Доклады Академии наук СССР
1985. Том 284, 1

УДК 519.8 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

А.В. ЛОТОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 25 VI 1984)

1. Эффективность метода анализа управляемых систем на основе численного построения множества всех достижимых значений некоторой системы агрегированных переменных (метод обобщенных множеств достижимости [1]) продемонстрирована при оценке потенциальных возможностей управляемых систем [2], принятии решений при нескольких критериях [3], агрегировании экономических моделей [4] и в других задачах.

Математическая формулировка метода такова. Пусть заданы линейные топологические пространства исходных переменных X и агрегированных переменных Y, линейный оператор f: $X \to Y$, связывающий значения агрегированных переменных со значениями исходных. Пусть $G \subset X$ – заданное выпуклое множество допустимых значений переменных. Требуется построить в явном виде множество $f(G)$ – обобщенное множество достижимости. Численное построение $f(G)$ осуществляется на основе аппроксимации элементов X элементами конечномерного пространства R^n, элементов Y – элементами R^m, оператора f – оператором f_{nm}: $R^n \to R^m$, множества G – многогранным множеством $G^n \subset R^n$, заданным в виде

$$(1) \qquad G^n = \{x \in R^n \colon Ax \leqslant b\},$$

где A и b – заданные матрица и вектор.

Вычислительные методы построения множеств $f_{nm}(G^n)$ в виде

$$(2) \qquad f_{nm}(G^n) = \{y \in R^m \colon Dy \leqslant d\}$$

описаны в [5]. Вопросы аппроксимации множеств $f(G)$ множествами $f_{nm}(G^n)$ при $n, m \to \infty$ для частных случаев пространств X и Y рассматривались в [6, 7]. Здесь излагается вопрос об аппроксимации и связанный с ним вопрос об устойчивости множеств $f(G)$ при возмущении множества G и оператора f в общем случае.

2. Пусть пространства X и Y банаховы, $f \in B[X, Y]$, где $B[X, Y]$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов из X в Y с нормой $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \colon x \in X, \ \|x\| \leqslant 1\}$. Пусть $B_X^\epsilon = \{x \in X \colon \|x\| \leqslant \epsilon\}$. Введем расстояние между множествами $A, C \subset X$: $\rho(A, C) = \max\{\inf\{\epsilon \geqslant 0 \colon A \subset C + B_X^\epsilon\}, \inf\{\epsilon \geqslant 0 \colon C \subset A + B_X^\epsilon\}\}$. Аналогично введем расстояние в пространстве Y.

Под возмущением множества G будем понимать семейство множеств $\{\varphi(z_x) \colon z_x \in Z_x\}$, где Z_x – метрическое пространство, φ: $Z_x \to 2^X$, причем найдется такая точка $z_x^0 \in Z_x$, что $\varphi(z_x^0) = G$. Под возмущением оператора f будем понимать семейство операторов $\{\psi(z_f) \colon z_f \in Z_f\}$, где Z_f – метрическое пространство, ψ: $z_f \to B[X, Y]$, причем найдется такая точка $z_f^0 \in Z_f$, что $\psi(z_f^0) = f$. Будем говорить, что отображение φ: $Z_x \to 2^X$ непрерывно в точке z_x^0, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такая окрестность H_ϵ точки z_x^0, что $\rho(\varphi(z_x), \varphi(z_x^0)) \leqslant \epsilon$ для $z_x \in H_\epsilon$.

Определение. Будем говорить, что множество $f(G)$ устойчиво по отношению к классу возмущений $\{\tilde{f}(\tilde{G}):\ \tilde{f} = \psi(z_f),\ \tilde{G} = \varphi(z_x),\ z_f \in Z_f,\ z_x \in Z_x\}$, если отображение χ: $Z_x \times Z_f \to 2^Y$ такое, что $\chi(z_x, z_f) = \tilde{f}(\tilde{G})$, непрерывно в точке $\{z_x^0, z_f^0\}$.

Рассмотрим важные классы возмущений f и G.

Определение. Класс возмущений $\{\psi(z_f):\ z_f \in Z_f\}$ оператора $f \in B[X, Y]$ будем называть непрерывным, если отображение ψ непрерывно в z_f^0.

Определение. Класс возмущений $\{\varphi(z_x):\ z_x \in Z_x\}$ множества $G \subset X$ будем называть непрерывным, если отображение φ непрерывно в z_x^0.

Легко получить следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть множество G непусто и ограничено. Множество $f(G)$ устойчиво по отношению к любым классам непрерывных возмущений множества G и отображения f.*

Непосредственно воспользоваться этой теоремой удается далеко не всегда, так как обычно множество G задается в виде $\bigcap\limits_{i=1}^{I} G_i$, а непрерывные возмущения множеств G_i не обязательно приводят к непрерывному возмущению множества G.

Определение. Класс возмущений $\{\varphi_i(z_i):\ z_i \in Z_i\}$ выпуклого замкнутого множества G_i будем называть выпуклым замкнутым, если найдется такая окрестность U_i^c точки z_i^0, что для любого $z_i \in U_i^c$ множество $\varphi_i(z_i)$ выпукло и замкнуто.

Теорема 2. *Пусть $G = \bigcap\limits_{i=1}^{I} G_i$, причем множества G_i, $i = 1, 2, \ldots, I$, выпуклы и замкнуты, множество G ограничено. Тогда при выполнении условия*

$$G_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{I} \operatorname{int} G_i \right) \neq \phi \tag{3}$$

множество G устойчиво по отношению к любым классам непрерывных выпуклых замкнутых возмущений множеств G_i, $i = 1, 2, \ldots, I$.

Из теорем 1 и 2 сразу следует

Теорема 3. *Пусть $G = \bigcap\limits_{i=1}^{I} G_i$, причем множества G_i, $i = 1, 2, \ldots, I$, выпуклы и замкнуты, множество G ограничено. Тогда при выполнении условия* (3) *множество $f(G)$ устойчиво по отношению к любым классам непрерывных выпуклых замкнутых возмущений множеств G_i, $i = 1, 2, \ldots, I$, и непрерывных возмущений оператора f.*

Отметим, что непрерывные возмущения не включают в себя конечномерную аппроксимацию множества G в том случае, когда оно не является компактным. Поэтому рассмотрим более широкий класс возмущений.

3. В этом разделе будем дополнительно предполагать, что пространство X сопряжено банахову сепарабельному пространству X_0, пространство Y сопряжено банахову пространству Y_0, а оператор f сопряжен линейному компактному оператору f_0 : $Y_0 \to X_0$. Пусть множество G ограничено, непусто и замкнуто в $*$-слабой топологии X.

Определение. Класс возмущений $\{\varphi(z_x):\ z_x \in Z_x\}$ множества G будем называть ограниченным $*$-слабо непрерывным и замкнутым, если найдется такая окрестность U_X точки z_x^0, что для $z_x \in U_X$ множества $\varphi(z_x)$

замкнуты в $*$-слабой топологии, множество $\varphi(U_X)$ ограничено, а отображение φ непрерывно в z_x^0 в $*$-слабой топологии.

Теорема 4. *Множество $f(G)$ устойчиво по отношению к любым классам ограниченных $*$-слабо непрерывных замкнутых возмущений множества G и непрерывных возмущений оператора f.*

Устойчивость множества $f(G)$ по отношению к $*$-слабо непрерывным возмущениям множества G является основой для анализа аппроксимации множества $f(G)$.

4. Пусть выполняются предположения предыдущего раздела. Изучим вопрос о близости множеств $f_{nm}(G^n)$ к множеству $f(G)$ при $n, m \to \infty$. Пусть $R^n \subset X$ и $R^m \subset Y$ для всех n, m. Пусть заданы последовательности операторов проектирования $\pi_X^n\colon X \to R^n$ и $\pi_Y^m\colon Y \to R^m$ таких, что

$$\|\pi_X^n\| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots; \qquad \|\pi_Y^m\| = 1, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Пусть выполняются следующие условия:

1) для любого $x \in X$ при $n \to \infty$ имеем

$$\pi_X^n(x) \to x \text{ в } *\text{-слабой топологии } X; \tag{5}$$

2) при $m \to \infty$ имеем

$$\sup\{\|\pi_Y^m(y) - y\|:\ y \in f(B_X^1)\} \to 0. \tag{6}$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (4)–(6). *Пусть* $G = \bigcap_{i=1}^{I} G_i$. *Пусть множества G_i аппроксимируются множествами $G_i^n \subset R^n$, причем найдутся такие $*$-слабо замкнутые множества $\tilde{G}_i^n \subset X$, что:*

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(\tilde{G}_i^n, G_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, I;$

б) $\bigcap\limits_{i=1}^{I} G_i^n = \pi_X^n\left(\bigcap\limits_{i=1}^{I} \tilde{G}_i^n\right), \quad n = 1, 2, \ldots;$

в) $\pi_X^n\left(\bigcap\limits_{i=1}^{I} \tilde{G}_i^n\right) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{I} \tilde{G}_i^n, \quad n = 1, 2, \ldots$

Пусть оператор f аппроксимируется операторами $f_{nm} \in B[R^n, R^m]$, причем найдется такая последовательность операторов $\tilde{f}_{nm} \in B[X, Y]$, что:

а) $\lim\limits_{n, m \to \infty} \|\tilde{f}_{nm} - f\| = 0;$

б) $\pi_Y^m \tilde{f}_{nm}(x) = f_{nm}(x)$ *для любого* $x \in R^n$.

Тогда для аппроксимации множества $f(G)$ множествами $f_{nm}(G^n)$, т.е. для

$$\lim_{n, m \to \infty} \rho\left(f_{nm}\left(\bigcap_{i=1}^{I} G_i^n\right), f(G)\right) = 0,$$

достаточная устойчивость множества G по отношению к возмущениям множеств G множествами $\tilde{G}_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, I$.

Совместно с теоремой 2 сформулированная теорема дает проверяемое достаточное условие аппроксимации множества $f(G)$ множествами $f_{nm}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{I} G_i^n\right)$.

5. На основе изложенных теорем доказаны утверждения об устойчивости и аппроксимации обобщенных множеств достижимости для управляемой системы

дифференциальных уравнений на отрезке $[0, T]$:

(7) $\dot{x} = A(t)x + B(t)u + a(t), \quad x \in R^p, \quad u \in R^l$;

(8) $\{u(t), x(t)\} \in Y(t) \subset R^{l+p}$;

(9) $x(0) \in \Gamma(0) \subset R^p$,

где $A(t)$, $B(t)$, $a(t)$ – заданные семейства матриц и векторов, $Y(t)$ – заданное семейство выпуклых множеств, $\Gamma(0)$ – заданное выпуклое множество.

Вычислительный центр
Академии наук СССР, Москва

Поступило
12 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лотов А.В.* – ДАН, 1980, т. 250, № 5, с. 1081–1083. 2. *Лотов А.В.* – Экон. и матем. методы, 1981, т. 17, № 2, с. 377–381. 3. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984, с. 392. 4. *Лотов А.В.* – ДАН, 1982, т. 265, № 6, с. 1334–1337. 5. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* – ЖВМиМФ, 1980, т. 20, № 5, с. 1130–1141. 6. *Лотов А.В.* – Там же, 1979, т. 19, № 1, с. 44–55. 7. *Лотов А.В.* – ДАН, 1981, т. 261, № 2, с. 297–300.