

УДК 517.518.114

Дифференциальное включение в банаховом пространстве со смешанными свойствами полунепрерывности

© 2020. А. А. Толстоногов

В сепарабельном банаховом пространстве рассматривается дифференциальное включение, правая часть которого является суммой двух многозначных отображений. Значениями первого являются замкнутые ограниченные не обязательно выпуклые множества, и оно является липшицевым по фазовой переменной. Значениями второго отображения являются замкнутые множества, и оно обладает смешанными условиями полунепрерывности: либо в фазовой точке отображение имеет замкнутый график и его значением является выпуклое множество, либо в некоторой окрестности этой точки оно является полунепрерывным снизу. При дополнительных предположениях, связанных с измеримостью и условиями роста, доказана теорема существования решения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3743>

§ 1. Введение

Пусть $T = [0, a]$, $a > 0$, — отрезок числовой полупрямой $R^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега μ и σ -алгеброй Σ измеримых по Лебегу подмножеств из T , X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и с нулевым элементом Θ , B — открытый единичный шар в X с центром в Θ , \bar{B} — его замыкание. Через $d(x, D)$ мы обозначаем расстояние от точки $x \in X$ до множества $D \subset X$ и

$$\|D\| = \sup\{\|x\|; x \in D\}.$$

Обозначим через $L^1(T, X)$ пространство интегрируемых по Бохнеру функций из T в X , а через $A^{1,1}(T, X)$ пространство всех абсолютно непрерывных функций $x: T \rightarrow X$, которые имеют производные $\dot{x}(\cdot) \in L^1(T, X)$ [1].

Метрику Хаусдорфа на пространстве всех непустых замкнутых ограниченных множеств из X мы обозначаем через $\text{haus}(\cdot, \cdot)$.

Целью работы является доказательство существования решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in U(t, x) + V(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $U, V: T \times X \rightarrow X$ — многозначные отображения.

Под решением включения (1) понимается тройка $(x(u, v)(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$, $x(u, v)(\cdot) \in A^{1,1}(T, X)$, $x(u, v)(0) = x_0$, $u(\cdot), v(\cdot) \in L^1(T, X)$, удовлетворяющая почти всюду условиям

$$\dot{x}(u, v)(t) = u(t) + v(t), \quad (2)$$

$$u(t) \in U(t, x(u, v)(t)), \quad (3)$$

$$v(t) \in V(t, x(u, v)(t)). \quad (4)$$

Сделаем следующие предположения.

Предположения $H(U)$. Мнозначное отображение $U: T \times X \rightarrow X$ с непустыми замкнутыми не обязательно выпуклыми значениями обладает следующими свойствами:

- (i) отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо;
- (ii) имеют место неравенства

$$\text{haus}(U(t, x), U(t, y)) \leq k(t)\|x - y\| \quad \text{п. в.}, \quad (5)$$

$x, y \in X, k(\cdot) \in L^1(T, R^+)$,

$$\|U(t, x)\| = \sup\{\|u\|; u \in U(t, x)\} \leq m_1(t) + n_1(t)\|x\| \quad \text{п. в.}, \quad x \in X, \quad (6)$$

$m_1(\cdot), n_1(\cdot) \in L^1(T, R^+)$.

Предположения $H(V)$. Мнозначное отображение $V: T \times X \rightarrow X$ с замкнутыми значениями обладает следующими свойствами:

- (i) выполняется неравенство

$$d(\Theta, V(t, x)) < m_2(t) + n_2(t)\|x\| \quad \text{п. в.}, \quad (7)$$

$x \in X, m_2(\cdot), n_2(\cdot) \in L^1(T, R^+)$;

- (ii) отображение

$$(t, x) \rightarrow V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B}$$

слабо совместно измеримо;

(iii) для почти каждого $t \in T$ и любой точки $x \in X$ либо отображение $V(t, \cdot)$ имеет замкнутый график в точке x и множество $V(t, x)$ выпукло, либо сужение отображения $V(t, \cdot)$ на некоторую окрестность точки x является полунепрерывным снизу;

- (iv) для каждого ограниченного множества $D \subset X$ множество

$$V(t, D) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|D\|)\overline{B}$$

относительно компактно при почти всех $t \in T$, где $V(t, D) = \{\bigcup V(t, x); x \in D\}$.

Так как в (7) неравенство строгое, то для почти каждого $t \in T$ множество $V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B}$, $x \in X$, непусто. Поэтому предположение $H(V)$ (iv) носит содержательный характер.

Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются предположения $H(U)$ и $H(V)$. Тогда дифференциальное включение (1) имеет решение.

Отметим, что дифференциальное включение (1) с правой частью, в которой отображение $V(t, x)$ обладает различными свойствами полунепрерывности, изучается впервые.

Если $V(t, x) \equiv \Theta$, $t \in T$, $x \in X$, то как следствие мы получаем теорему существования решений дифференциального включения с невыпуклозначной

правой частью. Наиболее общие из известных результатов в этом направлении получены в работе [2].

Если $U(t, x) \equiv \Theta$, $t \in T$, $x \in X$, то мы получаем теорему существования решения дифференциального включения с правой частью, обладающей различными свойствами полунепрерывности. Как следует из неравенства (7), значениями отображения $V(t, x)$ могут быть неограниченные множества.

Дифференциальные включения в конечномерном пространстве с правой частью $F(t, x)$, обладающей различными свойствами полунепрерывности, изучались в [3]–[7], а в бесконечномерном пространстве — в [8]. Результаты работ [3]–[6] вытекают из теоремы 3.1 в [7]. В свою очередь, теорема 3.1 из [7] является конечномерным аналогом теоремы 1 настоящей работы при $U(t, x) \equiv \Theta$, $t \in T$, $x \in X$. Эта теорема дополняет теорему 8.9 из [8, гл. 2]. Отметим, что в зарубежных изданиях многозначные отображения с различными свойствами полунепрерывности называют “mixed semicontinuous mapping”.

§ 2. Основные обозначения и определения

Пусть $T = [0, a]$ — отрезок числовой полупрямой с мерой Лебега μ , X — сепарабельное банахово пространство, Y — метрическое пространство, cY — семейство всех непустых замкнутых подмножеств из Y , cbY — семейство всех ограниченных подмножеств из cY с метрикой Хаусдорфа $\text{haus}_Y(\cdot, \cdot)$ и $\text{int } Y$ — семейство всех непустых компактных подмножеств из Y . Для топологического векторного пространства Z через ω - Z мы будем обозначать пространство Z , наделенное слабой топологией. Если $D \subset Z$, то ω - D означает, что D наделено топологией, индуцированной топологией пространство ω - Z . Под $\overline{cb}D$ мы понимаем замкнутую выпуклую оболочку множества D .

Пусть Z, Y — метрические пространства и $F: Z \rightarrow Y$ — многозначное отображение с непустыми замкнутыми значениями.

Многозначное отображение F называется *полунепрерывным сверху в точке* z_0 , если для любого открытого множества $W \subset Y$, $F(z_0) \subset W$, существует окрестность $E(z_0)$ точки z_0 , такая, что $F(z) \subset W$ для всех $z \in E(z_0)$.

Многозначное отображение $F: Z \rightarrow Y$ *имеет замкнутый график в точке* z_0 , если для любых последовательностей $z_n \in Z$, $y_n \in F(z_n)$, $n \geq 1$, сходящихся к точкам $z_0 \in Z$, $y \in Y$, имеет место включение $y \in F(z_0)$.

Если отображение F полунепрерывно сверху в точке z_0 , то оно имеет замкнутый график в точке z_0 . Если для некоторой окрестности $E(z_0)$ точки z_0 существует компактное множество $K \subset Y$, такое, что $F(z) \subset K$ для всех $z \in E(z_0)$, то замкнутость графика отображения F в точке z_0 влечет за собой полунепрерывность сверху отображения F в точке z_0 .

Многозначное отображение F *полунепрерывно снизу в точке* z_0 , если для любого открытого множества $W \subset Y$, $F(z_0) \cap W \neq \emptyset$, существует окрестность $E(z_0)$ точки z_0 , такая, что $F(z) \cap W \neq \emptyset$ для всех $z \in E(z_0)$.

Известно, что отображение F полунепрерывно снизу в точке z_0 тогда и только тогда, когда для любого $y_0 \in F(z_0)$ и любой последовательности z_n , $n \geq 1$,

сходящейся к z_0 , существует последовательность $y_n \in F(z_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к y_0 .

Пусть Y — нормированное пространство и $\Phi: Z \rightarrow Y$ — многозначное отображение, значениями которого являются непустые выпуклые замкнутые множества с непустой внутренностью int . Если $F(z) \cap \Phi(z) \neq \emptyset$, $z \in Z$, отображения $F(z)$ и $\Phi(z)$ полунепрерывны снизу в точке z_0 и $F(z_0) \cap \text{int } \Phi(z_0) \neq \emptyset$, то отображение $z \rightarrow F(z) \cap \Phi(z)$ полунепрерывно снизу в точке z_0 .

Пусть $\mathcal{B}(X)$ есть σ -алгебра борелевских множеств из X и $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ — σ -алгебра на $T \times X$, порожденная множествами $\Lambda \times D$ с $\Lambda \in \Sigma$ и $D \in \mathcal{B}(X)$.

Многозначное отображение $F: T \times X \rightarrow X$ с непустыми замкнутыми значениями называется *совместно измеримым*, если множество

$$F^{-1}(W) = \{(t, x) \in T \times X; F(t, x) \cap W \neq \emptyset\}$$

является элементом σ -алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ для любого замкнутого множества $W \subset X$ [9]. Многозначное отображение $F: T \times X \rightarrow X$ с непустыми замкнутыми значениями называется *совместно слабо измеримым*, если множество $F^{-1}(W)$ является элементом σ -алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ для любого открытого множества $W \subset X$ [9]. Совместную измеримость часто называют $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ -измеримостью. Отметим, что из совместной измеримости следует слабая совместная измеримость [9], и, так как мера μ является полной, то определения измеримости и слабой измеримости для многозначного отображения $F: T \rightarrow X$ с непустыми замкнутыми значениями совпадают. Эти определения мы используем и для однозначных отображений.

Множество \mathcal{K} измеримых функций из T в X называется *разложимым*, если для любых $u, v \in \mathcal{K}$, $\Lambda \in \Sigma$ элемент $\chi(\Lambda)u + \chi(T \setminus \Lambda)v$ принадлежит множеству \mathcal{K} , где $\chi(\Lambda)$ — характеристическая функция множества Λ .

Через $C(T, X)$ мы обозначаем пространство всех непрерывных отображений из T в X с топологией равномерной сходимости на T , а $L^1(T, X)$ — это пространство интегрируемых по Бохнеру функций $f: T \rightarrow X$ с нормой

$$\|f\|_{L^1} = \int_t \|f(t)\| dt. \tag{8}$$

Измеримое многозначное отображение $F: T \rightarrow cbX$ назовем *интегрально ограниченным*, если существует функция $m(\cdot) \in L^1(T, R^+)$, такая, что

$$\|F(t)\| = \sup\{\|u\|; u \in F(t)\} \leq m(t) \quad \text{п. в.}$$

Пространство всех измеримых интегрально ограниченных отображений $F: T \rightarrow cbX$ будем обозначать через $L^1(T, cbX)$, а под $dcbL^1(T, X)$ мы понимаем совокупность всех замкнутых ограниченных разложимых множеств из $L^1(T, X)$.

Если $F(\cdot) \in L^1(T, cbX)$, то S_F — совокупность всех интегрируемых селекторов отображения $t \rightarrow F(t)$, т. е.

$$S_F = \{f(\cdot) \in L^1(T, X); f(t) \in F(t) \text{ п. в.}\}.$$

Хорошо известно (см. [9]), что если $F(\cdot) \in L^1(T, cbX)$, то $S_F \in dcbL^1(T, X)$.

График многозначного отображения $F: Z \rightarrow L^1(T, X)$ называется *слабо секвенциально замкнутым*, если для любой последовательности $z_n \in Z$, $n \geq 1$, сходящейся к z , и любой последовательности $y_n \in F(z_n)$, $n \geq 1$, сходящейся к y в слабой топологии пространства $L^1(T, X)$, имеет место включение $y \in F(z)$.

На пространстве $L^1(T, X)$ наряду со стандартной нормой (8) рассмотрим так называемую «слабую» норму [10]

$$\|f\|_{L^1} = \max_{t \in T} \left\| \int_0^t f(s) ds \right\|, \quad f(\cdot) \in L^1(T, X). \quad (9)$$

Пространство $L^1(T, X)$ с нормой (9) обозначается $|\omega|L^1(T, X)$, а $\omega L^1(T, X)$ — это пространство $L^1(T, X)$ со слабой топологией.

§ 3. Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы приведем ряд результатов, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть $\Gamma_i(\cdot) \in L^1(T, cbX)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\text{haus}_{L^1}(S_{\Gamma_1}, S_{\Gamma_2}) \leq \int_T \text{haus}(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)) dt. \quad (10)$$

Лемма 1 вытекает из утверждения 4.2 в [11].

Пусть $r(t)$, $t \in T$, — решение дифференциального уравнения

$$\dot{r}(t) = m(t) + n(t)r(t), \quad r(0) = r_0, \quad m(\cdot), n(\cdot) \in L^1(T, R^+). \quad (11)$$

Лемма 2. Если функция $x(\cdot) \in C(T, X)$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq r_0 + \int_0^t (m(\tau) + n(\tau)\|x(\tau)\|) d\tau, \quad t \in T, \quad (12)$$

то

$$\|x(t)\| \leq r(t), \quad t \in T. \quad (13)$$

Лемма непосредственно вытекает из свойств дифференциальных неравенств (см., например, теорему I.1.7 в [8]).

Измеримая по t и непрерывная по x функция $f: T \times X \rightarrow R^+$ называется *функцией Каратеодори* на ограниченных множествах из X , если для любого ограниченного множества $C \subset X$ существует функция $m_C \in L^1(T, R^+)$, такая, что $f(t, x) \leq m_C(t)$, $x \in C$, п. в.

Теорема 2. Пусть $F: T \times X \rightarrow \text{int } X$ — многозначное отображение, обладающее следующими свойствами:

(i) отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ совместно измеримо;

(ii) для почти всех $t \in T$ для каждого $x \in X$ либо отображение $F(t, \cdot)$ полунепрерывно сверху в точке x и множество $F(t, x)$ выпукло, либо сужение $F(t, \cdot)$ на некоторую окрестность точки x является полунепрерывным снизу;

(iii) существует интегрально ограниченная на ограниченных подмножествах из X функция Каратеодори $f: T \times X \rightarrow R^+$, такая, что $F(t, x) \cap f(t, x)\bar{B} \neq \emptyset$ для любого x при почти всех $t \in T$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset C(T, X)$ существует отображение $Q: K \rightarrow L^1(T, X)$ с замкнутыми выпуклыми значениями и со слабо секвенциально замкнутым графиком, такое, что для любого $x(\cdot) \in K$ и $v(\cdot) \in Q(x)$ почти всюду на T

$$v(t) \in F(t, x(t)), \quad \|v(t)\| \leq f(t, x(t)) + \varepsilon.$$

Теорема 2 представляет собой формулировку теоремы 6.6 из [8, гл. 2] и является бесконечномерным аналогом теоремы 2.1 в [7].

Хотя теорема 6.6 сформулирована для отображения $F: T \times X \rightarrow \text{int } X$, на самом деле она доказана для отображения $F: T \times Y \rightarrow \text{int } X$, где $Y = r\bar{B}$, $r \geq \sup\{\|x(\cdot)\|_{C(T, X)}; x(\cdot) \in K\}$. Поэтому теорема 2 справедлива и для отображения $F: T \times Y \rightarrow \text{int } X$ со свойствами (i)–(iii) на пространстве $T \times Y$, где Y — замкнутый шар пространства X с центром в точке Θ .

Теорема 3. Пусть множество $M \subset L^1(T, X)$ обладает следующими свойствами:

- (i) для почти каждого $t \in T$ множество $\{f(t); f(\cdot) \in M\} \subset X$ относительно компактно;
- (ii) существует функция $m(\cdot) \in L^1(T, R^+)$, такая, что $\|f(t)\| \leq m(t)$ п. в. для любого $f(\cdot) \in M$.

Тогда на множестве M топологии пространств $\omega\text{-}L^1(T, X)$ и $|\omega|\text{-}L^1(T, X)$ совпадают.

Доказательство. Пусть $S \subset M$ — счетное плотное подмножество и $\Gamma: T \rightarrow X$ — многозначное отображение, определенное по правилу

$$\Gamma(t) = \overline{\left\{ \bigcup f(t); f(\cdot) \in S \right\}}, \quad t \in T,$$

где черта сверху означает замыкание в X . Тогда $\Gamma(\cdot) \in L^1(T, cbX)$ и для любого $f(\cdot) \in M$ справедливо включение $f(t) \in \Gamma(t)$ п. в. [9].

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\mathcal{L}: L^1(T, X) \rightarrow C(T, X)$,

$$\mathcal{L}(f)(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad t \in T.$$

Он является непрерывным оператором из $\omega\text{-}L^1(T, X)$ в $\omega\text{-}C(T, X)$ [12, гл. IV, §4, п. 2, предложение 6].

Пусть $S_{\text{сб}\Gamma}$ — множество интегрируемых селекторов многозначного отображения $t \rightarrow \text{сб}\Gamma(t)$, которое является измеримым интегрально ограниченным и имеет выпуклые компактные значения. Тогда множество $S_{\text{сб}\Gamma}$ является выпуклым компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^1(T, X)$, а множество $\mathcal{L}(S_{\text{сб}\Gamma})$ — выпуклым компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}C(T, X)$.

Пусть $(\mathcal{A}) \int_0^t \overline{\text{co}}\Gamma(s) ds$, $t \in T$, — интеграл Аумана от многозначного отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}}\Gamma(t)$, который существует, и его значениями являются выпуклые компактные множества в пространстве X [8]. Из определения интеграла Аумана [13]

$$(\mathcal{A}) \int_0^t \overline{\text{co}}\Gamma(s) ds = \left\{ \int_0^t f(s) ds; f(\cdot) \in S_{\overline{\text{co}}\Gamma} \right\}$$

следует, что

$$\mathcal{L}(f)(t) \in (\mathcal{A}) \int_0^t \overline{\text{co}}\Gamma(s) ds, \quad t \in T, f(\cdot) \in S_{\overline{\text{co}}\Gamma}. \quad (14)$$

Из включения (14), компактности множеств $(\mathcal{A}) \int_0^t \overline{\text{co}}\Gamma(s) ds$, $t \in T$, интегральной ограниченности отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}}\Gamma(t)$, замкнутости множества $\mathcal{L}(S_{\overline{\text{co}}\Gamma})$ в пространстве $C(T, X)$ и теоремы Арцела–Асколи вытекает, что множество $\mathcal{L}(S_{\overline{\text{co}}\Gamma})$ является выпуклым компактом в пространстве $C(T, X)$. Тогда сужение отображения \mathcal{L} на множество $S_{\overline{\text{co}}\Gamma}$ является непрерывной биекцией компакта ω - $S_{\overline{\text{co}}\Gamma}$ на компакт $\mathcal{L}(\omega$ - $S_{\overline{\text{co}}\Gamma})$ в пространстве $C(T, X)$, т. е. гомеоморфизмом. Воспользовавшись формулой (9) и определением нормы на пространстве $C(T, X)$, мы установим, что на множестве $S_{\overline{\text{co}}\Gamma}$ топологии пространств ω - $L^1(T, X)$ и $|\omega|$ - $L^1(T, X)$ совпадают. Так как $\mathcal{M} \subset S_{\overline{\text{co}}\Gamma}$, то теорема доказана. \square

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(\cdot), v(\cdot) \in L^1(T, X). \quad (15)$$

Обозначим через $x(u; v)$ решение уравнения (15), которое имеет вид

$$x(u; v)(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t v(s) ds. \quad (16)$$

Обозначим через $\mathcal{T}(u; v)$ оператор, который любым $u(\cdot), v(\cdot) \in L^1(T, X)$ ставит в соответствие единственное решение $x(u; v)$ уравнения (16), т. е.

$$x(u; v)(t) = \mathcal{T}(u; v)(t). \quad (17)$$

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{T}(u; v)$ является непрерывным оператором из $L^1(T, X) \times |\omega|$ - $L^1(T, X)$ в $C(T, X)$.*

Лемма с очевидностью вытекает из равенств (16), (8) и определения нормы (9) в пространстве $|\omega|$ - $L^1(T, X)$.

Пусть $u(\cdot), v(\cdot) \in L^1(T, X)$. Рассмотрим многозначное отображение $t \rightarrow U(t, \mathcal{T}(u; v)(t))$. Из предположений $H(U)$ следует, что отображение $t \rightarrow U(t, \mathcal{T}(u; v)(t))$ является элементом пространства $L^1(T, cbX)$.

Поэтому множество

$$\Phi(u; v) = \{f(\cdot) \in L^1(T, X); f(t) \in U(t, \mathcal{T}(u; v)(t)) \text{ п. в.}\} \quad (18)$$

является элементом пространства $dbcL^1(T, X)$. Тем самым будет определено многозначное отображение $\Phi: L^1(T, X) \times L^1(T, X) \rightarrow dbcL^1(T, X)$, которое называется *многозначным оператором Немыцкого*.

На пространстве $L^1(T, X)$ рассмотрим числовую функцию

$$P(x) = \int_T \rho(t, x(t)) dt, \quad (19)$$

где

$$\rho(t, x(t)) = \left(\exp \left(-2 \int_0^t k(\tau) d\tau \right) \right) \|x(t)\|, \quad t \in T. \quad (20)$$

Здесь функция $k(\cdot)$ взята из неравенства (5).

Очевидно, что функция $P(x)$ определяет норму, эквивалентную норме $\|x\|_{L^1}$ пространства $L^1(T, X)$.

Расстояние по Хаусдорфу между множествами из пространства $cbL^1(T, X)$, когда $L^1(T, X)$ наделено нормой $P(x)$, будем обозначать через $\text{haus}_P(\cdot, \cdot)$.

Теорема 4. *Оператор Немыцкого $\Phi: L^1(T, X) \times L^1(T, X) \rightarrow cbL^1(T, X)$ обладает свойствами*

$$\text{haus}_{L^1}(\Phi(u_1; v_1), \Phi(u_2; v_2)) \leq L(\|u_1 - u_2\|_{L^1} + \|v_1 - v_2\|_{L^1}), \quad (21)$$

где

$$L = \int_T k(t) dt; \quad (22)$$

$$\text{haus}_P(\Phi(u_1; v), \Phi(u_2; v)) \leq \frac{1}{2}P(u_1 - u_2), \quad (23)$$

$v \in L^1(T, X)$, $u_i \in L^1(T, X)$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Из (5), (10), (16), (17) мы получаем

$$\begin{aligned} \text{haus}_{L^1}(\Phi(u_1; v_1), \Phi(u_2; v_2)) &\leq \int_T k(\tau) \|\mathcal{T}(u_1; v_1) - \mathcal{T}(u_2; v_2)(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_T k(\tau) (\|u_1 - u_2\|_{L^1} + \|v_1 - v_2\|_{L^1}) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь неравенство (21) вытекает из (22) и (24).

Докажем неравенство (23). Из (5), (15), (17) мы получаем, что

$$\text{haus}(U(t, \mathcal{T}(u_1; v)(t)), U(t, \mathcal{T}(u_2; v)(t))) \leq k(t) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \quad t \in T. \quad (25)$$

Воспользовавшись неравенством (25) и формулами (18)–(20), мы получим

$$\begin{aligned} &\text{haus}_P(\Phi(u_1; v), \Phi(u_2; v)) \\ &\leq \int_T \left(\exp \left(-2 \int_0^t k(\tau) d\tau \right) \right) k(t) \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \right) dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Проинтегрировав правую часть неравенства (26) по частям, мы приходим к неравенству

$$\text{haus}_P(\Phi(u_1; v), \Phi(u_2; v)) \leq \frac{1}{2} \int_T \left(\exp \left(-2 \int_0^t k(\tau) d\tau \right) \right) \|u_1(t) - u_2(t)\| dt. \quad (27)$$

Теперь неравенство (23) вытекает из (27), (19), (20). Теорема доказана. \square

Для фиксированной функции $v(\cdot) \in L^1(T, X)$ обозначим через $(\text{Fix } \Phi)(v)$ множество неподвижных точек оператора $\Phi(u; v)$.

Теорема 5. Пусть выполняются предположения $H(U)$. Тогда

(а) для любой функции $v \in L^1(T, X)$ множество $(\text{Fix } \Phi)(v)$ непусто;

(б) существует непрерывная функция $u: |\omega| - L^1(T, X) \rightarrow L^1(T, X)$, такая, что

$$u(v) \in (\text{Fix } \Phi)(v), \quad v \in L^1(T, X),$$

т. е.

$$u(v) \in \Phi(u(v); v), \quad v \in L^1(T, X). \quad (28)$$

Доказательство. Из неравенства (21) вытекает, что при фиксированной функции $u \in L^1(T, X)$ отображение $v \rightarrow \Phi(u; v)$ является полунепрерывным снизу отображением из $|\omega| - L^1(T, X)$ в $L^1(T, X)$ с замкнутыми ограниченными разложимыми значениями. Так как пространство $|\omega| - L^1(T, X)$ является сепарабельным метрическим пространством, то теорема 5 вытекает из теоремы 3.1 из [14] и неравенства (23), если v рассматривать как параметр. \square

§ 4. Априорные оценки

Пусть

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t), \quad n(t) = n_1(t) + n_2(t), \quad (29)$$

где $m_i(\cdot), n_i(\cdot), i = 1, 2$, — функции из неравенств (6), (7) и $r(t), r(0) = \|x_0\|$, — решение уравнения (11).

Положим

$$S_U = \{u \in L^1(T, X); \|u(t)\| \leq m_1(t) + n_1(t)r(t) \text{ п. в.}\}, \quad (30)$$

$$S_V = \{v \in L^1(T, X); \|v(t)\| \leq m_2(t) + n_2(t)r(t) \text{ п. в.}\}. \quad (31)$$

Пусть $x(u; v)(t), x(u; v)(0) = x_0$, — решение уравнения (15) и

$$\mathcal{T}(S_U; S_V)(t) = \{x(u; v)(t); u \in S_U, v \in S_V\}, \quad t \in T. \quad (32)$$

Воспользовавшись формулами (29)–(32), (16), мы получим

$$\|\mathcal{T}(S_U; S_V)(t)\| \leq r(t), \quad t \in T. \quad (33)$$

Согласно предположению $H(V)(iv)$, множество

$$V(t, r(a)\overline{B}) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|r(a)\|\overline{B}), \quad t \in T,$$

относительно компактно при почти каждом $t \in T$. Так как решение $r(t)$, $r(0) = \|x_0\|$, уравнения (11) является неубывающей функцией, то, согласно (33),

$$\mathcal{T}(S_U; S_V)(t) \subset r(a)\overline{B}, \quad t \in T.$$

Поэтому множество

$$V(t, \mathcal{T}(S_U; S_V)(t)) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|\mathcal{T}(S_U; S_V)(t)\|)\overline{B}$$

будет относительно компактным при почти всех $t \in T$.

Положим

$$W(t) = V(t, \mathcal{T}(S_U; S_V)(t)) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|\mathcal{T}(S_U; S_V)(t)\|)\overline{B}, \quad t \in T. \quad (34)$$

Тогда значениями многозначного отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}}W(t)$ при почти каждом $t \in T$ являются выпуклые компактные множества. Согласно (33), (34),

$$\|\overline{\text{co}}W(t)\| \leq m_2(t) + n_2(t)r(t). \quad (35)$$

Пусть

$$S_{\overline{\text{co}}W} = \{v \in L^1(T, X); v(t) \in \overline{\text{co}}W(t) \text{ п. в.}\} \quad (36)$$

Из предположения $H(V)$ (ii) следует, что отображение

$$t \rightarrow V(t, \mathcal{T}(u; v)(t)) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|\mathcal{T}(u; v)(t)\|)\overline{B}$$

при любых $u \in S_U$, $v \in S_V$ является слабо измеримым с замкнутыми значениями. Тогда из теоремы 5.6 в [5] вытекает, что это отображение имеет интегрируемые селекторы. Поэтому множество $S_{\overline{\text{co}}W(t)}$ обладает следующими свойствами:

(а) $S_{\overline{\text{co}}W}$ является непустым выпуклым компактным подмножеством пространства ω - $L^1(T, X)$;

(б) для любого $v \in S_{\overline{\text{co}}W}$ имеет место неравенство

$$\|v(t)\| \leq m_2(t) + n_2(t)r(t) \quad \text{п. в.};$$

(с) множество

$$S_{\overline{\text{co}}W}(t) = \{v(t); v \in S_{\overline{\text{co}}W}\} \subset X$$

при почти всех $t \in T$ — компакт.

Свойства множества $S_{\overline{\text{co}}W}$ вытекают из (34), (35) и компактности значений отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}}W(t)$.

В силу теоремы 5 и (28) существует непрерывная функция $u: |\omega|$ - $L^1(T, X) \rightarrow L^1(T, X)$, такая, что $u(v) \in \Phi(u(v); v)$, $v \in L^1(T, X)$. Воспользовавшись (18), мы получим, что

$$u(v)(t) \in U(t, \mathcal{T}(u(v); v)(t)) \quad \text{п. в.}, \quad v \in L^1(T, X). \quad (37)$$

Лемма 4. *Имеют место включения*

$$S_{\overline{\text{co}}W} \subset S_V, \quad u(S_{\overline{\text{co}}W}) \subset S_U. \quad (38)$$

Доказательство. Первое включение вытекает из (35), (31). Пусть $\hat{v} \in S_{\overline{c\omega}W}$. Тогда из (6), (16), (35), (36) вытекает неравенство

$$\|x(u(\hat{v}); \hat{v})(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t (m_1(\tau) + n_1(\tau)) \|x(u(\hat{v}); \hat{v})(\tau)\| d\tau + \int_0^t (m_2(\tau) + n_2(\tau)r(\tau)) d\tau, \quad t \in T. \quad (39)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{r}_1(t) = (m_1(t) + m_2(t) + n_2(t)r(t)) + n_1(t)r_1(t), \quad r(0) = r_0. \quad (40)$$

Из леммы 2 и (39), (40) вытекает, что

$$\|x(u(\hat{v}); \hat{v})(t)\| \leq r_1(t), \quad \hat{v} \in S_{\overline{c\omega}W}.$$

Воспользовавшись равенствами (29), мы получаем, что решение уравнения (40) совпадает с решением $r(t)$ уравнения (11). Следовательно,

$$\|x(u(\hat{v}); \hat{v})(t)\| \leq r(t), \quad \hat{v} \in S_{\overline{c\omega}W}. \quad (41)$$

Тогда из (37), (41) и (6) вытекает, что

$$\|u(\hat{v})(t)\| \leq m_1(t) + n_1(t)r(t), \quad \hat{v} \in S_{\overline{c\omega}W}.$$

Следовательно, согласно (30), имеет место второе включение в (38). Лемма доказана. \square

§ 5. Основные результаты

Рассмотрим оператор $\mathcal{T}(u(v); v)$ из $S_{\overline{c\omega}W}$ в $C(T, X)$. Из свойств (а)–(с) множества $S_{\overline{c\omega}W}$, приведенных в предыдущем параграфе, и теоремы 3 вытекает, что на множестве $S_{\overline{c\omega}W}$ топологии пространств $|\omega|-L^1(T, X)$ и $\omega-L^1(T, X)$ совпадают. Поэтому $u(v)$ будет непрерывным отображением из $\omega-S_{\overline{c\omega}W}$ в $L^1(T, X)$. Воспользовавшись леммой 3, мы получим, что $\mathcal{T}(u(v); v)$ является непрерывным оператором из $\omega-S_{\overline{c\omega}W}$ в $C(T, X)$.

Поэтому множество

$$\mathcal{K} = \{x(u(v); v); v \in S_{\overline{c\omega}W}\} \quad (42)$$

является компактом в пространстве $C(T, X)$.

Пусть

$$M = \sup\{\|x(u(v); v)\|_{C(T, X)}; v \in S_{\overline{c\omega}W}\}, \quad Y = M \cdot \overline{B}.$$

Рассмотрим многозначное отображение $F: T \times Y \rightarrow X$,

$$F(t, x) = V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B}, \quad x \in Y. \quad (43)$$

Лемма 5. *Многозначное отображение $F: T \times Y \rightarrow X$ обладает свойствами (i)–(iii), сформулированными в теореме 2.*

Доказательство. Из предположения $H(V)(iv)$ вытекает, что при почти каждом t значениями отображения $F(t, x)$, $x \in Y$, являются компактные множества.

Докажем сначала свойство (ii). Пусть $t \in T$ и $x_0 \in Y$ — точка, в которой отображение $x \rightarrow V(t, x)$ имеет замкнутый график и множество $V(t, x_0)$ выпукло. Так как отображение $x \rightarrow (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B}$ имеет замкнутый график в любой точке пространства Y , то отображение $x \rightarrow F(t, x)$ имеет замкнутый график в точке x_0 и множество $F(t, x_0)$ выпукло. Из предположения $H(V)(iv)$ вытекает, что множество $F(t, Y)$ относительно компактно. Так как $F(t, x) \in F(t, Y)$, $x \in Y$, то отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно сверху в точке x_0 и множество $F(t, x_0)$ выпукло.

Пусть $t \in T$ и $x_0 \in Y$ — точка, в некоторой окрестности $W(x_0) \subset X$ которой отображение $x \rightarrow V(t, x)$ полунепрерывно снизу. Обозначим через $\text{int}(m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B}$, $x \in Y$, внутренность множества $(m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B}$. Из неравенства (7) вытекает, что

$$V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)B = V(t, x) \cap \text{int}(m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B} \neq \emptyset, \quad x \in Y. \quad (44)$$

Так как отображение $x \rightarrow (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B}$ полунепрерывно снизу в любой точке пространства Y и его значениями являются выпуклые множества, то из (44) вытекает, что отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно снизу в окрестности $W(x_0) \cap Y$ точки x_0 из пространства Y . Таким образом, отображение $F(t, x)$ обладает свойством (ii).

Докажем свойство (i). Из предположения $H(V)(ii)$ вытекает, что для любого $x \in Y$ отображение $t \rightarrow F(t, x)$ с замкнутыми значениями слабо измеримо и, следовательно, измеримо [9]. Воспользовавшись теоремой 5.6 из [9], мы получаем, что множество

$$S_F(x) = \{f(\cdot) \in L^1(T, X); f(t) \in F(t, x) \text{ п. в.}\} \quad (45)$$

является непустым замкнутым ограниченным подмножеством пространства $L^1(T, X)$ и, согласно теореме 3.1 из [15],

$$F(t, x) = \{f(t); f(\cdot) \in S_F(x)\} \text{ п. в.} \quad (46)$$

В соответствии с предположением $H(V)(iv)$ для почти каждого t множество $\Phi(t) = F(t, Y)$ относительно компактно. Пусть

$$S_\Phi = \{f(\cdot) \in L^1(T, X); f(t) \in \Phi(t)\} \text{ п. в.} \quad (47)$$

Так как $F(t, x) \subset \Phi(t)$ п. в., то $S_F(x) \subset S_\Phi$, $x \in Y$. Поэтому множество S_Φ является непустым и для любого $f(\cdot) \in S_\Phi$ будет иметь место неравенство

$$\|f(t)\| \leq m_2(t) + n_2(t)M \text{ п. в.} \quad (48)$$

Пусть $S_{\Phi}^* \subset S_{\Phi}$ — счетное плотное подмножество и

$$Z(t) = \overline{\left\{ \bigcup f(t); f(\cdot) \in S_{\Phi}^* \right\}}, \quad t \in T, \quad (49)$$

где черта сверху означает замыкание в X .

Тогда отображение $t \rightarrow Z(t)$ в соответствии с теоремой 5.6 из [9] и неравенством (49) измеримо, интегрально ограничено и имеет компактные значения.

Обозначим через $b\bar{c}oZ(t)$ замкнутую выпуклую уравновешенную оболочку множества $Z(t)$. Тогда отображение $t \rightarrow b\bar{c}oZ(t)$ измеримо, интегрально ограничено и имеет выпуклые компактные значения. Из (46), (47) и (49) вытекает, что

$$\left\{ \bigcup F(t, x), x \in Y \right\} \subset b\bar{c}oZ(t) \quad \text{п. в.} \quad (50)$$

Пусть $\Lambda \in \Sigma$, $\mu(T \setminus \Lambda) = 0$ таково, что включение (50) выполняется для всех $t \in \Lambda$. Так как отображение $t \rightarrow b\bar{c}oZ(t)$ интегрируемо по Бохнеру [8], то для него справедлив аналог теоремы Лузина, относящийся к измеримым функциям. Согласно этой теореме, существует возрастающая по включению последовательность замкнутых множеств $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n+1} \subset \dots \subset T$, такая, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \subset \Lambda$, $\mu(\Lambda \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) = 0$ и сужение отображения $b\bar{c}oZ(t)$ на T_n непрерывно в метрике Хаусдорфа $\text{haus}(\cdot, \cdot)$. Поскольку значениями отображения $t \rightarrow b\bar{c}oZ(t)$ являются компакты, для каждого $n \geq 1$ множество $C_n = \{ \bigcup b\bar{c}oZ(t); t \in T_n \}$ является компактом. Поэтому множество $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ будет σ -компактным.

Рассмотрим многозначное отображение $F^*: T \times Y \rightarrow x$ с компактными значениями, определенное по правилу

$$F^*(t, x) = \begin{cases} F(t, x), & t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n, x \in Y, \\ \emptyset, & t \in T \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n, x \in Y. \end{cases}$$

Тогда отображение $(t, x) \rightarrow F^*(t, x)$ является слабо совместно измеримым. Так как $F^*(t, x) \subset C$, $t \in T$, $x \in X$, то из утверждения (ii) в теореме 3.5 из [9] вытекает, что отображение $(t, x) \rightarrow F^*(t, x)$ является совместно измеримым. Поскольку $F^*(t, x) = F(t, x)$, $t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, $x \in Y$, и $\mu(T \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) = 0$, для любой функции $x: T \rightarrow Y$ отображения $t \rightarrow F^*(t, x(t))$ и $t \rightarrow F(t, x(t))$ почти всюду совпадают. Поэтому отображения $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ и $(t, x) \rightarrow F^*(t, x)$ отождествляют. Тем самым свойство (i) доказано.

Свойство (iii) вытекает из неравенства (7), если положить $f(t, x) = m_2(t) + n_2(t)\|x\|$. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 1. Пусть \mathcal{K} — множество, определенное равенством (42). Из теоремы 3 и леммы 5 вытекает, что существует многозначное отображение $Q: \mathcal{K} \rightarrow L^1(T, X)$ с замкнутыми выпуклыми значениями и со слабо секвенциально замкнутым графиком, такое, что для любого $v \in S_{\bar{c}oW}$ и любого $z(\cdot) \in Q(\mathcal{T}(u(v); v))$ имеет место включение

$$z(t) \in F(t, \mathcal{T}(u(v); v)(t)) \quad \text{п. в.} \quad (51)$$

Из (43), (38), (34), (36) и (51) мы получаем, что имеет место включение

$$Q(v) = Q(\mathcal{T}(u(v), v)) \subset S_{\text{co}W}, \quad v \in S_{\text{co}W}. \quad (52)$$

Так как отображение $v \rightarrow \mathcal{T}(u(v); v)$ является непрерывным отображением из $\omega\text{-}S_{\text{co}W}$ в $C(T, X)$ и множество $S_{\text{co}W}$ является выпуклым метризуемым и компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^1(T, X)$, то, согласно (52), отображение $v \rightarrow Q(v)$ является полунепрерывным сверху отображением из $\omega\text{-}S_{\text{co}W}$ в $\omega\text{-}S_{\text{co}W}$ с выпуклыми компактными значениями.

Согласно теореме Ки Фана [16, гл. 3, §6.6], существует неподвижная точка v_* отображения $v \rightarrow Q(v)$, т. е.

$$v_* \in Q(v_*). \quad (53)$$

Положим $u_* = u(v_*)$; $x(u_*, v_*) = \mathcal{T}(u(v_*); v_*)$. Тогда из (53), (51) вытекает, что

$$v_*(t) \in F(t, x(u_*; v_*))(t) \quad \text{п. в.} \quad (54)$$

Воспользовавшись (54), (42), (37) и (15), мы получим

$$\begin{aligned} \dot{x}(u_*; v_*)(t) &= u_*(t) + v_*(t) \quad \text{п. в.}, \\ u_*(t) \in U(t, x(u_*; v_*)(t)) \quad \text{п. в.}, \quad v_*(t) \in V(t, x(u_*; v_*)(t)) \quad \text{п. в.} \end{aligned}$$

Следовательно, в соответствии с (2)–(4) тройка $(x(u_*; v_*)(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ является решением включения (1). Теорема доказана. \square

В заключение выясним, какими свойствами должно обладать отображение $V(t, x)$, чтобы предположение $H(V)$ (ii) выполнялось автоматически. Это происходит в двух случаях:

(а) отображение $(t, x) \rightarrow V(t, x)$ совместно слабо измеримо и значениями этого отображения являются компактные множества;

(б) отображение $(t, x) \rightarrow V(t, x)$ совместно слабо измеримо и пространство X конечномерно.

Пусть $\Phi(t, x) = (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\bar{B}$ и $d(y, \phi(t, x))$ — расстояние от точки $y \in X$ до множества $\Phi(t, x)$. Из определения отображения $\Phi(t, x)$ вытекает, что для фиксированного $y \in X$ отображение $t \rightarrow d(y, \Phi(t, x))$, $x \in X$, измеримо, а отображение $x \rightarrow d(y, \Phi(t, x))$ непрерывно.

Тогда из леммы 5.3 статьи [9] вытекает, что функция $(t, x) \rightarrow d(y, \Phi(t, x))$ совместно измерима. Поэтому в соответствии с теоремой 3.3 из [9] отображение $(t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ является совместно слабо измеримым с замкнутыми значениями. Теперь из теоремы 4.1 в [9] и компактности значений отображения $V(t, x)$ мы получаем, что отображение $(t, x) \rightarrow V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\bar{B}$ совместно слабо измеримо.

Во втором случае это утверждение вытекает из той же теоремы 4.1 и компактности значений совместно слабо измеримого отображения $(t, x) \rightarrow \Phi(t, x)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Springer Netherlands, Leyden, 1976.
- [2] А. А. Толстоногов, *Существование и релаксация решений дифференциальных включений с неограниченной правой частью в банаховом пространстве*, Сиб. матем. журн., **58**:4 (2017), 937–953.
- [3] C. Olech, *Existence of solutions of non-convex orientor fields*, Boll. Unione Mat. Ital. IV, **11**:3 suppl. (1975), 189–197.
- [4] S. Lojasiewicz, *Some theorems of Scorza-Draconi type for multifunctions with applications to the problem of existence of solutions for differential multivalued equations*, Math. Control Theory, **14** (1985), 625–643.
- [5] C. J. Himmelberg, F. S. Van Vleck, *Existence of solutions for generalized differential equations with unbounded right-hand side*, J. Differential Equations, **61**:3 (1986), 295–320.
- [6] A. Fryszkowski, L. Gorniewicz, *Mixed semicontinuous mappings and their applications to differential inclusions*, Set-Valued Anal., **8**:3 (2000), 203–217.
- [7] А. А. Толстоногов, *О решениях дифференциального включения с неограниченной правой частью*, Сиб. матем. журн., **29**:5 (1988), 212–225.
- [8] A. Tolstonogov, *Differential inclusions in Banach space*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [9] C. J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math., **87** (1975), 53–72.
- [10] A. Alexiewicz, *Linear functionals on Denjoy-integrable functions*, Colloq. Math., **1** (1948), 289–293.
- [11] А. А. Толстоногов, D. A. Tolstonogov, *L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Existence theorems*, Set-Valued Anal., **4**:2 (1996), 173–203.
- [12] Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства*, ИЛ, М., 1959.
- [13] R. J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl., **12**:1 (1965), 1–12.
- [14] А. А. Толстоногов, *L_p -непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. I. Теоремы существования*, Сиб. матем. журн., **40**:3 (1999), 695–709.
- [15] F. Hiai, H. Umegaki, *Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions*, J. Multivariate Anal., **7**:1 (1977), 149–182.
- [16] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969.

А. А. Толстоногов

Институт динамики систем и теории управления
им. В. М. Матросова Сибирского отделения
Российской академии наук, Иркутск, Россия
E-mail: aatol@icc.ru

Поступила в редакцию
28 ноября 2019 г.
После доработки
13 февраля 2020 г.
Принята к публикации
27 февраля 2020 г.