Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Ф. Филиппов, Единственность решения системы дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производных, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 1, 87–92

https://www.mathnet.ru/de11213

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
21 апреля 2025 г., 04:03:06

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 1, с. 87–92

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.922

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

© 2005 г. А. Ф. Филиппов

Для системы уравнений

$$F_i(t, x_1, \dots, x_n, dx_1/dt, \dots, dx_n/dt) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

показывается, что единственность решения с начальными условиями в неособой точке зависит от n и того, допускаются ли решения с разрывными производными. Доказывается теорема о достаточных условиях единственности.

1. Постановка вопроса. Решением системы (1) называется вектор-функция $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, определенная на некотором интервале или отрезке, в каждой точке имеющая производную $\boldsymbol{x}'(t)$ и удовлетворяющая данной системе.

Рассмотрим задачу

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}'(t_0) = \boldsymbol{p}_0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = dx_i/dt$ $(i = \overline{1, n})$,

$$\boldsymbol{F} \in C^1, \quad \boldsymbol{F}(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0) = \boldsymbol{0}, \quad J(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0) \neq 0, \quad J = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{3}$$

Теорема о неявной функции сводит эту задачу к задаче

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \quad (\boldsymbol{f} \in C^1) \tag{4}$$

и позволяет доказать существование решения $\boldsymbol{x}(t)$ с непрерывной производной $\boldsymbol{x}'(t)$, график которого в пространстве $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ содержится в окрестности начальной точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0)$.

В случае $n = 1$ система (1) состоит из одного уравнения $F(t, x, p) = 0$, якобиан J в условиях (3) превращается в производную $\partial F/\partial p$. При $n = 1$ существование и единственность на некотором интервале для решения задачи (2) хорошо известны ([1, § 25, с. 105; 2, гл. 1, § 9, с. 76]), и на этом интервале решение имеет непрерывную производную. Доказательство основано на использовании теоремы о неявных функциях, с помощью которой задача (2) при условиях (3) в окрестности точки (t_0, x_0, p_0) сводится к задаче (4). При $n = 1$ единственность решения вытекает из следующего утверждения ([1, § 25, с. 105, сноска]).

Лемма 1. *Если скалярная функция $x(t) \in \mathbb{R}^1$ имеет производную $x'(t)$ во всех точках интервала $\alpha < t < \beta$ и $y_1 = x'(t_1)$, $y_2 = x'(t_2)$ для каких-либо t_1, t_2 $(\alpha < t_1 < t_2 < \beta)$, то на интервале (t_1, t_2) $x'(t)$ принимает все промежуточные значения между y_1 и y_2.*

Для вектор-функций $(n \geq 2)$ эта лемма не верна. Вектор-функция $\boldsymbol{u}(t) = (x(t), y(t))$, где $x(0) = y(0) = 0$, а при $t \neq 0$

$$x(t) = t^2 \cos(t^{-1} + c), \quad y(t) = t^2 \sin(t^{-1} + c) \quad (c = \text{const}), \tag{5}$$

имеет производную $\boldsymbol{u}'(0) = (0, 0)$, а при $t \neq 0$

$$x'(t) = \sin(t^{-1} + c) + 2t\cos(t^{-1} + c), \quad y'(t) = -\cos(t^{-1} + c) + 2t\sin(t^{-1} + c). \tag{6}$$

Поэтому $|\boldsymbol{u}'(t)| = (x'^2+y'^2)^{1/2} = (1+4t^2)^{1/2}$ при $t \neq 0$ и $|\boldsymbol{u}'(t)|$ нигде не принимает значений из интервала $(0,1)$. Это позволяет привести пример системы (с $n=2$), для которой выполнены условия (3) при $t_0 = 0$, $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{0}$, но решение с этими начальными условиями не единственно. Возникает вопрос о достаточных условиях единственности решения.

2. Пример. Рассмотрим систему (функции x, y скалярные, $p \equiv x'$, $q \equiv y'$)

$$p(1-p^2-q^2) + 8tx + 4y = 0, \quad q(1-p^2-q^2) + 8ty - 4x = 0. \tag{7}$$

В точке $t = x = y = p = q = 0$ якобиан $J = (1-p^2-q^2)(1-3p^2-3q^2) \neq 0$, но задача (7) с $x(0) = y(0) = p(0) = q(0) = 0$ имеет решение $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ и еще бесконечно много решений вида (5). Это проверяется с помощью подстановки функций (5) и (6) в систему (7). Таким образом, система (7) при нулевых начальных условиях имеет одно решение с непрерывными производными $x'(t)$, $y'(t)$ и бесконечно много решений (5) с разрывными при $t=0$ производными $x'(t)$, $y'(t)$. Единственность решения класса C^1 вытекает из возможности записи системы в виде (4) в окрестности точки $t = x = y = p = q = 0$.

Исследуем систему (7) более полно, чтобы получить представление о всех ее решениях. В плоскости (x,y) перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$r^2 = x^2+y^2, \quad rr' = xp + yq, \quad r^2\varphi' = xq - yp, \quad p^2+q^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2,$$

и из (7) получаем (везде $r' = dr/dt$ и т.п.)

$$r'(1-p^2-q^2) = -8tr, \quad \varphi'(1-p^2-q^2) = 4. \tag{8}$$

Следовательно, $r' = -2tr\varphi'$. Выражая в (8) p^2+q^2 через r' и φ' и исключая φ', получаем

$$\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)r'^3 - r' - 8tr = 0. \tag{9}$$

Это кубическое относительно r' уравнение при $t>0$, $r>0$ в области $H>1$, где $H = r\sqrt{108(1+4t^2)}$, имеет один вещественный корень $r_1'>0$, а при $0<H\leq 1$ – три корня: $r_1'>0$, r_2' и $r_3'<0$; $r_2' = r_3'$ при $H=1$; $r_2'=0$ при $H=0$. Поэтому при $t>0$ в области $H>1$ имеем одно семейство решений, они возрастают, а в области $0<H<1$ – одно семейство возрастающих решений и два семейства убывающих решений. Решения, доходящие до $t=0$, продолжаются четным образом в область $t<0$.

В пространстве (t,x,y,p,q) особые точки, где $J=0$, лежат на многообразиях

$$p^2+q^2 = 1/3, \quad r\sqrt{108(1+4t^2)} = 1, \quad p^2+q^2 = 1, \quad r = 0.$$

Дискриминантная поверхность $r\sqrt{108(1+4t^2)} = 1$ делит пространство (t,x,y) на части, в которых через каждую точку проходит одно решение (область $H>1$) или три решения (область $0<H<1$). Через каждую точку, в которой $r=0$, проходит бесконечно много решений. Сравнивая dr/dt вдоль дискриминантной поверхности и r_2', r_3' для достигающих ее из области $H<1$ решений уравнения (9), получаем, что они различны ($dr/dt \neq r_2' = r_3' < 0$) везде, кроме нескольких значений t. Интегральные кривые, достигающие этой поверхности при других t (кроме решений с $r' = r_1' > 0$, пересекающих поверхность), имеют на ней точки возврата.

Этот пример позволяет сделать выводы:

1) единственность зависит от возможности наличия у системы (2) решений $\boldsymbol{x}(t)$ с разрывной производной $\boldsymbol{x}'(t)$;

2) это наличие зависит от возможных типов разрыва производной вектор-функции, значит, и от размерности пространства;

3) нарушение единственности возможно и в точках $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0)$, где якобиан $J \neq 0$, если при тех же $t_0, \boldsymbol{x}_0$ и некотором $\boldsymbol{p}$ имеем $J=0$.

3. Свойства производной вектор-функции. В п. 3 предполагается, что для вектор-функции $x(t) \in \mathbb{R}^n$ в односторонней (или двусторонней) окрестности точки t^* существует ограниченная производная $x'(t)$.

Утверждение 1. *Если $x'(t)$ стремится к $y \in \mathbb{R}^n$ при $t \to t^* - 0$ (или при $t \to t^* + 0$), то при $t = t^*$ существует левая (соответственно правая) производная, равная y.*

Это известно: для скалярной функции доказано в [1, § 11, с. 48], а для вектор-функций то же доказательство применяется к каждой координате отдельно.

Утверждение 2. *Если производная $x'(t)$ существует и ограничена при $\alpha < t < t^*$ (или при $t^* < t < \beta$), то существует непустое множество Ω^- предельных точек для $x'(t)$ при $t \to t^* - 0$ (соответственно множество Ω^+ при $t \to t^* + 0$). Это множество ограничено, замкнуто и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое h_ε, что $\rho(x'(t), \Omega^-) < \varepsilon$ при $t^* - h_\varepsilon < t < t^*$ (соответственно $\rho(x'(t), \Omega^+) < \varepsilon$ при $t^* < t < t^* + h_\varepsilon$), где ρ – расстояние в пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Это утверждение доказывается так же, как для предельных множеств траекторий в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. При $n \geq 2$ множества Ω^- и Ω^+ могут быть несвязными.

Далее $\operatorname{co} M$ означает наименьшее выпуклое множество, содержащее множество M.

Лемма 2. *Если в точке t^* существует правая (или левая) производная функции $x(t)$, то $x'_{\text{п}}(t^*) \in \operatorname{co}\Omega^+$ (соответственно $x'_{\text{л}}(t^*) \in \operatorname{co}\Omega^-$).*

Доказательство. Предположим, что $x'_{\text{п}}(t^*) = p^* \notin \operatorname{co}\Omega^+$. Тогда существует гиперплоскость H $(v \cdot p \equiv v_1p_1 + \ldots + v_np_n = \gamma)$, разделяющая p^* и Ω^+, т.е. $v \cdot p^* < \gamma$, но $v \cdot p > \gamma$ для всех $p \in \Omega^+$. Учитывая компактность Ω^+, при некотором $\varepsilon > 0$ можно записать $v \cdot p^* < \gamma - \varepsilon$, $v \cdot p > \gamma + \varepsilon$ для всех $p \in \Omega^+$.

В силу утверждения 2 для этого ε найдется такое $t_1 > t^*$, что $\rho(x'(t), \Omega^+) < \varepsilon/|v|$ для всех $t \in (t^*, t_1)$. Тогда для таких t имеем $v \cdot x'(t) > \gamma$. Поэтому

$$v \cdot x'_{\text{п}}(t^*) = \lim_{h \to +0} \frac{v \cdot (x(t^* + h) - x(t^*))}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int\limits_{t^*}^{t^*+h} v \cdot x'(t)\, dt.$$

Левая часть равенства меньше $\gamma - \varepsilon$, а правая не меньше γ. Получаем противоречие. Следовательно, $x'_{\text{п}}(t^*) \in \operatorname{co}\Omega^+$. Для $x'_{\text{л}}(t^*)$ рассуждения аналогичные. Лемма доказана.

Как известно, для любого замкнутого множества M множество его изолированных точек M_{i} не более чем счетно (т.е. счетно, конечно или пусто), а множество неизолированных точек $M_* = M \setminus M_{\text{i}}$ замкнуто.

Лемма 3. *Если множество Ω^+ содержит более одной точки, то а) оно имеет мощность континуума; б) $\operatorname{co}\Omega^+ = \operatorname{co}\Omega^+_*$, где Ω^+_* – множество всех неизолированных точек множества Ω^+. Аналогичные утверждения верны для Ω^-.*

Доказательство. Пусть множество Ω^+ содержит точки a и b, $a \neq b$. Если $\operatorname{co}\Omega^+ \neq \operatorname{co}\Omega^+_* \neq \emptyset$, то пусть $b \in \Omega^+_*$, $a \in \Omega^+ \setminus \operatorname{co}\Omega^+_*$ и, значит, точка a изолирована в Ω^+. Точки a и b предельные для $x'(t)$ при $t \to t^* + 0$, поэтому существуют такие последовательности $t_i \to t^* + 0$, $\tau_i \to t^* + 0$, что

$$x'(t_i) \to a, \quad x'(\tau_i) \to b, \quad t_{i+1} < \tau_i < t_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пусть H $(v \cdot p = \gamma)$ – гиперплоскость, разделяющая точки a и b, а при доказательстве утверждения б) H отделяет точку a от множества $\operatorname{co}\Omega^+_*$. Можно считать, что $v \cdot a < \gamma$, $v \cdot b > \gamma$ (или $v \cdot p > \gamma + \varepsilon$ для всех $p \in \operatorname{co}\Omega^+_*$ и некоторого $\varepsilon > 0$). Производная $\varphi'(t) = v \cdot x'(t)$ скалярной функции $\varphi(t) = v \cdot x(t)$ при $t \to t^* + 0$ становится то меньше γ (при $t = t_i$), то больше $\gamma + \varepsilon$ (при $t = \tau_i$), начиная с некоторого i_1. По лемме 1 на каждом интервале (τ_i, t_i) $(i \geq i_1)$ найдется такое ξ_i, что $\varphi'(\xi_i) = v \cdot x'(\xi_i) = \gamma$, значит, $x'(\xi_i) \in H$. Так как производная $x'(t)$ ограничена, то из последовательности $\{x'(\xi_i)\}$, $i \geq i_1$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $p \in H$. Так как $\xi_i \to t^* + 0$, то $p \in \Omega^+$. Число γ можно брать любым из некоторого интервала, поэтому множество K полученных точек $p \in \Omega^+$ имеет мощность континуума. Утверждение а) доказано. Тогда множество Ω^+_* не пусто.

Плоскость H по построению отделяет точку $\boldsymbol{a}$ от множества $\operatorname{co}\Omega_*^+$. Из множества K лишь счетное подмножество точек могут быть изолированными, а остальные нет, они должны принадлежать множеству Ω_*^+. Но они лежат на плоскостях H, отделяющих $\boldsymbol{a}$ от Ω_*^+. Противоречие. Значит, не существует точки $\boldsymbol{a} \in \Omega^+ \setminus \operatorname{co}\Omega_*^+$. Тогда $\Omega^+ \subset \operatorname{co}\Omega_*^+$, $\operatorname{co}\Omega^+ \subset \operatorname{co}\Omega_*^+$. Обратное включение очевидно, так как $\Omega_*^+ \subset \Omega^+$.

Для множества Ω^- утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

4. Условия единственности решения. Рассматривается задача (2) для системы (1) в векторной записи.

Теорема. *Пусть при* $|t-t_0| < \delta_1$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| < \delta_2$, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ *вектор-функция* $\boldsymbol{F} \in C^1$, $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$ *при* $|\boldsymbol{p}| > m$ *и* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, $J \neq 0$ *в точке* $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0)$. *Пусть или множество* Q_0 *таких точек* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, *в которых одновременно* $\boldsymbol{F}(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$, $J(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}) = 0$, *не более чем счетно, или* $\boldsymbol{p}_0 \notin \operatorname{co} Q_0$. *Тогда найдется такое* $\delta_0 > 0$, *что для любого* $\delta \in (0, \delta_0)$ *задача (2) на отрезке* $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ *имеет единственное решение* $\boldsymbol{x}(t)$. *Оно имеет непрерывную производную* $\boldsymbol{x}'(t)$.

Доказательство. По теореме о неявной функции [3, с. 34] для достаточно малого $\eta > 0$ у векторного уравнения $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ в области $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0| < \eta$ существует единственное решение $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ в окрестности точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, при этом

$$\boldsymbol{f} \in C^1, \quad \boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{p}_0, \quad \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})) \equiv \boldsymbol{0}. \tag{10}$$

Как известно, задача $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ на достаточно малом отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(t)$, оно принадлежит C^1 и в силу (10) является также решением задачи (2). Других решений класса C^1 у задачи (2) нет, так как при достаточно малом δ для функции $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_0'(t)$ имеем $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0| < \eta$, а в этой области вблизи точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ задача (2) сведена к задаче (4), имеющей единственное решение.

Докажем, что на любом достаточно малом отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ задача (2) не имеет решений с разрывной производной $\boldsymbol{x}'(t)$. Предположим противное. Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ – решение задачи (2), у которого $\boldsymbol{x}'(t)$ разрывна в точке $t^* \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$. В силу утверждения 2 существуют предельные множества $\Omega^- = \Omega^-(t^*, \boldsymbol{x}(t^*))$ и $\Omega^+ = \Omega^+(t^*, \boldsymbol{x}(t^*))$ для $\boldsymbol{x}'(t)$ соответственно при $t \to t^*-0$ и $t \to t^*+0$. Хотя бы одно из них (например, Ω^+) содержит более одной точки (иначе $\boldsymbol{x}'(t)$ была бы непрерывной при $t = t^*$ в силу утверждения 1). Тогда по лемме 3 множество Ω^+ имеет мощность континуума.

Каждая точка $\boldsymbol{p} \in \Omega^+$ является предельной для некоторой последовательности значений $\boldsymbol{x}'(t_i)$, где $t_i \to t^*+0$ при $i \to \infty$. Так как $\boldsymbol{x}(t)$ – решение, то $\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{x}(t_i), \boldsymbol{x}'(t_i)) = \boldsymbol{0}$, $i = 1, 2, \ldots$ При $i \to \infty$ в пределе получаем $\boldsymbol{F}(t^*, \boldsymbol{x}(t^*), \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$. Значит, $\boldsymbol{F}(t^*, \boldsymbol{x}(t^*), \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ при всех $\boldsymbol{p} \in \Omega^+$ (также и при $\boldsymbol{p} \in \Omega^-$).

Множество изолированных точек множества Ω^+ не более чем счетно, поэтому множество Ω_*^+ неизолированных точек множества Ω^+ непусто и имеет мощность континуума. При $t = t^*$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t^*)$ для любой точки $\boldsymbol{p}^* \in \Omega_*^+$ якобиан $J(t^*, \boldsymbol{x}(t^*), \boldsymbol{p}^*) = 0$ (если бы $J(t^*, \boldsymbol{x}(t^*), \boldsymbol{p}^*) \neq 0$, то в некоторой окрестности $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*| < \rho$ точки $\boldsymbol{p}^*$ не было бы других точек $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{p}^*$, при которых $\boldsymbol{F}(t^*, \boldsymbol{x}(t^*), \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$, так как в этой окрестности уравнение $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ было бы однозначно разрешимо относительно $\boldsymbol{p}$ по теореме о неявной функции и точка $\boldsymbol{p}^*$ была бы изолированной точкой множества Ω^+). Таким образом, если у некоторого решения $\boldsymbol{x}(t)$ задачи (2) производная $\boldsymbol{x}'(t)$ разрывна при $t = t^*$, то для $t = t^*$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t^*)$ множество $Q(t^*, \boldsymbol{x}(t^*))$ значений $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, при которых $\boldsymbol{F}(t^*, \boldsymbol{x}(t^*), \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ и $J(t^*, \boldsymbol{x}(t^*), \boldsymbol{p}) = 0$, имеет мощность континуума. В силу лемм 2 и 3б)

$$\boldsymbol{x}'(t^*) \in \operatorname{co}\Omega^+ \cup \operatorname{co}\Omega^- = \operatorname{co}\Omega_*^+ \cup \operatorname{co}\Omega_*^- \subset \operatorname{co} Q_0(t^*, \boldsymbol{x}(t^*)).$$

В случае $t^* = t_0$ это противоречит условию теоремы.

Следовательно, у каждого решения задачи (2) производная $\boldsymbol{x}'(t)$ непрерывна при $t = t_0$. Тогда $|\boldsymbol{x}'(t)-\boldsymbol{p}_0| < \eta$ в некоторой окрестности точки t_0. В начале доказательства отмечалось, что такое решение задачи (2) в этой окрестности совпадает с единственным решением $\boldsymbol{x}_0(t)$ задачи (4), производная $\boldsymbol{x}_0'(t)$ которого непрерывна.

Если $\boldsymbol{x}'(t)$ имеет точки разрыва при $t > t_0$, то пусть $t^*(\boldsymbol{x}(\cdot))$ – нижняя грань этих точек. Предположим, что на множестве всех решений задачи (2) среди чисел $t^*(\boldsymbol{x}(\cdot))$ есть сколь угодно близкие к t_0. Возьмем решения $\boldsymbol{x}_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, для которых $t_k = t^*(\boldsymbol{x}_k(\cdot)) \to t_0+0$ $(k=1,2,\ldots)$ и $\boldsymbol{x}_k(t)\equiv \boldsymbol{x}_0(t)$ $(t_0\le t\le t_k)$. Так как функция $\boldsymbol{x}_0\in C^1$, то $\boldsymbol{x}'_k(t)$ непрерывна при $t_0\le t< t_k$, $\boldsymbol{x}'_{k\,\text{л}}(t_k)=\boldsymbol{x}'_0(t_k)$. Найдется такое k_1, что при всех $k>k_1$ имеем

$$\boldsymbol{x}_k(t)=\boldsymbol{x}_0(t),\quad |\boldsymbol{x}'_k(t)-\boldsymbol{p}_0|=|\boldsymbol{x}'_0(t)-\boldsymbol{p}_0|<\eta/2\quad (t_0\le t<t_k). \tag{11}$$

Тогда среди значений t, сколь угодно близких к t_k, есть и такие, при которых выполняется неравенство (11), и такие, при которых

$$|\boldsymbol{x}'_k(t)-\boldsymbol{p}_0|\ge\eta \tag{12}$$

(если бы не было таких t, как в (12), то неравенство (11) или $|\boldsymbol{x}'_k(t)-\boldsymbol{p}_0|<\eta$ выполнялось бы на более широком интервале и там производная $\boldsymbol{x}'_k(t)$ была бы непрерывной).

Так как $\boldsymbol{x}'_k(t)$ – решение, а функция $\boldsymbol{F}$ непрерывна, то множеству N_k таких точек $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$, в которых $\boldsymbol{F}(t_k,\boldsymbol{x}_k(t_k),\boldsymbol{p})=\boldsymbol{0}$, принадлежат как точки $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_k$, где $|\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{p}_0|\le\eta/2$, так и точки $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^*_k$, где $|\boldsymbol{p}^*_k-\boldsymbol{p}_0|\ge\eta$.

При t, $\boldsymbol{x}$, близких к t_0, $\boldsymbol{x}_0$, по условию $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\ne\boldsymbol{0}$ для $|\boldsymbol{p}|>m$, поэтому при больших k имеем $|\boldsymbol{p}_k|\le m$, $|\boldsymbol{p}^*_k|\le m$. Возьмем такую подпоследовательность $\{k_i\}$, $i=1,2,\ldots$, что $\boldsymbol{p}_{k_i}\to\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}^*_{k_i}\to\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{a}$. Следовательно, $\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{a})=\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.

Найдутся замкнутые ε-окрестности $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ и $S_\varepsilon(\boldsymbol{b})$ без общих точек. Их можно отделить друг от друга семейством $\{H_\gamma\}$ $(\gamma_1\le\gamma\le\gamma_2)$ параллельных гиперплоскостей. Если i достаточно большое, то $\boldsymbol{p}_{k_i}\in S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{p}^*_{k_i}\in S_\varepsilon(\boldsymbol{b})$. Как и в доказательстве леммы 3, на интервале, в концах которого $\boldsymbol{x}'_{k_i}(t)=\boldsymbol{p}_{k_i}$ и $\boldsymbol{x}'_{k_i}(t)=\boldsymbol{p}^*_{k_i}$, найдется такая точка $\tau_i=\tau_i(\gamma)$, в которой

$$\boldsymbol{x}'_{k_i}(\tau_i)\in H_\gamma,\quad \boldsymbol{F}(\tau_i,\boldsymbol{x}_{k_i}(\tau_i),\boldsymbol{x}'_{k_i}(\tau_i))=\boldsymbol{0}.$$

При $i\to\infty$ получаем, что на каждой плоскости $\{H_\gamma\}$ $(\gamma_1\le\gamma\le\gamma_2)$ имеется точка p_γ, в которой $\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_\gamma)=\boldsymbol{0}$. Почти все такие точки неизолированы, в таковых и $J=0$. Таким образом, имеется несчетное множество точек $\boldsymbol{p}_\gamma\in Q_0$. По условию теоремы в этом случае $\boldsymbol{p}_0\notin\operatorname{co}Q_0$. Тогда существуют непересекающиеся замкнутые окрестности $S_\varepsilon(\boldsymbol{p}_0)$ и $S_\varepsilon(\operatorname{co}Q_0)$. Их можно разделить семейством параллельных гиперплоскостей H^*_γ $(\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{p}=\gamma,\ \gamma_3\le\gamma\le\gamma_4)$.

Из неравенств (11) и (12) следует, что $\boldsymbol{x}'_k(t)$ разрывна при $t=t_k$. Тогда $\Omega^+(t_k,\boldsymbol{x}_k(t_k))$ содержит несчетное множество $Q_k\subset\mathbb{R}^n$, состоящее из всех тех $\widetilde{\boldsymbol{p}}_k$, при которых

$$\boldsymbol{F}(t_k,\boldsymbol{x}_k(t_k),\widetilde{\boldsymbol{p}}_k)=\boldsymbol{0},\quad J(t_k,\boldsymbol{x}_k(t_k),\widetilde{\boldsymbol{p}}_k)=0.$$

В силу лемм 2 и 3 $\boldsymbol{x}'_k(t_k)\in\operatorname{co}Q_k$.

Множество всех таких $\widetilde{\boldsymbol{p}}_k$ ограничено ($|\widetilde{\boldsymbol{p}}_k|\le m$, $k=1,2,\ldots$), поэтому разными способами можно выбрать сходящиеся последовательности $\{\widetilde{\boldsymbol{p}}_{k_i}\}$, $k_i\to\infty$ $(i=1,2,\ldots)$. Так как $t_k\to t_0+0$, $\boldsymbol{x}_k(t_k)=\boldsymbol{x}_0(t_k)\to\boldsymbol{x}_0$ $(k\to\infty)$, то из $\widetilde{\boldsymbol{p}}_{k_i}\to\boldsymbol{b}$ и непрерывности функций $\boldsymbol{F}$ и J следует, что $\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$ и $J(t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{b})=0$. Значит, множество $\overline{Q}$ всех таких точек $\boldsymbol{b}$ содержится в Q_0. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое k_ε, что при всех $k>k_\varepsilon$ имеем $Q_k\subset S_\varepsilon(\overline{Q})$ (в противном случае из тех $\widetilde{\boldsymbol{p}}_k$, для которых $\rho(\widetilde{\boldsymbol{p}}_k,\overline{Q})\ge\varepsilon_1>\varepsilon$, можно было бы выбрать сходящуюся последовательность, но ее предел должен принадлежать $\overline{Q}$).

Пусть $\varepsilon>0$ так мало, что $S_\varepsilon(\boldsymbol{p}_0)\cap S_\varepsilon(\operatorname{co}Q_0)=\emptyset$, как было выше. Так как $\boldsymbol{x}'_k(t_0)=\boldsymbol{p}_0$ и

$$\boldsymbol{x}'_k(t_k)\in\operatorname{co}Q_k\subset\operatorname{co}S_\varepsilon(\overline{Q})\subset\operatorname{co}S_\varepsilon(Q_0)\quad(\forall k>k_\varepsilon),$$

а шар $S_\varepsilon(\boldsymbol{p}_0)$ отделен от $S_\varepsilon(\operatorname{co}Q_0)=\operatorname{co}S_\varepsilon(Q_0)$ плоскостью H^*_γ, то, как в доказательстве леммы 3, найдется такое $t_\gamma=t_\gamma(k)\in(t_0,t_k)$, что $\boldsymbol{x}'_k(t_\gamma)\in H^*_\gamma$. Число $\gamma\in[\gamma_3,\gamma_4]$ произвольно, поэтому имеем несчетное множество N_k таких точек $\boldsymbol{p}_\gamma=\boldsymbol{x}'_k(t_\gamma)$. Функция $\boldsymbol{x}_k(t)$ – решение задачи (2), поэтому $\boldsymbol{F}(t_\gamma,\boldsymbol{x}_k(t_\gamma),\boldsymbol{p}_\gamma)=\boldsymbol{0}$, а в неизолированных точках множества N_k и якобиан $J(t_\gamma,\boldsymbol{x}_k(t_\gamma),\boldsymbol{p}_\gamma)=0$.

При фиксированном $\gamma \in [\gamma_3, \gamma_4]$ и $k \to \infty$ имеем $t_\gamma = t_\gamma(k)$, $t_0 < t_\gamma < t_k \to t_0$, поэтому $t_\gamma \to t_0$, $\boldsymbol{x}_k(t_\gamma) \to \boldsymbol{x}_0$, а из последовательности точек $\boldsymbol{p}_\gamma(k)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Ее предел $\boldsymbol{p}^*_\gamma \in H^*_\gamma$. В силу непрерывности $\boldsymbol{F}$ и J имеем $\boldsymbol{F}(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}^*_\gamma) = \boldsymbol{0}$, а для почти всех $\gamma \in [\gamma_3, \gamma_4]$ также $J(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}^*_\gamma) = 0$, значит, $\boldsymbol{p}^*_\gamma \in Q_0$. Но $H^*_\gamma \cap Q_0 = \emptyset$. Противоречие.

Следовательно, неверно предположение о существовании решений $\boldsymbol{x}_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, с точками разрыва производной, сколь угодно близкими к t_0. Значит, существует такой полуинтервал $[t_0, t_0 + \delta)$, на котором все решения задачи (2) имеют непрерывные производные $\boldsymbol{x}'(t)$ и совпадают с $\boldsymbol{x}_0(t)$. Теорема доказана.

Некоторые результаты исследования свойств систем вида (1) изложены в [4, с. 125; 5; 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.
2. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. Т. 2. М., 1973.
4. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М., 1954.
5. *Takens F.* // Lect. Notes Math. 1976. V. 525. P. 143–234.
6. *Rabier P.J., Rheinboldt W.C.* // Differential and Integral Equations. 1991. V. 4. № 3. P. 563–582.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
25.12.2003 г.