi \setminus \hat{\gamma}_\xi^\xi$ принадлежит стенке и является фазовой кривой уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z} &= iz, \\ \dot{w} &= -iw(\lambda + z^n w f(z, w)) \end{aligned} \quad (i^*)$$

с вещественным временем. В силу априорной оценки в точках этой дуги выполняется неравенство (при условии, что $\xi \in \Omega_C$ и C достаточно велико) $|z^\lambda w| \leq |e^{-\lambda\xi + 1}| \leq 3e^{-\lambda C}$. Но $|z| = 1$ на дуге $\hat{\gamma}_T^\xi \setminus \hat{\gamma}_\xi^\xi$. Значит, на этой дуге $|w| \leq 3 \exp(-\lambda C) < 1$ при достаточно большом C . Существование дуги $\hat{\gamma}_T^\xi$ следует теперь из теоремы о продолжении для уравнения (i*). Из априорной оценки следует также утверждение 3 леммы 3. \triangleleft

3.7. Доказательство утверждения 2 леммы 3. \triangleleft Семейство кривых $\{\hat{\gamma}_T^\xi \mid T = s \in [0, S]\}$ непрерывно зависит от s ; каждая из кривых лежит на решении $\Phi_{\gamma_s^{\xi, 1}(s)}$; начало кривой $\hat{\gamma}_s^\xi$ — это точка $\gamma_s^{\xi, 1}(s)$, а конец лежит на трансверсали $z = 1$, $|w| \leq 1$. Следовательно, конец кривой $\hat{\gamma}_s^\xi$ непрерывно зависит от s . Далее конец дуги $\hat{\gamma}_s^\xi$ аналитически зависит от ξ по теореме об аналитической зависимости решений от начальных условий. Это доказывает утверждение 2. \triangleleft

Лемма 3, а с ней все основные леммы и теоремы 1, 2, 3 доказаны.

§ 4. Нетождественное преобразование монодромии с тождественным рядом Дюлака

4.1. Склейка фазовых пространств. Векторное поле, имеющее сложный цикл с указанным в заглавии преобразованием монодромии, строится с помощью склейки. Фазовое пространство этого поля — вещественно-двумерная аналитическая поверхность.

О п р е д е л е н и е. Пусть U_1 и U_2 — две плоские области, в окрестности замыкания каждой из которых задано аналитическое векторное поле: v_1 в U_1 и v_2 в U_2 . Пусть граница каждой из областей U_j содержит трансверсаль Γ_j , аналитически диффеоморфную отрезку, и пусть поле v_1 на Γ_1 направлено из U_1 , а поле v_2 на Γ_2 — внутрь U_2 . Пусть f — аналитический диффеоморфизм $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$. Склежкой областей U_1 и U_2 с полями v_1 и v_2 на них по отображению f называется аналитическое многообразие M с аналитическим векторным полем v такое, что существуют аналитические диффеоморфизмы $F_j: \bar{U}_j \rightarrow M$, причем $F_2^{-1} \circ F_1|_{\Gamma_1} = f$, $v|_{F_j U_j} = F_{j*} v$.

З а м е ч а н и е. Такое многообразие всегда существует и строится с помощью хорошо известных конструкций [7].

4.2. Вспомогательные области и поля. Аналитическая поверхность, упомянутая в теореме 4, получается склейкой трех плоских областей с векторными полями на них, к описанию которых мы и переходим.

Положим $v_1 = x^2 \partial/\partial x - y \partial/\partial y$. Рассмотрим насыщение двух отрезков

$$\Gamma = \{(x, e) \mid x \in [-1, 1/2]\}, \quad \Gamma' = \{(x, -e) \mid |x| \leq 1/2\}$$

положительными полутраекториями поля v_1 (e — основание натуральных логарифмов). Пересечем это насыщение с полосой $|x| \leq 1$ и объединим с прямоугольником $|x| \leq 1/2, |y| \leq e$. Внутренность полученной фигуры обозначим через U (рис. 5).

Положим $v_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$, s — симметрия: $(x, y) \mapsto (-x, y)$; $W = sU$. Фазовые кривые поля v_1 (v_2) выходят из области U (входят в область W) через трансверсаль $\Gamma^- = \{(1, y) \mid y \in \Sigma\}$ (соответственно через трансверсаль $s\Gamma^- = \{(-1, y) \mid y \in \Sigma\}$), где $\Sigma = \{y \mid |y| \leq \exp(-2)\}$.

Рассмотрим отображение $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, y \mapsto y + y^2$; полный прообраз отрезка Σ состоит из двух компонент, одна из которых содержит 0. Отображение этой компоненты в $\Sigma: y \mapsto y + y^2$ обозначим через f ; сама компонента обозначается $f^{-1}\Sigma$; очевидно, $f: f^{-1}\Sigma \rightarrow \Sigma$ — диффеоморфизм.

Рассмотрим криволинейный четырехугольник

$$V = \{(x, y) \mid |x| < 1, \varphi_-(x) < y < \varphi_+(x)\},$$

где φ_- и φ_+ — описываемые ниже функции $[-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, и векторное поле $v_2 = \partial/\partial x$ на V . Правая и левая границы V — отрезки

$$\Sigma^+ = \{(-1, y) \mid y \in \Sigma\},$$

$$\Sigma^- = \{(1, y) \mid y \in f^{-1}\Sigma\};$$

потребуем, чтобы график функции φ_+ проходил через верхние концы этих отрезков, φ_- — через нижние; вблизи точек ± 1 функции φ_+ и φ_- должны быть постоянные; $\varphi_+ > \varphi_-$; в остальном функции φ_+ и φ_- произвольны (рис. 5).

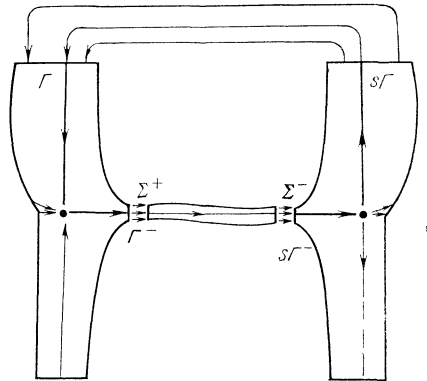


Рис. 5. Области $U_1 = U \times \{1\}$ (слева), U_2 (в центре) и U_3 (справа). Склеиваются точки, соединенные стрелками, расположенными вне областей U_j . Жирными линиями показаны фазовые кривые, из которых склеивается сложный цикл γ .

Чтобы различать точки с одинаковыми координатами, принадлежащие областям U , V , W , положим $U_1 = U \times \{1\}$, $U_2 = V \times \{2\}$, $U_3 = W \times \{3\}$.

Определены естественные диффеоморфизмы $U_1 \rightarrow U$, $U_2 \rightarrow V$, $U_3 \rightarrow W$ (забывается второй сомножитель); эти диффеоморфизмы позволяют поднять поле v_j на область U_j ; поднятые поля обозначаются теми же символами.

4.3. Окончание доказательства теоремы 4. Нижеследующие склейки производятся, как описано в разделе 4.1.

Склеим области U_1 и U_2 с заданными на них полями v_1 и v_2 по трансверсальям $\Gamma^- \times \{1\}$ и $\Sigma^+ \times \{2\}$, отождествляя точки на трансверсальных с одинаковой y -координатой (см. рис. 5).

Склеим области U_3 и U_1 с заданными на них полями v_1 и v_2 по трансверсальям $\Sigma^- \times \{2\}$ и $s\Gamma^- \times \{3\}$, отождествляя точки $(1, y) \times \{2\}$ и $(-1, f(y)) \times \{3\}$.

Склеим области U_3 и U_1 с заданными на них полями v_3 и v_1 по трансверсальям $s\Gamma \times \{3\}$ и $\Gamma \times \{1\}$, отождествляя точки $(x, e) \times \{3\}$ и $(-x, e) \times \{1\}$.

Получим двумерное аналитическое многообразие с аналитическим векторным полем v на нем. Поле v имеет сложный цикл γ — сепаратрисный двуугольник с особыми точками $O_1 = (0, 0) \times \{1\}$ и $O_2 = (0, 0) \times \{3\}$. Обозначим через Γ_+ полутрансверсаль $\{p \in \Gamma \times \{1\} \mid x(p) \geq 0\}$. Соответствующее этой полутрансверсали преобразование монодромии имеет вид $\Delta_\gamma = -\Delta_2 \circ f \circ \Delta_1$, где Δ_1 и Δ_2 — отображения соответствия гиперболических секторов особых точек поля v . Точнее, если на горизонтальных трансверсальных считать координатой x , а на вертикальных y , то $\Delta_1(x) = e^{-1/x}$, $f(y) = y + y^2$, $\Delta_2(y) = 1/\ln y$.

Простое вычисление показывает, что $\Delta_\gamma(x) = x[1 - x \ln(1 + e^{-1/x})]^{-1}$. Это отображение нетождественно и отличается от тождественного на плоский в нуле добавок. \triangleleft

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дюлак А. О предельных циклах. М.: Наука, 1980.
2. Ильяшенко Ю. С. Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной проективной плоскости. — Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1978, вып. 4, с. 83—136.
3. Ильяшенко Ю. С. Особые точки и предельные циклы дифференциальных уравнений на вещественной и комплексной плоскости. Препринт. Пушкино: НИВЦ АН СССР, 1982.
4. Ilyashenko Ju. S. The finiteness problem for limit cycles of polynomial vector fields on the plane, germs of saddle resonant vector fields and non Hausdorff Riemann surfaces. — In: Leningrad Int. Topological Conf., Abstracts. Leningrad: Nauka, 1982.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: ОНТИ, 1935.
6. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.
7. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. — УМН, 1970, т. 25, вып. 1, с. 113—185.
8. Sotomayor I., Paterlini R. Quadratic vector fields with finitely many periodic orbits. — Lect. Notes in Math., 1983, v. 1007, p. 753—766.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 декабря 1983 г.