Задачи,
Матем. просв., 1936, выпуск 7, 68–74

З А Д А Ч И

(Нижеследующие задачи предложены на заключительном туре Московской математической олимпиады 1935 г. Решения присылать по адресу: Москва, центр, Б. Комсомольский, 6, помещение 5, Главная редакция общетехнической литературы и номографии. Редакции «Математического просвещения»).

113. Дана окружность и на ней три точки M, N, P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

114. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом. Доказать, что из остальных точек поверхности куба диагональ видна под бóльшим углом, чем из найденных.

115. В двух различных плоскостях лежат два треугольника: ABC и $A'B'C'$. Прямая AB пересекается с прямой $A'B'$; прямая BC — с прямой $B'C'$; прямая CA — с прямой $C'A'$. Доказать, что прямые AA', BB', CC' или пересекаются все три в одной точке, или параллельны друг другу.

116. Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$x + y = 2, \quad xy - z^2 = 1.$$

117. Решить систему уравнений:

$$x^3 - y^3 = 26, \quad x^2y - xy^2 = 6.$$

118. Найти сумму:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n+1)^3.$$

119. Выбраны шесть различных цветов; требуется раскрасить шесть граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами это можно сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в двенадцать различных цветов.

120. Сколькими различными способами можно разложить целое положительное число n на сумму трех положительных целых слагаемых? При этом два разложения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за различные.

Тот же вопрос для разложений на сумму четырех слагаемых.

121. Будем обозначать $M(a, b)$ общее наименьшее кратное двух чисел a и b. Доказать формулу:

$$M(a, b) \cdot D(a, b) = ab.$$

Для трех чисел доказать формулу:

$$M(a, b, c) \cdot D(a, b) \cdot D\left(\frac{ab}{D(ab)}, c\right) = abc.$$

Решения задач

51. Решить систему уравнений:

$$x^2 = a + (y-z)^2; \quad y^2 = b + (z-x)^2; \quad z^2 = c + (x-y)^2.$$

Собрав члены, содержащие неизвестные, в левых частях уравнений и разложив левые части на множители, получим:

$$(x+y-z)(x-y+z) = a; \qquad (y+z-x)(y-z+x) = b;$$
$$(z+x-y)(z-x+y) = c.$$

Почленное произведение первых двух уравнений делим на третье. Получим:

$$(x+y-z)^2=\frac{ab}{c}, \quad \text{или} \quad x+y-z=\pm\frac{ab}{\sqrt{abc}}.$$

Аналогично будем иметь:

$$z+y-x=\pm\frac{bc}{\sqrt{abc}}; \quad x-y+z=\pm\frac{ac}{\sqrt{abc}}.$$

Из полученной системы трех линейных уравнений найдем:

$$x=\pm\frac{a(b+c)}{2\sqrt{abc}}; \quad y=\pm\frac{b(a+c)}{2\sqrt{abc}}; \quad z=\pm\frac{c(a+b)}{2\sqrt{abc}}.$$

Знаки берутся или все верхние, или все нижние.

Бобылев В. (Тула), Алексеев И. А. (Казань), Городов С. П. (Кадиевка), Ефимов В. П. (Сходня), Карпушин В. Б. (Тула), Лебедевская В. П. (Саратов), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Соловьев Е. П. (Одесса), Шахтахтинский М. (Баку).

52. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

при вещественных a, b, c не имеет комплексных корней.

После освобождения от знаменателей и приведения подобных членов уравнение принимает вид:

$$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0.$$

Это уравнение имеет комплексные корни только в том случае, если выражение

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

отрицательно; в противном случае корни уравнения действительны.

Но из очевидного неравенства

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$$

следует, после раскрытия скобок, приведения подобных членов и сокращения на 2:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqslant 0.$$

Это значит, что уравнение имеет лишь действительные корни.

Алексеев И. А. (Казань), Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Ефимов В. П. (Сходня), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтахтинский М. (Баку).

53. Найти предел выражения $\left(\cos\frac{a}{x}\right)^x$, когда x неограниченно возрастает, принимая последовательно целые значения $x=1, 2, 3, \ldots$ до бесконечности.

Рассмотрим разность $1-\cos^x\frac{a}{x}$; при достаточно большом целом положительном x, имеем:

$$0<1-\cos^x\frac{a}{x}=\left(1-\cos\frac{a}{x}\right)\left(1+\cos\frac{a}{x}+\cos^2\frac{a}{x}+\ldots+\cos^{x-1}\frac{a}{x}\right)<$$

$$<2\sin^2\frac{a}{2x}\cdot x=\frac{\sin\frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}}\cdot a\sin\frac{a}{2x}.$$

(Неравенство усилилось от замены всех косинусов во второй скобке единицами.)

Так как для $x > \frac{a}{\pi}$, $0 < \frac{\sin \frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}} < 1$, то

$$0 < 1 - \cos^x \frac{a}{x} < a \sin \frac{a}{2x}.$$

Но $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a \sin \frac{a}{2x}\right) = 0$; следовательно, также

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - \cos^x \frac{a}{x}\right) = 0,$$

откуда следует, что предел $\cos^x \frac{a}{x}$ равен единице.

Вейланд А. Ф. (Москва), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

54. Доказать, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных в концах этой хорды.

Пусть ABC — треугольник, образованный хордой AB и касательными AC и BC; пусть M — произвольная точка на дуге AB; C_1, A_1, B_1—основания перпендикуляров, опущенных из M соответственно на AB, BC и CA. Тогда, углы B_1AM и MBA равны, так как оба измеряются половиной дуги AM; углы A_1BM и MAC равны, так как оба измеряются дугой MB. Поэтому

$$\Delta B_1AM \sim \Delta C_1BM; \qquad \Delta A_1BM \sim \Delta C_1AM.$$

Отсюда

$$\frac{M_1B_1}{AM} = \frac{M_1C_1}{MB}; \qquad \frac{MA_1}{MB} = \frac{MC_1}{BM}.$$

Перемножив почленно эти равенства, после сокращения получим:

$$MB_1 \cdot MA_1 = MC_1^2.$$

Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Ефимов В. П. (Сходня), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтахтинский М. (Баку).

55. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}$.

Заметив, что

$$\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x) = \frac{\sin[(a+x)-(a-x)]}{\cos(a+x)\cos(a-x)} = \frac{\sin 2x}{\cos(a+x)\cos(a-x)};$$

$$\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x) = \operatorname{arctg}\frac{(a+x)-(a-x)}{1+(a+x)(a-x)} = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1+a^2-x^2}.$$

Заменив эти бесконечно малые эквивалентными или бесконечно малыми $\frac{2x}{\cos(a+x)\cos(a-x)}$ и $\frac{2x}{1+a^2-x^2}$, получим:

$$\frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)} \approx \frac{1+a^2-x^2}{\cos(a+x)\cos(a-x)}.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)} = \frac{1+a^2}{\cos^2 a}.$$

Требует оговорки случай $a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — целое число. В этом случае дробь неограниченно возрастает.

56. Доказать, что

$$\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+p+1)!}.$$

Заметим, что

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!},$$

. . . .

$$\frac{n+p-1}{(n+p)!}=\frac{1}{(n+p-1)!}-\frac{1}{(n+p)!},$$

$$\frac{n+p}{(n+p+1)!}=\frac{1}{(n+p)!}-\frac{1}{(n+p+1)!}.$$

Сложив почленно, получим искомое равенство.

Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

57. Исключить θ и φ из уравнений:

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m;\quad b\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi=n;\quad a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi.$$

Разделив обе части первого уравнения на $\sin\theta\cos\theta$ и умножив правую часть на $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, получим:

$$\frac{a\sin^2\theta+b\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=m\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta},$$

$$a\operatorname{tg}\theta+b\operatorname{ctg}\theta=m\operatorname{tg}\theta+m\operatorname{ctg}\theta,$$

или

$$(a-m)\operatorname{tg}^2\theta=m-b.$$

Аналогично из второго уравнения получаем:

$$(n-a)=(b-n)\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Перемножив почленно два последних уравнения, получим:

$$(a-m)(n-a)\operatorname{tg}^2\theta=(b-n)(m-b)\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Сопоставляя с третьим уравнением, имеем окончательно:

$$(a-m)(n-b)b^2=(b-n)(m-b)a^2.$$

Шахтахтинский М. (Баку), Вейланд А. Ф. (Москва), Городов С. П. (Кадиевка), Лебедевская В. П. (Саратов), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

58. Показать, что если a, b, c — стороны треугольника, то корни уравнения

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

будут мнимыми.

Корни этого уравнения будут мнимыми, если будет положительно выражение:

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)=$$

$$=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Но это выражение всегда положительно, так как оно равно $16\,\Delta^2$, где Δ — площадь треугольника.

Алексеев П. А. (Казань), Бобылев В. (Тула), Ефимов В. П. (Сходня), Соловьев Е. П. (Одесса), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтахтинский М. (Баку).

59. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

Пусть A, B, C, D — вершины трехгранной пирамиды и A', B', C', D' — центры тяжести противолежащих им граней соответственно. Прямые DC' и CD'

проходят через середину ребра AB; следовательно, DC' и CD' пересекаются и лежат в одной плоскости. Поэтому DD' и CC' также лежат в одной плоскости и поэтому пересекаются в некоторой точке M. Аналогично можно показать, что BB' пересекается как с CC', так и с DD'. Если BB' не проходит через точку M и пересекает CC' и DD' в разных точках, то она лежит в плоскости последних двух прямых; но это невозможно, так как точка B не лежит в этой плоскости. Поэтому прямая BB' проходит через точку M. На том же самом основании можно утверждать, что и прямая AA' проходит через точку M.

Бобылев В. (Тула), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

60. Показать, что если α и β корни уравнения

$$x^2+px+1=0,$$

а γ и δ — корни уравнения

$$x^2+qx+1=0,$$

то

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

Очевидно,

$$\alpha+\beta=-p; \quad \gamma+\delta=-q; \quad \alpha\beta=1; \quad \gamma\delta=1.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned}(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) &= (\alpha-\gamma)(\beta+\delta)\cdot(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)=\\ &=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\beta\delta-\alpha\gamma)=\alpha\beta\delta^2-\beta^2\gamma\delta-\alpha^2\gamma\delta+\alpha\beta\gamma^2=\\ &=\alpha\beta(\delta^2+\gamma^2)-\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2)=\delta^2+\gamma^2-\alpha^2-\beta^2=\\ &=(\delta^2+2\delta\gamma+\gamma^2)-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=(\delta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2=q^2-p^2.\end{aligned}$$

Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Городов С. П. (Кадиевка), Лебедевская В. П. (Саратов), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтахтинский М. (Баку).

61. Пересечь данную трехгранную пирамиду так, чтобы в сечении получился ромб.

На ребре BC пирамиды $ABCD$ находим точку M, так, чтобы было: $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{CD}$, и через точку M проводим плоскость, параллельную ребрам AB и CD. Доказательство правильности построения не представляет труда.

62. По четырем сторонам трапеции вычислить ее диагонали.

Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями $AB=a$, $CD=b$ и боковыми сторонами $AD=c$, $CB=d$; H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на AB, и K — точка пересечения стороны AB с прямой $CK \parallel AD$.

Обозначим искомые диагонали $AC=m$, $BD=n$. Тогда из треугольника ABC

$$m^2=a^2+d^2\mp 2ak;$$

из треугольника CKB:

$$c^2=(a-b)^2+d^2\mp 2(a-b)k.$$

Умножаем первое уравнение на $(a-b)$, второе на $-a$ и складываем почленно; получаем:

$$m^2(a-b)-c^2a=ab(a-b)-d^2b.$$

Отсюда

$$m^2=ab+\frac{c^2a-d^2b}{a-b}.$$

Аналогично

$$n^2=ab+\frac{d^2a-c^2b}{a-b}.$$

Требует оговорки случай $a=b$, так как в этом случае полученные формулы не имеют смысла.

Если $a=b$, то трапеция оказывается параллелограмом. Для вычисления диагоналей параллелограма знания его сторон недостаточно. Следовательно, при $a=b$ задача неопределенная.

Шахтахтинский М. (Баку), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

63. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках P и Q. Найти геометрическое место точек, описываемое серединою M отрезка PQ, когда секущая вращается около A.

Пусть O и O_1 — центры двух окружностей и F — середина отрезка OO_1. Из точек O, O_1 и F опустим перпендикуляры на прямую PQ; их основания назовем K, K_1 и C. Так как $KC=CK_1$, то имеем:

$$MC = PK + KC - PM = \frac{PA}{2} + \frac{KK_1}{2} - \frac{PQ}{2} =$$

$$= \frac{PA}{2} + \frac{KK_1}{2} - \frac{PA}{2} - \frac{AQ}{2} = CD - AD = CA.$$

Отсюда видно, что прямоугольные треугольники FCM и FCA, как имеющие равные катеты, равны, и потому $FM=FA$. Следовательно, геометрическим местом точек M является окружность с центром в F, проходящая через A.

Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

64. Три грани трехгранного угла с взаимно перпендикулярными ребрами пересекают шар по трем кругам. Доказать, что сумма площадей этих кругов не изменится, если повернуть этот трехгранный угол около его вершины так, чтобы его грани не перестали пересекать шар.

Пусть d — расстояние от вершины трехгранного угла до центра шара, R — радиус шара, r_1, r_2, r_3 — радиусы кругов C_1, C_2, C_3, по которым грани трехгранного угла пересекают шар, и h_1, h_2, h_3, — расстояния от центра шара до этих граней. Так как основания перпендикуляров h_1, h_2, h_3, падают в центры кругов C_1, C_2, C_3, то имеем:

$$r_1^2 = R^2 - h_1^2; \quad r_2^2 = R^2 - h_2^2; \quad r_3^2 = R^2 - h_3^2.$$

Далее, d есть диагональ прямоугольного параллепипеда с ребрами h_1, h_2, h_3. Поэтому

$$d^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

Сумма площадей трех кругов выразится так:

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2 = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi [3R^2 - (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)] = \pi (3R^2 - d^2).$$

Эта сумма зависит только от R и d, которые не изменяются при повороте трехгранного угла вокруг вершины; следовательно, при этом не изменяется и S.

65. Найти непрерывную функцию $F(x)$, удовлетворяющую при всяком значении x соотношению

$$a \cdot F(x+1) - b \cdot F(x) = cx + d, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — данные числа, $F(0)=N$, и на интервале от 0 до 1 функция линейна.

Искомая функция может быть линейной лишь при условии $a \neq b$, так как при $a=b$ в левой части (1) старшие члены взаимно уничтожились бы и в левой части оказалось бы постоянное, между тем как в правой части стоит линейный многочлен.

При $a \neq b$, $F(x)$ — линейная функция вдоль всей оси OX; коэфициенты ее можно найти методом неопределенных коэфициентов:

$$F(x) = \frac{cx}{a-b} + \frac{cd - bd - ac}{(a-b)^2}.$$

67. Показать, что корни уравнения $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$ суть:

$$4\cos^2\frac{\pi}{7}; \quad 4\cos^2\frac{2\pi}{7}; \quad 4\cos^2\frac{3\pi}{7}.$$

Приняв обозначения $x_k = 4\cos^2\frac{k\pi}{7}$ $(k = 1, 2, 3)$, мы должны показать что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 6; \quad x_1x_2x_3 = 1.$$

Мы докажем лишь первое из этих трех равенств.
Заметим, что

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Теперь получим:

$$x_1+x_2+x_3=4\left(\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}\right)=$$

$$=4\left[\frac{1+\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\frac{1+\cos\frac{4\pi}{7}}{2}+\frac{1+\cos\frac{6\pi}{7}}{2}\right]=$$

$$=6+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=6-1=5.$$

Преобразования аналогичного характера позволяют доказать два других равенства.

68. Решить уравнение $x^3+9x^2-33x+27=0$.
Полагая $x=y-3$ и применяя формулу Кардана, получим:

$$x_1=-3-\sqrt[3]{10}\,(2+\sqrt[3]{10});\quad x_{2,3}=-3-\sqrt[3]{10}\left[-2+\sqrt[3]{10}\pm i\,(2\sqrt{3}\mp\sqrt[3]{30})\right].$$

Вейланд А. Ф. (Москва).

69. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x}$.

Ответ: $+1$.

Ефимов В. П. (Сходня), Городов С. П. (Кадиевка).

70. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$9x^2-4xy+6y^2-11x-7=0.$$

Обычными методами аналитической геометрии устанавливаем, что кривая — эллипс с полуосями $a=1$; $b=\sqrt{2}$. Отсюда площадь кривой $S=\pi ab=\pi\sqrt{2}$.

Ефимов В. П. (Сходня), Городов С. П. (Кадиевка).

71. Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x)=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha).$$

Следует показать, что $f^{(n)}(0)=\sin n\alpha$. После этого легко получить:

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=x\sin\alpha+\frac{x^2}{2!}\sin 2\alpha+\frac{x^3}{3!}\sin 3\alpha+\ldots$$