A. V. Trusov, The principal series of representations of the group of $p$-adic quaternions in spaces over non-Archimedean fields, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 181–182

## ОСНОВНАЯ СЕРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $p$-АДИЧЕСКИХ КВАТЕРНИОНОВ В ПРОСТРАНСТВАХ НАД НЕАРХИМЕДОВЫМИ ПОЛЯМИ

А. В. Трусов

1. Пусть $K$ — полное неархимедово нормированное расширение поля $p$-адических чисел $\mathbb{Q}_p$; нормирование поля $K$ продолжает нормирование поля $\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Фиксируем $\varepsilon$ — единицу кольца целых $p$-адических чисел $\mathbb{Z}_p$, не являющуюся квадратом; $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ — квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Через $K^*$, $\mathbb{Z}_p(\sqrt{\varepsilon})^*$ будем обозначать мультипликативные группы поля $K$ и кольца целых элементов $\mathbb{Z}_p(\sqrt{\varepsilon})$ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$. Для компакта $X$ через $C(X, K)$ будем обозначать банахово пространство непрерывных функций на $X$ со значениями в $K$, снабженное sup-нормой. Для $z = x + y\sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ положим $\bar{z} = x - y\sqrt{\varepsilon}$. Компактные группы Ли $G$ над полем $\mathbb{Q}_p$ являются $p$-нерегулярными, т. е. такими, для которых не существует нетривиальных непрерывных линейных инвариантных относительно сдвигов функционалов на пространстве $C(G, K)$ (см. [1]). Ввиду отсутствия инвариантного интегрирования теория представлений $p$-нерегулярных групп, в отличие от $p$-регулярных групп, развита слабо. Известно, что для каждой $p$-нерегулярной группы существуют не вполне приводимые представления; у компактной группы могут быть бесконечномерные неприводимые представления [2]; имеются работы о представлениях групп $\mathbb{Z}_p$, Aff $\mathbb{Z}_p$. Удовлетворительное объяснение особенностей нерегулярного случая трудно дать без рассмотрения новых примеров.

Как известно, над полем $\mathbb{Q}_p$ существуют с точностью до изоморфизма ровно две кватернионные алгебры: алгебра всех матриц второго порядка над $\mathbb{Q}_p$ и тело $p$-адических кватернионов. В работе [3] было дано полное описание основных серий представлений групп $GL(2, \mathbb{Z}_p)$ и $GL(2, \mathbb{Q}_p)$. С телом кватернионов можно связать несколько групп, имеющих близкую структуру. В настоящей работе рассматривается основная серия представлений одной из этих групп: группы $PG$ — фактор-группы группы унимодулярных кватернионов $G$ по ее центру. Отметим, что комплексные представления групп $p$-адических кватернионов были изучены в [4] именно на примере группы $PG$.

2. Очевидно, что описание представлений группы $PG$ эквивалентно описанию представлений $T(g)$ группы $G$ таких, что $T(g) \equiv 1$ на центре группы $G$. Будем использовать реализацию $G$ в виде группы матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ p\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$, $|a| = 1$, $|b| \leqslant 1$. Группа $G$ транзитивно действует на множестве $S = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})^2 \mid |z_1| = 1, |z_2| \leqslant 1\}$. В пространстве $C(S, K)$ возникает изометрическое квазирегулярное представление группы $G$: $\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ p\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} f\right](z_1, z_2) = f(az_1 + p\bar{b}z_2,\ bz_1 + \bar{a}z_2)$. Через $T_\pi$ обозначим ограничение представления $T$ на пространство однородных функций $C_\pi = \{f \in C(S, K) \mid f(tz_1, tz_2) = \pi(t) f(z_1, z_2)$ при $(z_1, z_2) \in S$, $t \in \mathbb{Z}_p(\sqrt{\varepsilon})^*\}$, где $\pi(t) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p(\sqrt{\varepsilon})^*, K^*)$. Переходя от функций $f(z_1, z_2)$ к функциям $\varphi(z) = f(1, z)$, получаем реализацию $T_\pi$ в пространстве $C(\mathbb{Z}_p(\sqrt{\varepsilon}), K)$: $\left[T_\pi\begin{pmatrix} a & b \\ p\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \varphi\right](z) = \pi(a + p\bar{b}z)\, \varphi\left(\dfrac{b + \bar{a}z}{a + p\bar{b}z}\right)$. Очевидно, что представление $T_\pi$ равно единице на центре $G$ тогда и только тогда, когда $\pi(t) = 1$ при $t = \bar{t}$. Из этого условия несложно выводится, что в достаточно малой окрестности элемента $1 \in \mathbb{Z}_p(\sqrt{\varepsilon})$ в полярных координатах $(r, \varphi)$, где $r(t) = (\bar{t}t)^{1/2}$, $\varphi(t) = t/r(t)$, выполняется

$$\pi(t) = \varphi(t)^\alpha, \text{ где } \alpha \in K. \tag{1}$$

Назовем характер целочисленным, если $\alpha \in \mathbb{Z}$. Следующая формула задает общий вид целочисленных характеров:

$$\pi(t) = \mathrm{sign}^{k(p-1)} t\, \varphi^\alpha(t/\mathrm{sign}\, t)\, \gamma_n^{\frac{\ln \varphi(t/\mathrm{sign}\, t)}{p\sqrt{\varepsilon}}}, \tag{2}$$

где $k = 0, \ldots, p$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\gamma_n$ — первообразный корень из 1 степени $p^n$, $\gamma_n \in K$, $\operatorname{sign} t = \lim\limits_{n\to\infty} t^{p^{2n}}$.

Фиксируя $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ такие, что $\lambda - \mu = \alpha$, определим при $m \in \mathbb{N}$ $H_m^{(\lambda\mu)}$ как подпространство в $C(\mathbb{Z}_p(\sqrt{\varepsilon}), K)$ всех функций, которые на каждом шаре радиуса $|p|^m$ задаются формулой $P(z, \bar{z})\Omega(z)$, где $P(z, \bar{z})$ — многочлен от переменных $z$ и $\bar{z}$, степень которого по $z$ и $\bar{z}$ не больше, чем $\lambda$ и $\mu$ соответственно, $\Omega(z) = (1 - pz\bar{z})^{\alpha/2-\lambda}$.

3. Теорема 1. *При нецелочисленных характерах $\pi$ для представления $T_\pi$ нет конечномерных инвариантных подпространств. Каждое конечномерное инвариантное подпространство для $T_\pi$ в случае целочисленного характера $\pi$ содержится в некотором пространстве $H_m^{(\lambda\mu)}$, где $m, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$, $\lambda - \mu = \alpha$, $\alpha$ и $\pi$ связаны условием* (1).

Теорема 2. *Для локально компактного поля $K$ представление $T_\pi$ не имеет собственных замкнутых бесконечномерных инвариантных подпространств.*

При доказательстве теоремы 1 применяются инфинитезимальные методы и элементы теории локально аналитических функций. Методы доказательства теоремы 2 сходны с использованными в [3].

Инвариантное пространство $H_m^{(\lambda\mu)}$ раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств $C_m^{(\lambda_1\mu_1)}$: $H_m^{(\lambda\mu)} = \oplus C_m^{(\lambda_1\mu_1)}$, где суммирование ведется по всем наборам $(\lambda_1\mu_1)$, удовлетворяющим условиям $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 - \mu_1 = \alpha$, $\lambda_1 \leqslant \lambda$, $\mu_1 \leqslant \mu$. Пространства $C_m^{(\lambda_1\mu_1)}$ состоят из функций, которые на каждом шаре радиуса $|p|^m$ представимы в вид

$$\sum_{i=-\mu_1}^{\lambda_1} c_i \sum_{j=0}^{\lambda-i} \binom{\lambda_1}{\lambda_1 - i - j} z^{i+j} \binom{\mu_1}{j} (p\bar{z})^j \Omega_{\lambda_1\mu_1}(z), \qquad c_i \in K.$$

При $n > 0$ для представления $T_\pi$, где характер $\pi$ задан формулой (2), все пространства $C_m^{(\lambda\mu)}$, $\lambda - \mu = \alpha$, при $m > 0$ являются инвариантными, а при $n = 0$ — пространства $C_m^{(\lambda\mu)}$, $\lambda - \mu = \alpha$, $m \geqslant 1$. Инвариантные пространства $C_m^{(\lambda\mu)}$ при $m > 0$, вообще говоря, приводимы и, по-видимому, являются вполне приводимыми. Пространства $C_0^{(\lambda\mu)}$, являющиеся инвариантными только для характеров $\pi(t) = (t/\bar{t})^{\alpha/2}$ при четном $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\lambda - \mu = \alpha$, являются неприводимыми; $\dim C_0^{(\lambda\mu)} = \lambda + \mu + 1$. Представления в пространствах $C_0^{(\lambda_1\mu_1)}$ и $C_0^{(\lambda_2\mu_2)}$, отвечающие, возможно, различным характерам $\pi$, эквивалентны тогда и только тогда, когда их размерности равны. Формула для характера представления $T_\pi$ в пространстве $C_0^{(\lambda\mu)}$:

$$\operatorname{tr} T_\pi(g)\big|_{C_0^{(\lambda\mu)}} = (\lambda_1\lambda_2)^{-(\lambda+\mu)/2} \frac{\lambda_1^{\lambda+\mu+1} - \lambda_2^{\lambda+\mu+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где $\lambda_1$, $\lambda_2$ — характеристические числа матрицы $g \in G$.

Автор выражает глубокую благодарность А. Д. Гвишиани, под чьим руководством эта работа была выполнена, и А. А. Кириллову за большое внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. van Rooij. Non Archimedean Functional Analysis.— New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1978.

[2] Р. Р. Сунчелеев. Бесконечномерные представления группы Aff $\mathbb{Z}_p$. — Изв. АН УзССР, 1975, № 6, с. 30—35.

[3] А. В. Трусов. О представлениях групп $GL(2, \mathbb{Z}_p)$ и $GL(2, \mathbb{Q}_p)$ в пространствах над неархимедовыми полями.— Вестн. МГУ, сер. матем., механ., 1981, № 1, с. 55.

[4] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Представления групп кватернионов над локально компактными и функциональными полями.— Функц. анализ, 1968, 2 : 1, с. 20—35.

Институт физики земли
АН СССР

Поступило в Правление общества
9 ноября 1981 г.