

Общероссийский математический портал

С. А. Кочетков, В. А. Уткин, Вихревые алгоритмы в задаче управления двигателем постоянного тока,  
*Пробл. управл.*, 2014, выпуск 5, 20–27

<https://www.mathnet.ru/pu874>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

20 мая 2025 г., 08:59:42



# ВИХРЕВЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА<sup>1</sup>

С.А. Кочетков, В.А. Уткин

Для электромеханических объектов разработаны новые вихревые алгоритмы (англ. vortex algorithms) управления в классе разрывных функций. Отмечено, что отличительная особенность этих алгоритмов состоит в обеспечении инвариантности в асимптотике выходных переменных объекта управления к несогласованным (не принадлежащим пространству управлений), недоступным для измерения возмущениям. Вихревые алгоритмы применены в задаче слежения за заданным угловым положением ротора двигателя постоянного тока с неизвестным моментом нагрузки.

**Ключевые слова:** двигатель постоянного тока, внешнее возмущение, инвариантность, асимптотика, наблюдатель состояния, вибролинеаризация.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория релейных систем [1] широко применяется для синтеза систем управления электроприводами различного типа [1–5]. Тот факт, что современные электроприводы управляются инверторами напряжения, имеющими заведомо ключевую природу функционирования, делает естественным применение теории релейных систем управления для данного класса объектов. В частности, применение теории систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме [6], обеспечивает декомпозицию общего движения замкнутой системы на временные этапы:

— этап попадания на многообразие скольжения (быстрые движения);

— движение вдоль этого многообразия (медленные движения),

а также инвариантность медленных движений к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям, действующим по каналам управления.

Отметим, что непосредственное использование разрывных управлений не обеспечивает инвариантность к несогласованным (не принадлежащим пространству управлений) внешним и параметри-

ческим возмущениям. Один из способов обеспечения инвариантности выходных переменных в системах с несогласованными возмущениями заключается в использовании в обратной связи оценок возмущений, полученных с помощью наблюдателей на скользящих режимах [7, 8]. Однако благодаря низкочастотным фильтрам в таких наблюдателях в замкнутой системе управления возникают малые динамики, что приводит к снижению частоты переключений релейных элементов и, следовательно, к ошибкам регулирования.

В данной работе предложено альтернативное решение проблемы обеспечения инвариантности в асимптотике выходных переменных при действии на систему несогласованных возмущений широкого класса. Преимущества разработанного подхода продемонстрированы в задачах управления и наблюдения простейшей электромеханической системой — электроприводом постоянного тока.

Работа имеет следующую структуру. В § 1 представлен новый способ синтеза обратной связи на основе вихревых<sup>2</sup> алгоритмов, обеспечивающей инвариантность выходных переменных к несогласованным возмущениям. В § 2 описана модель и формализована постановка задачи управления

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-08-13105-офи-м-ржд, 14-01-31190-мол-а).

<sup>2</sup> Название «вихревые...» объясняется тем, что изображающая точка системы описывает вращательные затухающие во времени колебания, график которых напоминает воронку.



двигателем постоянного тока (ДПТ) с неизвестным моментом нагрузки. В § 3 на основе вихревых алгоритмов решаются проблемы синтеза закона управления и наблюдателя состояния. В § 4 приведены результаты моделирования разработанной системы управления ДПТ, демонстрирующие эффективность представленного способа синтеза инвариантной системы слежения.

### 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим каноническую систему второго порядка при воздействии внешних несогласованных возмущений вида

$$\dot{y}_1 = y_2 + f_1(t), \quad \dot{y}_2 = u + f_2(t), \quad (1)$$

где  $y_1, y_2$  — измеряемые фазовые переменные,  $y_1$  — выходная, регулируемая переменная,  $u$  — управление,  $f_1(t), f_2(t)$  — внешние возмущения, которые полагаются неизвестными ограниченными функциями времени с ограниченными производными:  $|f_1(t)| \leq F_1 = \text{const} > 0, |f_2(t)| \leq F_2 = \text{const} > 0, |\dot{f}_1(t)| \leq \bar{F}_1 = \text{const} > 0, |\dot{f}_2(t)| \leq \bar{F}_1 = \text{const} > 0, |\dot{f}_1(t)| \leq \tilde{F}_2 = \text{const} > 0, |\dot{f}_1(t)| \leq \tilde{F}_1 = \text{const} > 0.$

Ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей асимптотическую стабилизацию выходной переменной системы (1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t)| = 0.$$

Для решения данной задачи выполним пошаговую процедуру синтеза обратной связи в соответствии с методологией блочного подхода [9].

*Шаг 1.* С помощью смешанной замены переменных  $\bar{y}_2 = y_2 + f_1(t)$  приведем систему (1) к каноническому виду

$$\dot{y}_1 = \bar{y}_2, \quad \dot{\bar{y}}_2 = u + \dot{f}_1(t) + f_2(t). \quad (2)$$

*Шаг 2.* Сформируем вихревой закон управления по известным фазовым переменным системы (1) в виде

$$u = -\beta y_1 - \alpha y_2 - M \text{sign}(y_1), \quad M = \text{const} > 0, \quad \alpha, \beta = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в уравнения (2), получим

$$\dot{y}_1 = \bar{y}_2, \quad \dot{\bar{y}}_2 = -\beta y_1 - \alpha \bar{y}_2 - M \text{sign}(y_1) + \xi(t), \quad (4)$$

где  $\xi(t) = \alpha f_1(t) + \dot{f}_1(t) + f_2(t).$

С учетом ограничений на внешние возмущения получим оценки неопределенной составляющей  $\xi(t)$  и ее производной:

$$|\xi(t)| \leq \Sigma, \quad |\dot{\xi}(t)| \leq \bar{\Sigma}, \quad (5)$$

где  $\Sigma = \alpha F_1 + F_2 + \bar{F}_1, \bar{\Sigma} = \alpha F_1 + \bar{F}_2 + \tilde{F}_1.$

Сформулируем основной результат работы в виде теоремы.

**Теорема 1.** Пусть в замкнутой системе (4) выполнены условия:

- 1) переменная  $\xi(t)$  удовлетворяет ограничениям (5);
- 2) параметры  $\alpha, M$  алгоритма управления (3) выбраны согласно неравенствам

$$M > \Sigma, \quad \alpha(M - \Sigma) > 2\bar{\Sigma}.$$

Тогда замкнутая система (4) экспоненциально устойчива. ♦

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

**Замечание.** В рамках классического подхода [6] организация скользящего режима на поверхности  $s = cy_1 + y_2, c = \text{const} > 0$  с помощью разрывного управления  $u = -M \text{sign}(s), M = \text{const} > 0$  приводит к движению по многообразию  $s = 0,$  описываемому уравнением  $\dot{y}_1 = -cy_1 + f_1(t).$  Как видим, инвариантность выходной переменной  $y_1$  системы (1) к несогласованному возмущению  $f_1(t)$  не обеспечивается. ♦

Далее алгоритмы вида (3) применяются в задачах управления ДПТ.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Рассмотрим математическую модель ДПТ с постоянным возбуждением вида [5]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}[x_3 x_4 - m_L(t)], \\ \dot{x}_3 &= a_{32}(u - x_2 x_4 - a_{31} x_3), \quad \dot{x}_4 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x_1$  — угол поворота вала двигателя, рад,  $x_2$  — угловая скорость, рад/с,  $x_3$  — ток якоря, А,  $x_4$  — магнитный поток, Вб,  $u$  — напряжение на якоре, В,  $m_L(t)$  — переменный момент нагрузки, Н·м, который трактуется как внешнее несогласованное возмущение,  $a_{21}$  — величина, обратная моменту инерции двигателя,  $1/(\text{кг} \cdot \text{м}^2), a_{31}$  — сопротивление обмотки якоря, Ом,  $a_{32}$  — величина, обратная значению индуктивности якоря,  $1/\text{Гн}, M_e = x_3 x_4$  — электрический момент, Н·м.

При синтезе систем управления электроприводами, как правило, предполагается, что момент нагрузки является выходом динамической модели (генератора возмущений)

$$\dot{w} = Ww, \quad m_L = h^T w, \quad w \in R^q, \quad W \in R^{q \times q}, \\ h^T \in R^{1 \times q},$$

с известными матрицами  $W$ ,  $h^T$  и неизвестными начальными условиями.

Такой подход позволяет описывать различные возмущения, встречающиеся на практике. Например, при  $W = O$ , где  $O$  — нулевая матрица, момент нагрузки постоянный и неизвестный. При соответствующем выборе модели возмущений можно сгенерировать гармонический сигнал заданной частоты и др. Непрактичность такого подхода обусловлена тем, что в процессе функционирования реальный момент нагрузки может не соответствовать принятой модели.

В данной работе предполагается, что момент нагрузки является неизвестной ограниченной функцией времени и механических координат  $x_1$ ,  $x_2$  с ограниченной полной производной. Введение зависимости момента нагрузки от координат позволяет расширить класс допустимых возмущений и учитывать, например, вентиляторную нагрузку, вязкое трение и др. [5].

Далее предполагается выполнение условий:

1) на переменные системы (6) наложены естественные физические ограничения  $|x_2| \leq X_2$ ,  $|x_3| \leq X_3$ ,  $|x_4| \leq X_4$ ,  $|u| \leq U$ ;

2) класс функций, описывающих момент нагрузки, удовлетворяет неравенствам

$$|m_L(t, x_1, x_2)| \leq M_{1L}, \quad |\dot{m}_L(t, x_1, x_2)| \leq M_{2L}, \\ |\ddot{m}_L(t, x_1, x_2)| \leq M_{3L},$$

где константы  $M_{iL} > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , известны;

3) из последних неравенств имеем ограничения на производные вектора состояния

$$|\dot{x}_1| \leq X_2, \quad |\dot{x}_2| \leq \dot{X}_2 = a_{21}(X_3 X_4 + M_{1L}), \\ \dot{x}_3 \leq \dot{X}_3 = a_{32}(U + X_2 X_4 + a_{31} X_3).$$

В качестве цели управления рассматривается одна из основных задач управления ДПТ: отработка заданного сигнала  $x_{1r}(t)$  по углу поворота вала двигателя:

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t) - x_{1r}(t) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Предполагается, что заданный сигнал  $x_{1r}(t)$  описывается гладкой ограниченной функцией времени, производные которой до четвертого порядка существуют и ограничены.

Для решения поставленной задачи слежения (7) в § 3 описана пошаговая процедура синтеза обратной связи в рамках блочного подхода [9], который заключается в последовательном решении элементарных задач стабилизации невязок между фактическими и выбранными значениями фиктивных управлений, в качестве которых рассматриваются фазовые переменные.

### 3. БАЗОВЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ НА РЕЛЕЙНЫХ ВИХРЕВЫХ АЛГОРИТМАХ

Базовый закон управления ДПТ разработан в предположении, что все переменные системы (6) доступны для измерений.

*Шаг 1.* В первом уравнении системы (6), записанном относительно ошибки слежения (7)  $\dot{\bar{x}}_1 = x_2 - \dot{x}_{1r}$ , решается элементарная задача выбора стабилизирующей локальной связи. В качестве фиктивного управления принимается фазовая переменная  $x_2$ , выбираемая в виде  $x_2 = -k_1 \bar{x}_1 + \dot{x}_{1r}$ , где  $k_1 > 0$  — коэффициент обратной связи, обеспечивающий желаемое собственное движение в замкнутой подсистеме

$$\dot{\bar{x}}_1 = -k_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2. \quad (8)$$

На втором шаге решается задача стабилизация невязки между фактическим  $x_2$  и выбранным фиктивным управлением

$$\bar{x}_2 = x_2 + k_1 \bar{x}_1 - \dot{x}_{1r} \rightarrow 0. \quad (9)$$

*Шаг 2.* С учетом уравнений (6) составим дифференциальное уравнение относительно невязки (9)

$$\dot{\bar{x}}_2 = a_{21} x_3 x_4 + \xi_1(t), \quad (10)$$

где  $\xi_1(t) = a_{21} m_L - k_1^2 \bar{x}_1 + k_1 \bar{x}_2 - \ddot{x}_{1r}$ .

*Шаг 3.* Запишем дифференциальное уравнение относительно новой переменной  $\bar{x}_3 = a_{21} x_3 x_4 + \xi_1(t)$  с учетом выражений (6), (8) и (9) в предположении, что поток намагничивания постоянен ( $x_4 = \text{const} > 0$ ):

$$\dot{\bar{x}}_3 = -a_2 \bar{x}_2 - a_3 \bar{x}_3 + b_0 u + \xi_2(t), \quad (11)$$



где  $b_0 = a_{21}a_{32}x_4$ ,  $a_2 = (k_1^2 + a_{21}a_{32}x_4^2)$ ,  $a_3 = (a_{31}a_{32} - k_1)$ ,  $\xi_2(t) = k_1(k_1^2 + a_{21}a_{32}x_4^2)\bar{x}_1 - a_{21}a_{32}x_4^2 \dot{x}_{1r} - \bar{x}_{1r} + a_{31}a_{32}\xi_1(t) + a_{21}\dot{m}_L$ .

Выберем управляющее воздействие  $u_1$  в виде

$$b_0 u = -(L_\alpha - a_3)a_{21}x_4x_3 - M \text{sign}(\bar{x}_2), \quad (12)$$

где  $L_\alpha = \text{const} > 0$ ,  $M = \text{const} > 0$  — параметры закона управления, выбор которых поясним далее.

Введем обозначение  $\xi(t) = (L_\alpha - a_3)\xi_1(t) + \xi_2(t)$ . Для данной переменной и ее производной согласно введенным ограничениям на задающее и возмущающее воздействия имеем оценки

$$|\xi(t)| \leq \Sigma, \quad |\dot{\xi}(t)| \leq \bar{\Sigma}, \quad (13)$$

где  $\Sigma$ ,  $\bar{\Sigma}$  — некоторые положительные константы.

В силу теоремы 1 сформулируем результат: при выполнении условий

$$M > \Sigma, \quad L_\alpha = \alpha, \quad \alpha(M - \Sigma) > 2\bar{\Sigma}$$

переменные замкнутой системы (8), (10)—(12) экспоненциально сходятся к нулю независимо от внешнего возмущения.

Отметим, что в замкнутой системе (8), (10)—(12) существует жесткая взаимосвязь между скоростью сходимости невязок и значением параметра  $a_2$ . Если значение параметра  $a_2$  и амплитуды  $M$  фиксируются из конструктивных соображений, то скорость сходимости переменных системы существенно ограничивается.

Следующий результат показывает, что скорость сходимости в некоторой области может быть существенно увеличена путем соответствующего выбора параметра  $\alpha$  закона управления (12).

Введем обозначение

$$\xi(t) = (L_\alpha - a_3)\xi_1(t) + \xi_2(t) - a_2\bar{x}_2, \quad (14)$$

для данной переменной согласно введенным ограничениям можно получить оценки типа (13).

Применительно к поставленной задаче управления ДПТ результаты из работы [10] могут быть сформулированы в следующем виде.

**Теорема 2.** Пусть в замкнутой системе (8), (10)—(12) выполнены условия:

- 1) переменная  $\xi(t)$  из выражения (14) удовлетворяет ограничениям (13);
- 2) параметры алгоритма управления (12) выбраны согласно неравенствам  $L_\alpha = \alpha$ ,  $M > \Sigma$ ,  $\alpha(M - \Sigma) > \bar{\Sigma}$ .

Тогда справедливы утверждения:

1) переменная  $\bar{x}_1$  асимптотически инвариантна к возмущению  $\xi(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_1 = 0$ ;

2) существует конечное время  $t_r$ , такое, что при  $t \geq t_r$  для переменных  $\bar{x}_2(t)$ ,  $\bar{x}_3(t)$  замкнутой системы (8), (10)—(12) справедливы оценки

$$|\bar{x}_2(t)| \leq X_2 e^{-\bar{\gamma}(t-t_r)}, \quad |\bar{x}_3(t)| \leq X_3 e^{-\frac{\bar{\gamma}}{2}(t-t_r)},$$

где  $\bar{\gamma}$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  — некоторые положительные константы. ♦

Закон управления (12) предполагает применение демпфирования в контуре обратной связи путем введения члена  $-(L_\alpha - a_3)a_{21}x_4x_3$ . Отметим, что на практике при решении задач управления электроприводами управляющие воздействия априори имеют ключевую природу. Связано это, прежде всего, с тем, что в таком режиме работы на ключевых инверторах рассеивается наименьшее количества тепла. Использование непрерывного управления весьма затруднительно на практике, особенно для двигателей большой мощности. Возникает проблема реализации разработанного закона управления (12), которая может быть решена двумя способами.

1. Рассеивание энергии, используемое в алгоритме управления (12), может быть реализовано на основе введения добавочного резистора в цепь якоря двигателя. В этом случае часть мощности, необходимой для придания замкнутой системе необходимых динамических свойств, будет рассеиваться на этом добавочном сопротивлении. Его сопротивление будет определяться желаемой скоростью сходимости невязок к нулю, которая задается коэффициентом  $\bar{\gamma}$  (см. теорему 2).

2. Недостаток первого способа заключается в зависимости коэффициента затухания  $\bar{\gamma}$  замкнутой системы от температуры, что приводит к необходимости охлаждения добавочного резистора либо регулировки его сопротивления. В следующей теореме показывается, что диссипацию энергии можно обеспечить благодаря двухуровневому ключевому преобразователю энергии. Для получения диссипативной компоненты применяется метод вибролинеаризации характеристики реле высокочастотным сигналом. Рассмотрим один из вариантов реализации подобного алгоритма управления

$$b_0 u = -M_2 \text{sign}(x_3 + \delta(t)) - M_1 \text{sign}(\bar{x}_2), \quad (15)$$

где  $M_1 = \text{const} > 0$ ,  $M_2 = \text{const} > 0$  — параметры двухуровневого ключевого инвертора,  $\delta(t)$  — вибросигнал вида

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{2\delta\omega}{\pi}t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}, \\ 2\delta - \frac{2\delta\omega}{\pi}t, & \frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{3\pi}{2\omega}, \\ -4\delta + \frac{2\delta\omega}{\pi}t, & \frac{3\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}, \end{cases} i = \overline{1, p},$$

где  $\delta = \text{const} > 0$  — амплитуда,  $\omega = \text{const} > 0$  — частота вибросигнала.

Как показано в работах [11–13], при определенном выборе параметров вибросигнала  $\delta(t)$  действие реле  $M_2 \text{sign}(\bar{x}_3 + \delta(t))$  (первой компоненты управляющего воздействия (15)) на замкнутую систему (8), (10), (11), (15) эквивалентно линейной обратной связи  $(M_2/\delta)x_3$ . Опираясь на результаты теоремы 2, приведем без доказательства следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть в замкнутой системе (8), (10), (11), (15) выполнены условия:

1) возмущение  $\xi_3(t)$  из (14) удовлетворяет ограничениям (13), где в обозначениях (14) принято  $L_\alpha = M_2/\delta$ ;

2) параметры алгоритма управления (15) выбраны согласно неравенствам  $M_1 > M_2 > \Sigma$ ,  $\frac{M_2}{\delta}(M_1 - \Sigma) > \bar{\Sigma}$ ,  $\delta > \frac{2\Sigma_1}{a_{21}x_4}$ ,  $|\xi_1(t)| \leq \Sigma_1$ ,  $\Sigma_1 = \text{const} > 0$ .

Тогда существуют константы  $N = \text{const} > 0$  и  $\omega_0 = \text{const} > 0$  такие, что при  $\omega > \omega_0$  справедливо неравенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}_1| \leq N/\omega$ . ♦

Из теоремы 3 следует, что при неограниченном росте частоты вибросигнала  $\omega \rightarrow +\infty$  алгоритм управления (15) позволяет обеспечить асимптотическую инвариантность выходной переменной к внешнему возмущению.

#### 4. СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ НА ВИХРЕВЫХ АЛГОРИТМАХ

Синтез наблюдателя на основе вихревых алгоритмов рассмотрим на примере первого уравнения системы (6) в предположении, что угол  $x_1$  и ток якоря  $x_3$  доступны измерению, а коэффициенты  $a_{21}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{32}$  известны.

Вначале проведем синтез наблюдателя для угловой скорости вращения двигателя  $x_2$ . Рассмотрим первое уравнение системы (6)

$$\dot{x}_1 = x_2. \quad (16)$$

Построим наблюдатель переменной  $x_2$  в виде

$$\dot{z}_{11} = z_{12}, \quad \dot{z}_{12} = -\alpha_1 z_{12} + L_1 \text{sign}(e_1). \quad (17)$$

В силу выражений (16) и (17) запишем систему уравнений относительно ошибок наблюдения  $e_1 = x_1 - z_{11}$ ,  $e_{12} = x_2 - z_{12}$ :

$$\dot{e}_1 = e_{12}, \quad \dot{e}_{12} = -\alpha_1 e_{12} - L_1 \text{sign}(e_1) + \rho_1(t), \quad (18)$$

где  $\rho_1(t) = \alpha_1 x_2(t) + \dot{x}_2(t)$ ,  $L_1 = \text{const} > 0$ .

Согласно ограничениям, введенным в § 2, для возмущения  $\rho_1(t)$  и его производной справедливы оценки  $|\rho_1(t)| \leq P_1$ ,  $|\dot{\rho}_1(t)| \leq \bar{P}_1$ ,  $P_1 = \text{const} > 0$ ,  $\bar{P}_1 = \text{const} > 0$ . Тогда при выполнении соотношений  $L_1 > P_1$ ,  $\alpha_1(L_1 - P_1) > \bar{P}_1$  в силу теоремы 2 имеет место асимптотическая сходимость переменных системы (18) к нулю, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_{12} = x_2. \quad (19)$$

В отличие от классического наблюдателя на скользящих режимах [6, 8]

$$\dot{z}_{11} = L_1 \text{sign}(e_1), \quad \dot{e}_1 = x_2 - L_1 \text{sign}(e_1),$$

$$\mu \dot{\tau} = -\tau + L_1 \text{sign}(e_1), \quad \mu = \text{const} > 0, \\ \mu \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \rightarrow x_2,$$

в котором используется вспомогательный фильтр для получения текущей информации о переменной  $x_2(t)$ , наблюдатель (17) уже включает в свою структуру фильтр типа  $\mu \dot{\tau} = -\tau + v$ . Такой подход позволяет повысить точность наблюдения благодаря исключению динамической задержки обработки сигнала.

Для получения оценки переменной  $a_{32}x_2x_4$  построим наблюдатель вида

$$\dot{z}_{21} = z_{22} - a_{32}(u - a_{31}x_3), \\ \dot{z}_{22} = -\alpha_1 z_{22} + L_2 \text{sign}(e_2). \quad (20)$$

В силу уравнений (6) и (20) и в предположении  $x_4 = \text{const}$  система уравнений относительно оши-



бок наблюдения  $e_2 = x_3 - z_{21}$ ,  $e_{22} = a_{32}x_3x_4 - z_{22}$  имеет вид

$$\dot{e}_2 = e_{22}, \quad \dot{e}_{22} = -\alpha_1 e_{22} - L_2 \text{sign}(e_2) + \rho_2(t), \quad (21)$$

где  $\rho_2(t) = \alpha_1 a_{32} x_2 x_4 + a_{32} \dot{x}_2 x_4$ .

Согласно ограничениям, введенным в § 2, для возмущения  $\rho_2(t)$  и его производной имеют место оценки  $|\rho_2(t)| \leq P_2$ ,  $|\dot{\rho}_2(t)| \leq \bar{P}_2$ ,  $P_2 = \text{const} > 0$ ,  $\bar{P}_2 = \text{const} > 0$ . Тогда согласно результатам теоремы 2 при выполнении неравенств  $L_2 > P_2$ ,  $\alpha_1(L_2 - P_2) > \bar{P}_2$  переменные системы (21) сходятся асимптотически к нулю, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_{22} = a_{32} x_2 x_4. \quad (22)$$

Оценка потокосцепления  $\hat{x}_4$  вычисляется из выражений (19) и (22)

$$\hat{x}_4 = \frac{z_{22}}{a_{32} x_2}$$

и может быть использована в законе управления с целью обеспечить заданные характеристики переходного процесса во времени и учесть эффект размагничивания системы возбуждения.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве примера рассмотрим задачу управления двигателем постоянного тока с постоянным возбуждением ( $x_4 = \text{const} > 0$ ). Параметры двигателя приведены в таблице.

Подставляя значения указанных параметров в модель ДПТ (6), получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= 0,5[x_3 + m_L(t)], \\ \dot{x}_3 &= -10x_2 - 11x_3 + 2u. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее приведена пошаговая процедура синтеза алгоритма управления.

**Шаг 1.** Запишем уравнение для ошибки слежения  $\bar{x}_1 = x_1 - x_{1r}$

$$\dot{\bar{x}}_1 = x_2 - \dot{x}_{1r} \quad (24)$$

и выберем фиктивное управление  $x_2$  в виде

$$x_2 = \bar{x}_2 - 0,5\bar{x}_1 + \dot{x}_{1r}. \quad (25)$$

**Шаг 2.** Для обеспечения стабилизации невязки  $\bar{x}_2 = x_2 + 0,5\bar{x}_1 - \dot{x}_{1r}$  перепишем систему (23) в новых переменных с учетом уравнений (24) и (25):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= -0,5\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= 0,5x_3 - 0,25\bar{x}_1 + 0,5\bar{x}_2 + f_1(t), \\ \dot{x}_3 &= -10x_2 - 11x_3 + 2u, \end{aligned}$$

где  $f_1(t) = 0,5m_L(t) - \dot{x}_{1r}$ . С учетом новой переменной  $\bar{x}_3 = 0,5x_3 - 0,25\bar{x}_1 + 0,5\bar{x}_2$  имеем

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= -0,5\bar{x}_1 + \bar{x}_2, & \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_3 + f_1(t), \\ \dot{\bar{x}}_3 &= -10,5\bar{x}_3 + u + f_2(t), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $f_2(t) = -2,375\bar{x}_1 + 0,25\bar{x}_2 + 0,5f_1(t) - 5\dot{x}_{1r}$ .

**Шаг 3.** Пусть для данного двигателя заложены проектные ограничения

$$|\bar{x}_1| \leq \pi, \text{ рад}, \quad |\bar{x}_2| \leq 100, \text{ рад/с}, \quad |x_3| \leq 50, \text{ А}. \quad (27)$$

При моделировании использовались задающие воздействия и возмущения

$$\begin{aligned} x_{1r}(t) &= \sin t + \sin(2t), \text{ рад}, \\ m_L(t) &= 3\sin(0,5t) + 2\sin(1,5t), \text{ Н/(кг} \cdot \text{м)}. \end{aligned} \quad (28)$$

В силу выражений (27) и (28) получим следующие ограничения на возмущения  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ :

$$\begin{aligned} |f_1(t)| &\leq 7,5; & |f_2(t)| &\leq 51,211; & |\dot{f}_1(t)| &\leq 11,25; \\ |\dot{f}_2(t)| &\leq 292,68; & |\ddot{f}_1(t)| &\leq 19,625. \end{aligned} \quad (29)$$

Выберем управляющее воздействие в виде (12) без дополнительного демпфирования  $L_\alpha - a_3 = 0$ . Согласно теореме 2 амплитуду реле необходимо выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$M - \Sigma > 0, \quad 10,5(M - \Sigma) > \bar{\Sigma}, \quad (30)$$

где  $\xi(t) = 10,5f_1(t) + \dot{f}_1(t) + f_2(t)$ ,  $|\xi(t)| \leq \Sigma$ ,  $|\dot{\xi}(t)| \leq \bar{\Sigma}$ .

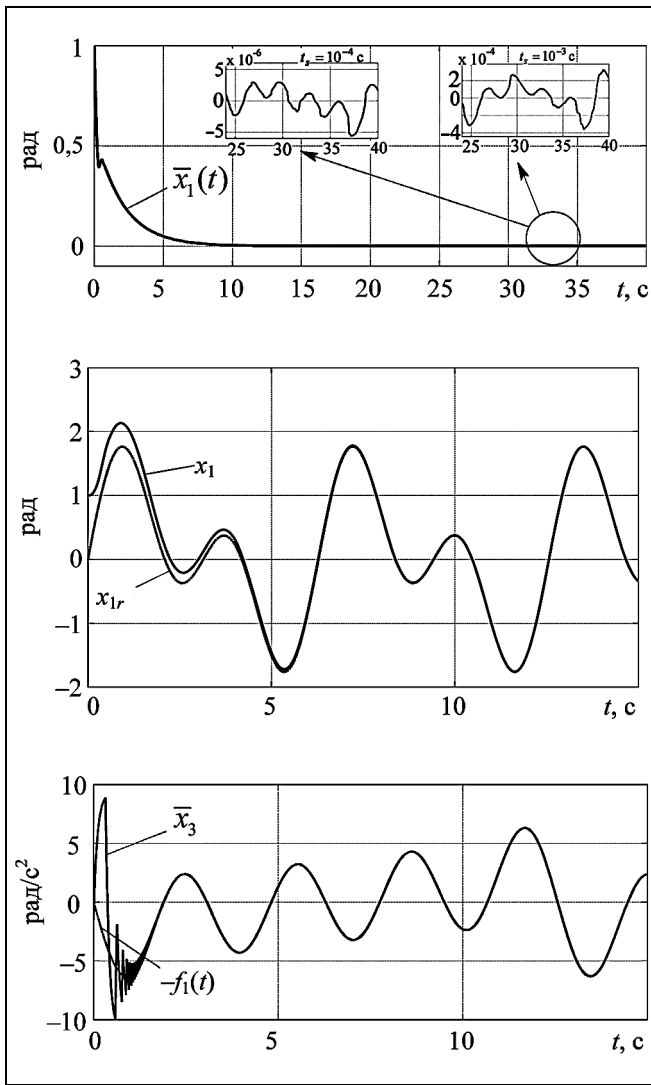
С учетом ограничений (29) получим оценки возмущения  $\xi(t)$  и его производной:

$$|\xi(t)| \leq 129,96; \quad |\dot{\xi}(t)| \leq 430,43.$$

С учетом последних неравенств перепишем выражения (30):

$$M > 129,96; \quad M - 129,96 > 40,993.$$

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$a_{32}$	2, Гн <sup>-1</sup>	$a_{21}$	0,5, (кг · м <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
$x_4$	1, Вб	$a_{31}$	5,5, Ом



Результаты моделирования

Согласно последним неравенствам выберем управляющее воздействие в виде  $u = -180\text{sign}(\bar{x}_2)$ .

На рисунке представлены результаты моделирования в среде MATLAB/Simulink на основе численного интегрирования методом Дормана — Принса (ode 5). В увеличенной части рисунка показана установившаяся ошибка при различном шаге дискретизации  $t_s$ : слева шаг интегрирования  $t_s = 10^{-4}$  с, справа —  $t_s = 10^{-3}$  с. Как видно, чем меньше шаг интегрирования, тем меньше установившаяся ошибка. Поскольку доказанный в теореме 2 теоретический результат справедлив только при бесконечной частоте переключения реле ( $t_s = 0$ ), постольку такой результат вполне объясним. Из результатов моделирования также видно,

что переменная  $\bar{x}_3$  из системы (26) обрабатывает возмущение —  $f_1(t)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продемонстрированы преимущества предложенных в работе [10] методов синтеза инвариантных систем на основе вихревых алгоритмов в задаче управления простейшей электромеханической системой — двигателем постоянного тока. Задача управления ДПТ в предложенной постановке никогда не ставилась ранее, и, следовательно, не решалась. В этом смысле авторы не сочли возможным провести сравнение с известными методами синтеза систем управления электроприводами, что обычно принято в прикладных работах. Разработанные в данной работе алгоритмы синтеза обратной связи могут быть полезны при решении широкого спектра задач управления электромеханическими системами различного уровня сложности [14—18].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Перепишем уравнения (4) в новых координатах  $\bar{y}_1 = \left| \frac{\alpha^2}{4} - \beta \right|^{0.5} y_1$ ,  $\tilde{y}_2 = \frac{\alpha}{2} y_1 + \bar{y}_2$  (далее рассматривается случай, когда  $\alpha^2/4 - \beta \neq 0$ ):

$$\dot{\bar{y}}_1 = -\frac{\alpha}{2} \bar{y}_1 + \gamma_1 \tilde{y}_2,$$

$$\dot{\tilde{y}}_2 = \gamma_2 \bar{y}_1 - \frac{\alpha}{2} \tilde{y}_2 - M \text{sign}(\bar{y}_1) + \xi(t), \quad (\text{П1})$$

где  $\gamma_1 = \gamma_2 = \left| \frac{\alpha^2}{4} - \beta \right|^{0.5}$ , при  $\frac{\alpha^2}{4} - \beta > 0$ , и  $\gamma_2 = -\gamma_1 = \left| \frac{\alpha^2}{4} - \beta \right|^{0.5}$  при  $\frac{\alpha^2}{4} - \beta < 0$ .

Рассмотрим составную функцию Ляпунова (с учетом, что  $M > \xi$ )

$$V = |\bar{y}_1| - \frac{\xi}{M} \bar{y}_1 + \frac{\bar{y}_1^2}{2M} + \frac{\tilde{y}_2^2}{2M}. \quad (\text{П2})$$

Дифференцируя функцию Ляпунова с учетом уравнений (П1), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{\alpha}{2} |\bar{y}_1| + \frac{\alpha \xi}{2M} \bar{y}_1 - \frac{\xi}{M} \bar{y}_1 - \frac{\alpha}{2M} \bar{y}_1^2 + \\ &+ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{M} \bar{y}_1 \tilde{y}_2 - \frac{\alpha}{2M} \tilde{y}_2^2 \leq x^T Q x - \bar{\alpha} |\bar{y}_1| \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(Q) [\bar{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2] - \bar{\alpha} |\bar{y}_1|, \end{aligned} \quad (\text{П3})$$





где  $x^T = (\bar{y}_1 \quad \tilde{y}_2)$ , матрица  $Q = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2M} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2M} \\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2M} & -\frac{\alpha}{2M} \end{pmatrix}$ ,  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{\Sigma}{M} - \frac{2\bar{\Sigma}}{\alpha M} \right)$ ,  $\lambda_{\max}(Q)$  — максимальное собственное число матрицы  $Q$ .

Отметим, что квадратичная форма  $x^T Q x$  отрицательно определена при любых  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , что легко проверяется по критерию Сильвестра [19]. Следовательно,  $\lambda_{\max}(Q) < 0$ . Как видно, при  $\bar{\alpha} > 0$  или  $\alpha(M - \Sigma) > 2\bar{\Sigma}$  производная функции Ляпунова отрицательна. Следовательно, переменные замкнутой системы асимптотически стремятся к нулю.

Из выражения (П2) можем записать неравенство

$$V \leq |\bar{y}_1| \left( 1 + \frac{\Sigma}{M} \right) + \frac{1}{2M} (\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2) \leq c_0 (|\bar{y}_1| + \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2),$$

$$\text{где } c_0 = \max \left\{ 1 + \frac{\Sigma}{M}, \frac{1}{2M} \right\}.$$

Перепишем (П3) с учетом последней оценки

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \lambda_{\max}(Q) [|\bar{y}_1| + \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2] - \bar{\alpha} |\bar{y}_1| \leq \\ &\leq -c_1 (|\bar{y}_1| + \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2) \leq -\gamma V, \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma = \frac{c_1}{c_0}, \quad c_1 = \min \{ \lambda_{\max}(Q), \bar{\alpha} \}.$$

Из этого выражения следует экспоненциальная сходимость переменных  $\bar{y}_1$  и  $\tilde{y}_2$  при  $\alpha$  и  $M$ , удовлетворяющих условиям теоремы, и произвольном параметре  $\beta > 0$ . Теорема 1 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. — М.: Наука, 1974.
2. Pisano A., Davila A., Fridman L., Usai E. Cascade control of PM DC drives via second-order sliding-mode technique // IEEE Trans. on Industrial Electronics. — 2008. — Vol. 55, N 11. — P. 3846–3854.
3. Yao J., Jiao Z., Ma D. Adaptive robust control of dc motors with extended state observer // IEEE Trans. on Industrial Electronics. — 2014. — Vol. 61, N 7. — P. 3630–3637.
4. Dodds J.S., Utkin V.A., Vittek, J. Sensorless Induction Motor Drive with Independent Speed and Rotor Magnetic Flux Control. Part I — Theoretical Background. Part II — Simulations and Real Time Implementation // Journal of Electrical Engi-

- neering. — Part I. — 1998. — Vol. 49, N 7. — P. 186–193; — Part II. — 1998. — Vol. 49, N 9, 10. — P. 232–239.
5. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. — М.: Энергия, 1979.
6. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electro-mechanical systems. — London: Taylor and Francis, 2009.
7. Lascu C., Andreescu G.D. Sliding-mode observer and improved integrator with DC-offset compensation for flux estimation in sensorless-controlled induction motors // IEEE Trans. on Industrial Electronics. — 2006. — Vol. 53, N 3. — P. 785–794.
8. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006.
9. Принцип блочного управления. Ч. I, II / С.В. Дракунов, Д.Б. Изосимов, А.Г. Лукьянов и др. // Автоматика и телемеханика. — Ч. I. — 1990. — № 5. — С. 3–13; — Ч. II. — 1990. — № 6. — С. 20–31.
10. Кочетков С.А., Уткин В.А. Инвариантность в системах с несогласованными возмущениями // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 7. — С. 46–83.
11. Iannelli L., Johansson K.H., Jönsson U.T., Vasca F. Averaging of nonsmooth systems using dither // Automatica. — 2006. — Vol. 42, N 4. — P. 669–676.
12. Кочетков С.А., Уткин В.А. Компенсация неидеальностей исполнительных устройств // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 5. — С. 21–47.
13. Красовский А.А. О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейностей // Автоматика и телемеханика. — 1948. — Т. 9, № 1. — С. 20–29.
14. Dixon W., Dawson D.M., Zergeroglu E., et al. Nonlinear control of wheeled mobile robot robots (in series Lecture notes in control and information sciences). — Berlin: Springer-Verlag, 2001.
15. Пестерев А.В. Синтез стабилизирующего управления в задаче следования колесного робота вдоль заданной кривой // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 7. — С. 25–39.
16. Jafarov E.M., Parlakçi M.N.A., Istepanopulos Y. A new variable structure PID-controller design for robot manipulators // IEEE Trans. on Control Systems Technology. — 2005. — Vol. 13, N 1. — P. 122–130.
17. Рывкин С.Е. Скользящие режимы в задачах управления автоматизированным синхронным электроприводом. — М.: Наука, 2009.
18. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: Физматлит, 2006.
19. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. — М.: Наука, 1966.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

**Кочетков Сергей Александрович** — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ kos@ipu.ru,

**Уткин Виктор Анатольевич** — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ✉ vicutkin@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-93-21.

## Не забудьте подписаться!

Подписку на журнал «Проблемы управления» можно оформить в любом почтовом отделении (подписной индекс 81708 в каталоге Роспечати или 38006 в объединенном каталоге «Пресса России»), а также через редакцию с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.