



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Хромов, Приближающие свойства степеней резольвенты оператора дифференцирования, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2009, том 9, выпуск 3, 75–78

DOI: 10.18500/1816-9791-2009-9-3-75-78

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 марта 2025 г., 06:30:26



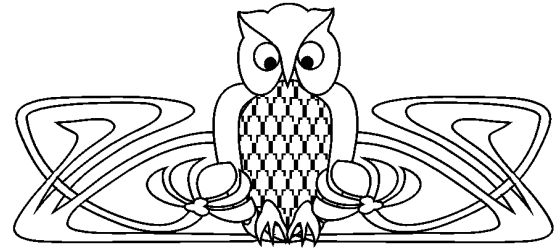


Библиографический список

1. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. С. 155–199.
2. Хворостухина Е.В. О полугруппах эндоморфизмов гиперграфов // Совр. проблемы диф. геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. С. 136–137.
3. Зыков А.А. Гиперграфы // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 6. С. 89–154.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
5. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970. 161 с.

УДК 517.51

**ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА
СТЕПЕНЕЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ
ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ**



А.А. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Построены семейства операторов и исследованы их аппроксимирующие свойства в задаче приближения производных функций и в задаче приближения гладких решений интегральных уравнений.

Ключевые слова: аппроксимация функций и их производных, резольвента, интегральное уравнение, приближенное решение.

Approximating Properties of the Powers of the Differentiation Operator Resolvent

A.A. Khromov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

The families of operators are constructed and their approximating properties are investigated in the problems of approximating the derivative of functions and the smooth solutions of integral equations.

Key words: approximation of functions and their derivatives, resolvent, integral equation, approximate solution.

1. Рассмотрим операторы

$$\Omega_r u = \begin{cases} \Omega_{2r} u \equiv r \int_0^1 e^{r(x-t)} u(t) dt, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r} u \equiv r \int_x^1 e^{-r(x-t)} u(t) dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Задание разрывной на отрезке $[0, 1]$ функции в таком виде здесь и в дальнейшем означает, что мы не обращаем внимания на то, как именно она задана в точке $x = 1/2$, поскольку это несущественно.

Построим операторы, комбинирующиеся из степеней операторов Ω_{1r} и Ω_{2r} , а именно операторы

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} \Omega_{2r}^k u, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r}^k u, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad D^m \Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} D^m \Omega_{2r}^k u, & x \in [0, 1/2], \\ D^m \Omega_{1r}^k u, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где D^m — оператор m -го дифференцирования по x .

Лемма 1. Операторы $\Omega_r^{(k)}$, $k = 2, \dots$ имеют вид

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} r^k \int_0^1 \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(x-t)} u(t) dt, & x \in [0, 1/2], \\ r^k \int_x^1 \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(x-t)} u(t) dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Доказательство для $k = 2$ приведено в работе [1], для любого k получается по индукции.



Лемма 2. Операторы $D^m \Omega_r^{(k)}$, $k \geq 2$, $m = 1, \dots, k - 1$ имеют вид

$$D^m \Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} r^k \int_0^1 K_{2m}(x, t, k, r) u(t) dt, & x \in [0, 1/2], \\ r^k \int_x^1 K_{1m}(x, t, k, r) u(t) dt, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} K_{1m}(x, t, k, r) &= (-1)^m e^{-r(x-t)} \left[r^m \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} - m r^{m-1} \frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} + \right. \\ &+ C_m^2 r^{m-2} \frac{(x-t)^{k-3}}{(k-3)!} + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} r \frac{(x-t)^{k-m}}{(k-m)!} + (-1)^m \frac{(x-t)^{k-m-1}}{(k-m-1)!} \left. \right], \\ K_{2m}(x, t, k, r) &= e^{r(x-t)} \left[r^m \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} - m r^{m-1} \frac{(t-x)^{k-2}}{(k-2)!} + \right. \\ &+ C_m^2 r^{m-2} \frac{(t-x)^{k-3}}{(k-3)!} + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} r \frac{(t-x)^{k-m}}{(k-m)!} + (-1)^m \frac{(t-x)^{k-m-1}}{(k-m-1)!} \left. \right]. \end{aligned}$$

Доказательство проводится методом математической индукции.

Теорема 1. Для любой функции $u(x) \in C[0, 1]$ выполняется сходимость

$$\|\Omega_r^{(k)} u - u\|_{L_\infty[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь и в дальнейшем $\|v(x)\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|v(x)\|_{C[0,1/2]}, \|v(x)\|_{C[1/2,1]}\}$.

Доказательство. Для $k = 1, 2$ эта сходимость выполняется [1]. Для любого $k > 2$ применяем метод математической индукции и теорему Банаха – Штейнгауза.

Теорема 2. Для любой функции $u(x) \in C^{k-1}[0, 1]$ при $k \geq 2$, $m \leq k - 1$ выполняется сходимость:

$$\|D^m \Omega_r^{(k)} u - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Доказательство сводится к доказательству сходимостей:

$$\|D^m \Omega_{1r}^k u - u^{(m)}\|_{C[1/2,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \|D^m \Omega_{2r}^k u - u^{(m)}\|_{C[0,1/2]} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

а каждая из них доказывается методом индукции с использованием теоремы 1.

2. Пусть непрерывно дифференцируемая m раз функция $u(x)$ задана ее приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[0, 1]: \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$. Поставим задачу: по f_δ и δ найти равномерные приближения к $u^{(m)}(x)$. Это известная задача восстановления функций [2].

Теорема 3. При $k \geq 2$, $m = 1, \dots, k - 1$ для сходимости

$$\Delta(\delta, D^m \Omega_r^{(k)} u) \equiv \sup\{\|D^m \Omega_r^{(k)} f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \leq \delta\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0$$

необходимо и достаточно выполнения согласования $r = r(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $r(\delta) \rightarrow \infty$ и $(r(\delta))^{\frac{2m+1}{2}} \delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. На основании оценки

$$\|D^m \Omega_r^{(k)} f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \leq \|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} \delta + \|D^m \Omega_r^{(k)} u - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]}$$

и теоремы 2 нам достаточно доказать ограниченность норм $\|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]}$ при каждом фиксированном r , а для нахождения согласований $r = r(\delta)$, нужно затем найти асимптотику по r при $r \rightarrow \infty$ указанных норм.

Имеем

$$\|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} = \max\{\|D^m \Omega_{2r}^k\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[0,1/2]}, \|D^m \Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[1/2,1]}\}.$$



Рассмотрим сначала норму $\|D^m \Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[1/2,1]}$. Имеем

$$\|D^m \Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[1/2,1]} = r^k \max_{1/2 \leq x \leq 1} \left(\int_0^x K_{1m}^2(x, t, k, r) dt \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Раскроем квадрат скобки, стоящей в правой части (1). Обозначим для краткости $x - t = \tau$, $k - 1 = k_1$. Тогда получим $K_{1m}^2(x, t, k, r) = P_{1m}(\tau, r)$, где $P_{1m}(\tau, r)$ имеет вид (располагаем слагаемые в порядке возрастания степеней r)

$$P_{1m}(\tau, r) = a_0 \tau^{2k_1 - 2m} + a_1 r \tau^{2k_1 - 2m + 1} + a_2 r^2 \tau^{2k_1 - 2m + 2} + \dots + a_l r^l \tau^{2k_1 - 2m + l} + \dots + a_{2m} r^{2m} \tau^{2k_1},$$

где a_j , $j = 0, \dots, 2m$ — константы, выражающиеся через произведения констант, стоящих при степенях $r^{m-l}(x-t)^{k-l-1}$, $l = 0, 1, \dots, m$ в квадратной скобке выражения (1).

Тогда интеграл $I = \int_0^x K_{1m}^2(x, t, k, r) dt$, стоящий в правой части (1), можно представить в виде

$$I = a_0 I_0 + a_1 r I_1 + \dots + a_l r^l I_l + \dots + a_{2m} r^{2m} I_{2m},$$

где $I_l = \int_0^x \tau^{2k_1 - 2m + l} e^{-2r\tau} d\tau$, $l = 0, 1, \dots, 2m$.

Вычисляя эти интегралы, получим

$$I = C r^{-(2k_1 - 2m + 1)} + O(r^{2m-1} e^{-r}),$$

$$\|D^m \Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[1/2,1]} = r^k C^{1/2} r^{-(m+1/2)} [1 + O(r^{2k-2} e^{-r})].$$

Точно такое же выражение получаем для нормы $\|D^m \Omega_{2r}^k\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[0,1/2]}$ и в целом справедлива формула

$$\|D^m \Omega_{1r}^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} = C^{1/2} r^{-\frac{2m+1}{2}} + O(r^{2k+m-3/2} e^{-r}). \quad (2)$$

Из этой формулы и теории некорректно поставленных задач следует, что константа C отлична от нуля. В противном случае норма $\|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, а значит, $\|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} \leq K$, где K не зависит от r . А этого не может быть, поскольку операторы $D^m \Omega_r^{(k)}$ аппроксимируют неограниченный оператор.

Из равенства (2) и из работы [3] вытекает утверждение теоремы 3.

3. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$Au \equiv u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) u(t) dt = f(x). \quad (3)$$

Предполагаем, что ядро $K(x, t)$ суммируемо с квадратом по обоим переменным и что однородное уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2[0, 1]$. Будем считать, что оператор A в уравнении (1) действует из пространства $C^p[0, 1]$ в пространство $L_2[0, 1]$.

Лемма 3. Если в уравнении (3) $A \in (C^p[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1])$ ($p \geq 0$ — целое) и A^{-1} существует, то A^{-1} неограничен.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 в работе [1].

Построим операторы, с помощью которых можно находить приближения к производным от точного решения уравнения (3). С этой целью рассмотрим операторы

$$T_r^{(m,k)} f = D^m \Omega_r^{(k)} \tilde{A}^{-1} f,$$

где \tilde{A} — оператор A , рассматриваемый как оператор, действующий из $L_2[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$.

Теорема 4. Если $u(x) \in C^{k-1}[0, 1]$, $f_\delta(x) \in L_2[0, 1]$, $\|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \leq \delta$, где $f = Au$, A — оператор в уравнении (3), то для сходимости

$$\Delta(\delta, T_r^{(m,k)}, u) \equiv \{\sup \|T_r^{(m,k)} f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - Au\|_{L_2[0,1]} \leq \delta\} \rightarrow 0$$



при $r \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно выбрать $r = r(\delta)$ так, чтобы

$$r(\delta) \rightarrow +\infty, \quad (r(\delta))^{\frac{2m+1}{2}} \delta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (m = 1, \dots, k-1, \quad k \geq 2).$$

Доказательство. Запишем оценку:

$$\|T_r^{(m,k)} f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty} \leq \|T_r^{(m,k)}(f_\delta - f)\|_{L_\infty} + \|T_r^{(m,k)} Au - u^{(m)}\|_{L_\infty}. \quad (4)$$

Тогда

$$\|T_r^{(m,k)} Au - u^{(m)}\|_{L_\infty} = \|D^m \Omega_r^{(k)} u - u^{(m)}\|_{L_\infty} \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow \infty$ по теореме 2. Далее,

$$\begin{aligned} \|T_r^{(m,k)}(f_\delta - f)\|_{L_\infty[0,1]} &= \|D^m \Omega_r^{(k)} \tilde{A}^{-1}(f_\delta - f)\|_{L_\infty[0,1]} \leq \\ &\leq \|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} \|\tilde{A}^{-1}(f_\delta - f)\|_{L_2} \leq \|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} \|\tilde{A}^{-1}\|_{L_2[0,1]} \delta. \end{aligned}$$

Из формулы (2) для нормы $\|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]}$ и оценки (4) получаем утверждение теоремы 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-2970.2008.01).

Библиографический список

1. Хромов А.А. Решение интегральных уравнений с регуляризацией // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1967. Т. 7, № 4. С. 874–884.
2. Морозов В.А. О восстановлении функций методом резольвент простейших дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 53–58.
3. Иванов В.К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Диф. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.