А. А. Осиновская, Ограничения модулей над классическими группами на подгруппы типа A_2 в характеристике 2, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2011, том 386, 227–241

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 386, 2010 г.

А. А. Осиновская

ОГРАНИЧЕНИЯ МОДУЛЕЙ НАД КЛАССИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ НА ПОДГРУППЫ ТИПА A_2 В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

1. Введение

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$; G – классическая алгебраическая группа ранга r, $r > 2$, над полем K; $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – базис системы корней группы G; $\omega_1, \dots, \omega_r$ – фундаментальные веса группы G; $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r$ – доминантный вес группы G; а $L(\omega)$ – неприводимый G-модуль со старшим весом ω. Напомним, что вес ω называется p-ограниченным, если все $a_i < p$. Пусть $\Pi \subset G$ – подсистемная подгруппа, т.е. подгруппа, порожденная корневыми подгруппами, ассоциированными со всеми корнями некоторой подсистемы системы корней группы G. Символ $M|\Pi$ обозначает ограничение G-модуля M на подгруппу Π, а $\operatorname{Irr} M$ обозначает множество старших весов композиционных факторов модуля M (без их кратностей).

Часто необходимо знать разложение неприводимого G-модуля (представления группы G) при его ограничении на подгруппу Π. Такое описание (композиционные факторы и их кратности) называется правилом ветвления. Для классических групп над полями характеристики 0 хорошо известны правила ветвления, определяющие ограничение неприводимого G-модуля на максимальную простую подсистемную подгруппу $\Pi \subset G$ [3]. В случае положительной характеристики ситуация значительно более сложная. Поэтому целесообразно разрабатывать асимптотические методы исследования таких модулей, рассматривая ограничения на подгруппы малых рангов.

Далее мы предполагаем, что $G = A_r(K)$, $r \geq 3$, $B_r(K)$, $r \geq 3$, или $D_r(K)$, $r \geq 4$. Мы изучаем ограничения G-модулей на подсистемную

Ключевые слова: алгебраические группы, классические группы, представления, модули, ограничения на подгруппу.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта Ф09УРО-001 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

подгруппу H типа A_2. Заметим, что множество весов подгруппы H может быть отождествлено с множеством пар целых чисел при помощи следующего отображения $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \mapsto (a_1, a_2)$, а множество всех доминантных весов – с множеством $\mathbb{N}^2$ пар неотрицательных целых чисел.

Обозначим через $m = m(G)$ значение веса ω на максимальном корне. Напомним, что $m(G) = a_1 + \ldots + a_r$ для группы G типа A_r, $m(G) = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{r-1} + a_r$ для группы G типа B_r и $m(G) = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r$, если G – группа типа D_r. Для $G = B_3(K)$ определим m': $m' = 1$ при $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_1 + \omega_2$ и $m' = 0$ в противном случае. Положим

$$N(a,b;c,d;e,f) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a \le x_1 \le b,\ c \le x_2 \le d,\ e \le x_1 + x_2 \le f\}.$$

Теорема 1. *Пусть $p = 2$, $G = A_r(K)$, $B_r(K)$ или $D_r(K)$, $H = A_2(K)$ – подсистемная подгруппа группы G и ω – 2-ограниченный доминантный вес. Тогда*

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \begin{cases} N(0, m - a_3; 0, m - a_1; a_2, m), & G = A_3(K), \\ N(0, m - a_r; 0, m - a_1; 0, m), & G = A_r(K), r > 3, \\ N(0, m - a_2; 0, m - a_2; 0, m), & G = B_r(K), r > 3, \\ & \text{или } D_r(K), \\ N(0, m - a_2; 0, m - a_2; m', m), & G = B_3(K). \end{cases}$$

Поскольку $B_r(K) \cong C_r(K)$ (как абстрактные группы) при $p = 2$, то мы описали ограничения модулей для всех классических групп.

Таким образом оказывается, что за исключением случая $G = B_3(K)$ и $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_1 + \omega_2$ множество $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$ совпадает с соответствующим множеством в характеристике 0, полученным в [5, 6]. В то же самое время, структура и размерности модуля $L(\omega)$ в характеристике 2 и в характеристике 0 могут значительно различаться. Аналогичные результаты для G-модулей в произвольной положительной характеристике, с локально малыми старшими весами относительно характеристики, получены автором в [5] для специальной линейной группы и в [6] для спинорных групп.

2. Предварительные сведения

Пусть $L(G)$ – алгебра Ли группы G. Для корня α из системы корней группы G символы X_α и $\mathcal{X}_\alpha$ обозначают корневой элемент алгебры

Ли $L(G)$ и корневую подгруппу группы G, соответствующие корню α. Если k – неотрицательное целое число, то $X_{\alpha,k}$ – это элемент гиперaлгебры алгебры Ли $L(G)$, соответствующий паре $(\alpha,\, k)$. При $k < p$ справедливо равенство $X_{\alpha,k} = (X_\alpha)^k/k!$. Символом H_α обозначим элемент алгебры Ли $L(G)$, определенный в [2, §1]. Если $\alpha = \alpha_i$, мы пишем просто X_i, $\mathcal{X}_i$, $X_{i,k}$, and H_i.

Пусть $M^{[k]}$ – это G-модуль M, подкрученный k-ой степенью морфизма Фробениуса. Символы $\Lambda(M)$ и M^μ обозначают множество всех весов модуля M и весовое пространство веса μ в M. Если M – это модуль старшего веса, то $v^+ \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Для весового вектора $v \in M$, символ $\omega_\Pi(v)$ обозначает вес вектора v относительно подсистемной подгруппы Π группы G. Пусть $(\ ,\ )$ – невырожденная симметрическая билинейная форма на множестве весов группы G, инвариантная относительно действия группы Вейля группы G, $\langle \mu, \alpha\rangle = 2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ для веса μ и корня α.

В следующей лемме мы суммируем некоторые факты для операторов $X_{\alpha,k}$, X_α и H_α, приведенные в [1, лемма 5.14] и [2, теорема 1 и лемма 11].

Лемма 1.
(i) $X_\alpha X_{-\alpha,k} = X_{-\alpha,k}X_\alpha + H_\alpha X_{-\alpha,k-1} + (k-1)X_{-\alpha,k-1}$.
В частности, $X_\alpha X_{-\alpha} = X_{-\alpha}X_\alpha + H_\alpha$.
(ii) $X_{i,k}X_{-j,d} = X_{-j,d}X_{i,k}$ *при* $i, j > 0$ *и* $i \neq j$.
(iii) *Если v – весовой вектор веса λ и α – корень, то $X_\alpha v$ – весовой вектор веса $\lambda + \alpha$ (или $X_\alpha v = 0$).*

Символом $\mu|\Pi$ обозначим ограничение веса μ группы G на подсистемную подгруппу Π группы G.

Лемма 2 ([4, Часть II, 2.11])**.** *Пусть $\Pi = G(i_1,\dots,i_s) \subset G$. Тогда $K\Pi v^+ \subset L(\omega)$ – простой Π-модуль со старшим весом $\omega|\Pi$ и прямое слагаемое ограничения $L(\omega)|\Pi$.*

Предположим, что Π – подсистемная подгруппа группы G, а M – это G-модуль. Символ $U^+(\Pi)$ обозначает подгруппу в Π, порожденную подгруппами $\mathcal{X}_\alpha$ для всех положительных корней подгруппы Π. Вектор $v \in M$ называется примитивным относительно подгруппы Π, если v – это ненулевой весовой вектор и подгруппа $U^+(\Pi)$ фиксирует v. Если вектор v примитивен относительно Π, то очевидно, что $\omega_\Pi(v) \in \mathrm{Irr}(M|\Pi)$.

Следующие две леммы используются для построения примитивных векторов.

Лемма 3 ([7, Лемма 2.46]). *Пусть M – неразложимый G-модуль со старшим весом $\omega = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$ и $1 \le i, j \le r$. Предположим, что $0 < a_j < p$ для некоторого j. Пусть $b_k = -\langle \alpha_{k+1}, \alpha_k \rangle$ и $c_k = -\langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle$. Для целого числа d с $0 < d \le a_j$ определим вектор $v(i, j, d)$ следующим образом. Положим $d_j = d$. Если $i < j$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}b_k$ при $i \le k < j$. Если $i > j$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}c_k$ при $i \ge k > j$. Теперь*

$$v(i, j, d) = X_{-i,d_i} \dots X_{-k,d_k} \dots X_{-j,d}v^+.$$

При $i = j$ положим $v(i, j, d) = X_{-i,d}v^+$. Тогда $v(i, j, d) \ne 0$ и $X_{l,b}v(i, j, d) = 0$ для положительного индекса $l \ne i$ и $b > 0$. Следовательно, $\mathcal{X}_l$ фиксирует $v(i, j, d)$ и этот вектор примитивен относительно подгруппы $G(1, \dots, i-1, i+1, \dots, r)$.

Лемма 4. *Пусть M – это G-модуль, $v \in M$ – весовой вектор, который фиксирует подгруппа $\mathcal{X}_i$ для некоторого i, $1 \le i \le r$, и $w = X_{-i_1,k_1} \dots X_{-i_s,k_s}v$, где $i_t > 0$ для всех t, $1 \le t \le s$.*

(i) *Если $i_t \ne i$ для всех t, $1 \le t \le s$, то $\mathcal{X}_i$ фиксирует w.*

(ii) *Если $i_t = i$, $k_t = 1$ и $i_l \ne i$ для всех $l \ne t$, то из равенства $X_i w = 0$ следует, что $\mathcal{X}_i w = w$.*

(iii) *Если $i_t = i$, $k_t = 2$ и $i_l \ne i$ для всех $l \ne t$, или $i_{t_1} = i$, $k_{t_1} = 1$, $i_{t_2} = i$, $k_{t_2} = 1$ и $i_l \ne i$ для всех $l \ne t_1$ и t_2, то из равенств $X_i w = 0$ и $X_{i,2}w = 0$ вытекает, что $\mathcal{X}_i w = w$.*

Доказательство. Утверждение следует из определения корневой подгруппы в [2, §3] и леммы 1.

В работах [5] и [6] были получены следующие результаты о множестве $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

Лемма 5 ([5, теорема 1.1], [6, предложение 1.1]). *Пусть $p = 0$, $G = A_r(K)$, $B_r(K)$ или $D_r(K)$, $H = A_2(K)$ – подсистемная подгруппа группы G и ω – доминантный вес. Тогда*

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \begin{cases} N(0, m-a_3; 0, m-a_1; a_2, m), & G = A_3(K), \\ N(0, m-a_r; 0, m-a_1; 0, m), & G = A_r(K), r > 3, \\ N(0, m-a_2; 0, m-a_2; 0, m), & G = B_r(K) \text{ или } D_r(K). \end{cases}$$

Лемма 6 ([5, предложение 1.2], [6, предложение 1.2]). *Пусть $p > 0$, $G = A_r(K)$, $B_r(K)$ или $D_r(K)$, $H = A_2(K)$ – подсистемная подгруппа группы G и ω – p-ограниченный доминантный вес. Тогда*

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) \subset \begin{cases} N(0, m-a_r; 0, m-a_1; 0, m), & G = A_r(K), \\ N(0, m-a_2; 0, m-a_2; 0, m), & G = B_r(K) \text{ или } D_r(K). \end{cases}$$

3. Специальная линейная группа

В этом параграфе мы доказываем теорему для $G = A_r(K)$, $r \geq 3$. Напомним, что $p = 2$ и вес ω 2-ограничен. Мы предполагаем, что $H = G(1, 2)$, если не указано противное. Для специальной линейной группы $m = a_1 + \ldots + a_r$. Обозначим множество $N(0, m - a_r; 0, m - a_1; 0, m)$ символом $\mathfrak{S}$.

Общая схема нахождения множества $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$ следующая. Мы начинаем со случая $r = 3$, затем рассматриваем $r = 4$ и $r > 4$. Каждый случай делится на подслучаи согласно значению ω. Для таких подслучаев мы выписываем множество $\mathfrak{S}$, которое согласно лемме 6 содержит множество $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$, рассматриваем каждый вес из $\mathfrak{S}$ и определяем, действительно ли существует композиционный фактор с таким старшим весом или нет. При $r > 3$ мы используем результаты для модулей над подгруппами $S_1 = G(1, \ldots, r-1)$ и $S_2 = G(2, \ldots, r)$, имеющими тип A_{r-1}, а при $r > 4$ применяем индукцию по r.

Мы используем леммы 2 и 3, чтобы построить векторы, примитивные относительно подгрупп H, S_1 или S_2. В частности, $\omega|H \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$ и $\omega_H(v) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$ для векторов $v = v(3, j, d)$. Во многих случаях, действуя элементами $X_{i,k}$ на вектор старшего веса v^+ или на другой вектор, мы находим вектор u, примитивный относительно H или S_l ($l = 1$ или 2). Тогда $\omega_H(u) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$ или $\mathrm{Irr}(L(\omega)|S_l)$ соответственно. Чтобы доказать, что вектор u ненулевой и примитивный, мы используем леммы 1 и 4. В некоторых случаях мы применяем результаты из [5].

I) Сначала предположим, что $G = A_3(K)$. Можно считать, что $a_1 \geq a_3$. В противном случае, рассмотрим модуль, дуальный к $L(\omega)$.

1) Применяя теорему 1.3 из [5], получаем, что

$$\mathrm{Irr}(L(\omega_1)|H) = \{(0,0), (1,0)\},$$

$$\mathrm{Irr}(L(\omega_2)|H) = \{(1,0), (0,1)\}.$$

Согласно следствию 1.5 из [5],

$$\mathrm{Irr}(L(\omega_1 + \omega_3)|H) = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

2) Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Множество $\mathfrak{S} = \{(2,0), (1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$. Тогда $\omega|G(1,2) = (1,1)$ и $\omega|G(2,3) = (1,0) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Пусть $v = v(3,2,1)$. Тогда также $\omega_H(v) = (2,0) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

Положим $u = X_{-3}X_{-1}X_{-2}v^+$. Используя леммы 1 и 3, получаем, что $X_1u = X_{-3}H_1X_{-2}v^+ = 0$, $X_2u = X_{-3}X_{-1}v^+ = 0$ и $X_2X_3u = X_2H_3X_{-1}X_{-2}v^+ = X_2X_{-1}X_{-2}v^+ = X_{-1}v^+ \neq 0$. Из леммы 4 следует, что вектор u примитивен относительно H. Следовательно, $\omega_H(u) = (0,1) \subset \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

Остается доказать, что отсутствует нулевой фактор. Любой вес λ модуля $L(\omega)$ может быть записан в виде $\omega - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3$, где $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Тогда произвольный вес из множества $\Lambda(L(\omega)|H)$ имеет вид $(1 - 2k_1 + k_2)\omega_1 + (1 + k_1 - 2k_2 + k_3)\omega_2$. Значит, для веса $(0,0)$ получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - 2k_1 + k_2 = 0, \\ 1 + k_1 - 2k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Она имеет решение $k_2 = 2k_1 - 1$, $k_3 = 3k_1 - 3$. При $k_1 \geq 1$ вес $\lambda \notin \Lambda(L(\omega))$. Следовательно, единственной возможностью для λ является $\omega - \alpha_1 - \alpha_2$. Тогда весовое пространство $L(\omega)^\lambda$ порождается двумя векторами $v_1 = X_{-1}X_{-2}v^+$ и $v_2 = X_{-2}X_{-1}v^+$. В силу леммы 1, $X_1v_1 = H_1X_{-2}v^+ = 0$ и $X_2v_1 = X_{-1}v^+ \neq 0$. Аналогично, $X_1v_2 = X_{-2}v^+ \neq 0$ и $X_2v_2 = 0$. Значит, не существует примитивного относительно H вектора веса λ и $(0,0) \notin \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

3) Теперь предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Тогда

$$\mathfrak{S} = \{(2,1),(1,2),(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(0,0)\}.$$

Согласно [5, теорема 1.4], $(2,1),(1,2),(1,1) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Пусть $u_1 = X_{-2}X_{-3}v^+$. Применяя лемму 1, получаем, что $X_1u_1 = 0$, $X_2u_1 = H_2X_{-3}v^+ = 0$, $X_3u_1 = X_{-2}v^+ \neq 0$. Следовательно, вектор u_1 примитивен относительно H и $\omega_H(u_1) = (2,0) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Положим $u_2 = X_{-1}X_{-2}X_{-3}v^+$. Тогда $X_1u_2 = H_1X_{-2}X_{-3}v^+ = 0$, $X_2u_2 = X_{-1}H_2X_{-3}v^+ = 0$ и $X_2X_3u_2 = X_{-1}v^+ \neq 0$. Поэтому вектор u_2 примитивен относительно H и $\omega_H(u_2) = (0,1) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Поскольку вес ω самодуален, то $(0,2)$ и $(1,0)$ также принадлежат $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

Остается доказать, что $(0,0) \notin \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Как и в предыдущем пункте, для произвольного веса $\lambda \in \Lambda(L(\omega))$ его ограничение на H равно $\lambda|H = (1-2k_1+k_2)\omega_1 + (1+k_1-2k_2+k_3)\omega_2$, где $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Значит, если $\lambda|H = (0,0)$, то $k_2 = 2k_1 - 1$, $k_3 = 3k_1 - 3$. Для $k_1 > 2$ вес $\lambda \notin \Lambda(L(\omega))$. Следовательно, $\lambda = \omega - \alpha_1 - \alpha_2$ или $\omega - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3$. Как и выше, можно доказать, что для $\lambda = \omega - \alpha_1 - \alpha_2$ не существует примитивного относительно H вектора веса λ. Теперь предположим, что $\lambda = \omega - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3$. Обозначим символом $\omega^- = \omega - 3\alpha_1 - 4\alpha_2 - 3\alpha_3$ минимальный вес модуля $L(\omega)$ и символом v^- фиксированный вектор веса ω^-. Тогда $\lambda = \omega^- + \alpha_1 + \alpha_2$. Положим $v_1 = X_1X_2v^-$ и $v_2 = X_2X_1v^-$. Эти векторы ненулевые, поскольку $X_{-2}v_1 = X_1v^- \neq 0$ и $X_{-1}v_2 = X_2v^- \neq 0$. Поэтому $L(\omega)^\lambda$ порождается этими двумя векторами. Пусть $w_1 = X_1v_1$ и $w_2 = X_2v_1$. Из леммы 1 следует, что $w_1 = 2X_{1,2}X_2v^- = 0$ и $X_{-2}w_2 = H_{-2}X_1X_2v^- + X_2X_1X_{-2}X_2v^- = X_2X_1H_{-2}v^- = X_2X_1v^- \neq 0$, а значит, $w_2 \neq 0$. Аналогично, $X_1v_2 \neq 0$ и $X_2v_2 = 0$. Следовательно, не существует примитивного относительно H вектора веса λ и $(0,0) \notin \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

II) Теперь предположим, что $G = A_4(K)$. Можно считать, что $a_1 + a_2 \geq a_3 + a_4$. В противном случае рассмотрим дуальный модуль. Напомним, что $S_1 = G(1,2,3)$ и $S_2 = G(2,3,4)$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что H равна $G(1,2)$ в первом случае и $G(2,3)$ во втором, и H содержится в S_1 или S_2 соответственно. В каждом случае мы используем векторы v^+ или $v = v(i,j,d)$, примитивные относительно S_1 или S_2, или строим примитивный вектор u. Этот вектор порождает неразложимый S_l-модуль M ($l = 1$ или 2), который теперь можно ограничить на подгруппу H и применить результаты пункта I. Иногда мы напрямую строим векторы w, примитивные относительно H.

1) Пусть $\omega = \omega_1$. Тогда $\mathfrak{S} = \{(1,0),(0,0)\}$. Положим $M = KS_1v^+$. Поскольку $\omega|S_1 = \omega_1$, модуль M при ограничении на подгруппу H согласно пункту I(1) дает факторы со старшими весами $(1,0)$ и $(0,0)$.

2) Если $\omega = \omega_2$, то $\mathfrak{S} = \{(1,0),(0,1),(0,0)\}$. Пусть $M_1 = KS_1v^+$ и $M_2 = KS_2v^+$. Тогда $\omega|S_1 = \omega_2$ и $\omega|S_2 = \omega_1$. Используя пункт I(1), мы получаем все искомые факторы.

3) Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Тогда $\mathfrak{S} = \{(2,0),\ (1,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (0,0)\}$. Как и в предыдущем пункте, положим $M_1 = KS_1v^+$ и $M_2 = KS_2v^+$. Теперь $\omega|S_1 = \omega_1 + \omega_2$ и $\omega|S_2 = \omega_1$. Используя пункт I(1) для M_2 и пункт I(2) для M_1, получаем факторы со старшими весами $(2,0),(1,1),(1,0),(0,1)$ и $(0,0)$ соответственно.

4) Пусть $\omega = \omega_1 + \omega_3$. Множество $\mathfrak{S}$ такое же, как в предыдущем пункте. Положим $v = X_{-1}v^+$, $M_1 = KS_1v^+$ и $M_2 = KS_2v$. Согласно пункту I(1) ограничение $M_1|H$ дает факторы со старшими весами $(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)$, а согласно пункту I(2) ограничение $M_2|H$ дает $(2,0)$.

5) При $\omega = \omega_1 + \omega_4$ получаем $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(1,1),\ (1,0),\ (0,1),$

$(0,0)\}$ согласно [5, следствие 1.5].

6) Пусть $\omega = \omega_2 + \omega_3$. Тогда $\mathfrak{S} = \{(2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (0,1),\ (0,0)\}$. Согласно теореме 1.4 из [5], $(2,0), (1,1), (0,2) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Положим $u = X_{-2}X_{-4}X_{-3}v^+$. Применяя лемму 1, получаем $X_1u = 0$, $X_2u = H_2X_{-4}X_{-3}v^+ = 0$, $X_3u = X_{-2}X_{-4}v^+ = 0$, $X_3X_4u = X_3X_{-2}H_4X_{-3}v^+ = X_3X_{-2}X_{-3}v^+ = X_{-2}v^+ \neq 0$. Из леммы 4 следует, что вектор u примитивен относительно S_1. Положим $M = KS_1u$. Так как $\omega_{S_1}(u) = \omega_1 + \omega_3$, то модуль M при ограничении на подгруппу H дает факторы со старшими весами $(1,0)$, $(0,1)$ и $(0,0)$.

7) Если $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, то

$$\mathfrak{S} = \{(3,0),(2,1),(1,2),(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(0,0)\}.$$

Положим $M_1 = KS_1v^+$. Тогда ограничение $M_1|H$ дает факторы со старшими весами $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(0,1)$. По теореме 1.4 из [5], $(3,0) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Как и в предыдущем пункте, положим $u = X_{-2}X_{-4}X_{-3}v^+$. Рассуждая, как выше, получаем, что вектор u примитивен относительно S_1. Пусть $M_2 = KS_1u$. Так как $\omega_{S_1}(u) = 2\omega_1 + \omega_3$, применяя теорему Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41] и пункт I(1), легко видеть, что $(0,0) \in \mathrm{Irr}(M_2|H)$.

8) Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_4$. Тогда

$$\mathfrak{S} = \{(2,1),(1,2),(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(0,0)\}.$$

По теореме 1.4 из [5], $(2,1)$ и $(1,2) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Пусть $M_1 = KS_2v^+$. Согласно пункту I(3) ограничение $M_1|H$ дает факторы со старшими весами $(1,1),(1,0),(0,1)$ и $(0,0)$. Положим $v = X_{-4}v^+$ и $M_2 = KS_1v$. Так как $\omega_{S_1}(v) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, то ограничение $M_2|H$ дает факторы со старшими весами $(2,0)$ и $(0,2)$.

9) Пусть теперь $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$. Тогда

$$\mathfrak{S} = \{(3,1),(2,2),(1,3),(3,0),(2,1),(1,2),\\ (0,3),(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(0,0)\}.$$

Из [5, теорема 1.4] следует, что $(3,1)$, $(2,2)$ и $(1,3) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Положим $M_1 = KS_1v^+$. Тогда ограничение $M_1|H$ дает факторы со старшими весами $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Пусть $v = v(4,3,1)$ и $M_2 = KS_1v$. Так как $\omega_{S_1}(v) = \omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3$, по теореме Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41] получаем, что $L(\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3) \cong L(\omega_1 + \omega_3) \otimes L(\omega_2)^{[1]}$. Поэтому ограничение $M_2|H$ дает факторы со старшими весами $(3,0)$ и $(0,3)$. Положим

$u = X_{-2}X_{-4}X_{-3}X_{-4}v^+$. Тогда $X_1u = 0$, $X_2u = H_2X_{-4}X_{-3}X_{-4}v^+ = 0$, $X_3u = H_2X_{-2}X_{-4}H_3X_{-4}v^+ = 0$, $X_4u = X_{-2}H_4X_{-3}X_{-4}v^+ + X_{-2}X_{-4}X_{-3}H_4v^+ = X_{-2}X_{-4}X_{-3}v^+$. Последний вектор не равен нулю, так как $X_4X_3(X_4u) = X_4X_{-2}X_{-4}H_3v^+ = X_{-2}v^+ \neq 0$. По лемме 4 вектор u примитивен относительно подгруппы S_1. Положим $M_3 = KS_1u$. Так как $\omega_{S_1}(u) = 2\omega_1 + 2\omega_3$, ограничение $M_3|H$ дает тривиальный фактор.

III) Наконец предположим, что $G = A_r(K)$, $r > 4$. Воспользуемся индукцией по r. Мы предполагаем, что утверждение справедливо при $r-1$ и докажем его для r. Можно считать, что $a_1 \geq a_r$. Напомним, что $S_1 = G(1,\dots,r-1)$. Вектор v^+ порождает неразложимый S_1-модуль $M_1 = KS_1v^+$, который можно ограничить на подгруппу H и применить индукцию.

1) Пусть $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ и $a_i = 0$ для некоторого i, $1 < i < r$. Положим $G' = G(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i+\alpha_{i+1},\alpha_{i+2},\dots,\alpha_r)$ и $M' = KG'v^+$. По предположению индукции $\mathrm{Irr}(M'|H) = \mathfrak{S}$.

2) Предположим, что $\omega = a_1\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{r-1}$. Тогда $\mathfrak{S} = N(0, a_1+r-2; 0, r-2; 0, a_1+r-2)$. Согласно предположению индукции $\mathrm{Irr}(M_1|H) = N(0, a_1+r-3; 0, r-2; 0, a_1+r-2)$. Фактор со старшим весом $(a_1+r-2, 0)$ можно найти из [5, теорема 1.4].

3) Наконец, предположим, что $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_r$. Тогда $\mathfrak{S} = N(0, r-1; 0, r-1; 0, r)$. По предположению индукции $\mathrm{Irr}(M_1|H) = N(0, r-2; 0, r-2; 0, r-1)$. Согласно [5, теорема 1.4] мы получаем все веса (x_1, x_2) из $\mathfrak{S}$, для которых $x_1 + x_2 = r$. Остается найти факторы со старшими весами $(r-1, 0)$ и $(0, r-1)$. Положим $G' = G(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$ и $M' = KG'v^+$. Так как $\omega|G' = 2\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{r-1}$, то мы получаем эти факторы из теоремы Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41] и предположения индукции.

4. Спинорная группа

В этом параграфе мы докажем теорему для модулей над $G = B_r(K)$ $(r > 2)$ или $D_r(K)$ $(r > 3)$. Напомним, что $m = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{r-1} + a_r$ в первом случае и $m = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r$ во втором. Обозначим множество $N(0, m-a_2; 0, m-a_2; 0, m)$ символом $\mathfrak{S}$. Из леммы 6 следует, что достаточно доказать включение $\mathfrak{S} \subset \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Общая схема нахождения множества $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$ такая же, как и для A_r-модулей.

I) Пусть сначала $G = D_4(K)$. Мы можем предполагать, что $a_1 \geq a_3 \geq a_4$. В противном случае, применим автоморфизм графа. Подгруппы $S_1 = G(1,2,3)$ и $S_2 = G(3,2,4)$ имеют тип A_3. Можно считать, что H равна $G(1,2)$ в первом случае и $G(3,2)$ во втором, и подгруппа H содержится в S_1 или S_2 соответственно. Мы используем векторы v^+ или $v = v(i,j,d)$, которые примитивны относительно подгруппы S, или строим примитивный вектор u. Такой вектор порождает неразложимый S_l-модуль M и $\mathrm{Irr}(M|H) \subset \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Для $\mathrm{Irr}(M|H)$ можно применить результаты об A_3-модулях.

1) Пусть $\omega = \omega_1$. Тогда $\mathfrak{S} = \{(1,0),(0,1),(0,0)\}$. Положим $v = v(4,1,1)$, $M_1 = KS_1v^+$ и $M_2 = KS_1v$. Так как $\omega|S_1 = \omega_1$ и $\omega_{S_1}(u) = \omega_3$, модуль M_1 при ограничении на подгруппу H дает факторы со старшими весами $(1,0)$ и $(0,0)$, а модуль M_2 дает $(0,1)$.

2) Если $\omega = \omega_2$, то $\mathfrak{S} = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$. Положим $v = v(4,2,1)$ и $M = KS_1v$. Тогда $\omega_{S_1}(v) = \omega_1 + \omega_3$. Следовательно, $\mathrm{Irr}(M|H) = \mathfrak{S}$.

3) Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Тогда $\mathfrak{S} = N(0,2;0,2;0,3)$. Пусть $v_1 = v(1,2,1)$ и $M_1 = KS_2v_1$. Вес $\omega_{S_2}(v_1) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Поэтому ограничение $M_1|H$ дает композиционные факторы со старшими весами $N(0,2;0,2;1,3)$.

Теперь положим $v_2 = v(4,1,1)$ и $M_2 = KS_1v_2$. Тогда $\omega_{S_1}(v_2) = \omega_1 + 2\omega_3$. По теореме Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41] $L(\omega_1 + 2\omega_3) \cong L(\omega_1) \otimes L(\omega_3)^{[1]}$. Применяя результаты для специальной линейной группы, получаем фактор со старшим весом $(0,0)$.

4) Пусть $\omega = \omega_1 + \omega_3$. Тогда $\mathfrak{S} = \{(2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (0,1),\ (0,0)\}$. Для $M_1 = KS_1v^+$ имеем $\mathrm{Irr}(M_1|H) = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$. Факторы со старшими весами $(2,0)$ и $(0,2)$ лежат в $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$ согласно [6, лемма 4.1].

5) Если $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, то $\mathfrak{S} = N(0,3;0,3;0,4)$. Положим $M_1 = KS_1v^+$. Ограничение $M_1|H$ дает факторы со старшими весами из множества $N(0,2;0,2;1,3)$. Факторы со старшими весами $(3,1), (2,2)$ и $(1,3)$ можно получить из [6, лемма 4.1].

Положим $v_1 = v(4,1,1)$ и $M_2 = KS_1v_1$. Тогда $\omega_{S_1}(v_1) = \omega_1 + 3\omega_3$. Согласно теореме Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41], $L(\omega_1 + 3\omega_3) \cong L(\omega_1 + \omega_3) \otimes L(\omega_3)^{[1]}$. Следовательно, из ограничения $M_2|H$ мы получаем факторы со старшими весами $(0,3)$ и $(0,0)$. Аналогично, можно положить $v_1 = v(4,3,1)$ и получить $(3,0) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

6) Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_3 + \omega_4$. Тогда $\mathfrak{S} = N(0,3;0,3;0,3)$. Из [6, лемма 4.1] следует, что $(3,0),(2,1),(1,2),(0,3) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Положим $v = X_{-4}v^+$, $M_1 = KS_1v^+$ и $M_2 = KS_1v$. Так как $\omega|S_1 = \omega_1 + \omega_3$ и $\omega_{S_1}(v) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, ограничения $M_1|H$ и $M_2|H$ дают все

оставшиеся факторы.

7) Теперь пусть $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$. Тогда $\mathfrak{S} = N(0,4;0,4;0,5)$. Согласно [6, лемма 4.1] $(4,1),(3,2),(2,3),(1,4) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

Положим $v_1 = X_{-4}v^+$ и $u = X_{-2}X_{-4}v^+$. По лемме 1, $X_2u = H_2X_{-4}v^+ = 0$ и $X_4u = X_{-2}v^+ \neq 0$. Из леммы 4 следует, что вектор u примитивен относительно S_1. Пусть $M_1 = KS_1v^+$, $M_2 = KS_1v_1$ и $M_3 = KS_1u$. Тогда $\omega|S_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, $\omega_{S_1}(v_1) = \omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3$ и $\omega_{S_1}(u) = 2\omega_1 + 2\omega_3$. Следовательно, из $\mathrm{Irr}(M_1|H)$ можно получить факторы со старшими весами $(2,1),(1,2),(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1)$, из $\mathrm{Irr}(M_2|H)$ можно получить $(3,1),(1,3),(3,0),(0,3)$, а из $\mathrm{Irr}(M_3|H)$ получаем $(2,2),(0,0)$.

При $v_2 = v(4,1,1)$ имеем $\omega_{S_1}(v_2) = \omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3$. Положим $M_4 = KS_1v_2$. Из теоремы Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41] вытекает, что $L(\omega_1+\omega_2+3\omega_3) \cong L(\omega_1+\omega_2+\omega_3) \otimes L(\omega_3)^{[1]}$. Следовательно, $(0,4) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$. Аналогично, $(4,0) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

II) Предположим, что $G = D_r(K)$, $r > 4$. Применим индукцию по r. Мы предполагаем, что утверждение справедливо при $r-1$ и доказываем его для r. Без ограничения общности можно считать, что $a_{r-1} \geq a_r$.

Пусть $G' = G(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_{i+1}, \dots, r) \cong D_{r-1}(K)$ для $1 \leq i < r-1$. Вектор v^+ порождает неразложимый G'-модуль $M' = KG'v^+$, который мы можем ограничить на подгруппу H и применить предположение индукции.

1) Пусть $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ и $a_i = 0$ при $2 < i < r-1$. По предположению индукции $\mathrm{Irr}(M'|H) = \mathfrak{S}$.

2) Предположим, что $\omega = a_1\omega_1 + \omega_3 + \ldots + \omega_{r-2} + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r$. Тогда $\mathfrak{S} = N(0,m;0,m;0,m)$. Пусть $i = 2$ в определении группы G'. По предположению индукции $\mathrm{Irr}(M'|H) = N(0,m-1;0,m-1;0,m)$. Согласно [2, лемма 4.1] веса $(m,0)$ и $(0,m)$ лежат в $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

3) Предположим, что $\omega = \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{r-2} + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r$. Тогда $\mathfrak{S} = N(0,m-1;0,m-1;0,m)$. Пусть $i = 1$ в определении группы G'. По предположению индукции

$$\mathrm{Irr}(M'|H) = N(0,m-2;0,m-2;0,m-1).$$

Все факторы со старшими весами (x_1,x_2), $x_1 + x_2 = m$, могут быть найдены из [6, лемма 4.1]. Остается найти факторы со старшими весами $(0,m-1)$ и $(m-1,0)$. Если $a_{r-1} = 1$, положим $v = v(1,r-1,1)$, в противном случае положим $v = v(1,r-2,1)$. Вектор v примитивен относительно подгруппы $S = G(2,\dots,r) \cong D_{r-1}(K)$ и $\omega_S(v) =$

$\omega_2 + \ldots + \omega_{r-2} + (a_{r-1} + a_r + 1)\omega_{r-1}$. Положим $M = KSv$. Используя теорему Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41], если $a_{r-1} + a_r + 1 > 1$, и предположение индукции, можно получить, что $(0, m-1)$ и $(m-1, 0) \in \mathrm{Irr}(M|H)$.

4) Теперь пусть $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_{r-2} + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r$. Тогда $m = 1 + 2(r-3) + a_{r-1} + a_r$ и $\mathfrak{S} = N(0, m-1; 0, m-1; 0, m)$. Положим $S = G(2, \ldots, r-1, r) \cong D_{r-1}(K)$ и $M_1 = KSv^+$. По предположению индукции $\mathrm{Irr}(M_1|H) = N(0, m-3; 0, m-3; 0, m-2)$. Согласно [6, лемма 4.1] $N(0, m-1; 0, m-1; m, m) \in \mathrm{Irr}(L(\omega)|H)$.

Факторы со старшими весами $(m-1, 0)$ и $(0, m-1)$ можно найти, как в предыдущем пункте.

Значит, остается определить факторы со старшими весами из множества

$$T = N(0, m-2; 0, m-2; m-1, m-1) \cup \{(m-2, 0), (0, m-2)\}.$$

Пусть $v = X_{-1}v^+$ и $M_2 = KSv$. Тогда $\omega_{G'}(v) = 2\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{r-3} + a_{r-1}\omega_{r-2} + a_r\omega_{r-1}$. Применяя теорему Стейнберга о тензорном произведении [2, теорема 41] и предположение индукции, можно получить все веса из множества T, за исключением случая $r = 5$ и $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, когда мы получаем все веса из T кроме $(2, 2)$. В этом случае положим $P = G(1, 2, 3, 4)$ и $M_3 = KPv^+$. Тогда $(2, 2) \in \mathrm{Irr}(M_3|H)$.

III) Предположим, что $G = B_r(K)$, $r > 3$. Пусть $S = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r-1} + 2\alpha_r) \cong D_r(K)$ и $M = KSv^+$. Тогда $\omega|S = a_1\omega_1 + \ldots + a_{r-1}\omega_{r-1} + (a_{r-1} + a_r)\omega_r$. Если $a_{r-1} + a_r < 2$, то $\mathrm{Irr}(M|H) = N(0, m-a_2; 0, m-a_2; 0, m)$. Предположим, что $a_{r-1} = a_r = 1$. Пусть $\mu = a_1\omega_1 + \ldots + a_{r-1}\omega_{r-1}$. Согласно следствию теоремы 41 из [2], $L(\omega) \cong L(\mu) \otimes L(\omega_r)$. Ограничивая модули $L(\mu)$ и $L(\omega_r)$ на подгруппу H и используя полученные выше результаты, получаем, что $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \mathfrak{S}$.

IV) Теперь пусть $G = B_3(K)$. В этом случае $m = a_1 + 2a_2 + a_3$. Мы предполагаем, что $H = H(1, 2)$. Положим $S = G(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_3) \cong A_3(K)$, $M = KSv^+$ и $H' = G(2, 1)$. Тогда $\omega|S = a_2\omega_1 + a_1\omega_2 + (a_2 + a_3)\omega_3$. Пусть сначала $a_2 + a_3 < 2$. Имеем $\mathrm{Irr}(M|H') = N(0, a_1 + a_2; 0, a_1 + a_2 + a_3; a_1, a_1 + 2a_2 + a_3)$. Значит,

$$N(0, a_1 + a_2 + a_3; 0, a_1 + a_2; a_1, a_1 + 2a_2 + a_3) \subset \mathrm{Irr}(L(\omega)|H). \qquad (1)$$

Чтобы найти оставшиеся факторы, рассуждаем как для $G = A_3(K)$.

1) Предположим, что $\omega = \omega_1$. Тогда $\mathfrak{S} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. Согласно формуле (1), $(1,0)$ и $(0,1)$ лежат в $\operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$. Остается доказать, что не существует нулевого фактора. Любой вес $\lambda \in \Lambda(L(\omega))$ может быть записан в виде $\omega - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Тогда произвольный вес из множества $\Lambda(L(\omega)|H)$ имеет вид $(1-2k_1+k_2)\omega_1 + (k_1 - 2k_2 + k_3)\omega_2$. Значит, для $(0,0)$ получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - 2k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 - 2k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Она имеет решение $k_2 = 2k_1 - 1$, $k_3 = 3k_1 - 2$. При $k_1 > 1$ получившийся вес λ не принадлежит множеству $\Lambda(L(\omega))$. Следовательно, единственной возможностью для λ является $\omega - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$. Тогда пространство $L(\omega)^\lambda$ порождается вектором $u = X_{-3}X_{-2}X_{-1}v^+$. По лемме 1, $X_1u = X_{-3}X_{-2}v^+ = 0$, $X_2u = X_{-3}H_2X_{-1}v^+ = 0$ и $X_3u = H_3X_{-2}X_{-1}v^+ = 2X_{-2}X_{-1}v^+ = 0$. Согласно лемме 4 вектор u примитивен относительно группы G и $u \neq kv^+$ при $k \in K$. Следовательно, $u = 0$, $L(\omega)^\lambda = 0$ и $(0,0) \notin \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

2) Пусть $\omega = \omega_2$. Из формулы (1) следует, что $\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\} = \mathfrak{S} \subset \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

3) Если $\omega = \omega_3$, то $\mathfrak{S} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. Из формулы (1) можно получить факторы со старшими весами $(0,0)$ и $(1,0)$. Положим $v = X_{-3}v^+$. Тогда $\omega_H(v) = (0,1) \in \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

4) Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Тогда

$$\mathfrak{S} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(2,1),(1,2)\}.$$

Формула (1) дает все веса, кроме $(0,0)$.

Остается доказать, что $(0,0) \notin \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$. Как и в пункте 1), для произвольного веса $\lambda \in \Lambda(L(\omega))$, $\lambda|H = (1-2k_1+k_2)\omega_1 + (k_1 - 2k_2 + k_3)\omega_2$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Для $(0,0)$ получаем, что $k_2 = 2k_1 - 1$, $k_3 = 3k_1 - 3$. При $k_1 > 2$ получившийся вес λ не принадлежит множеству $\Lambda(L(\omega))$. Следовательно, $\lambda = \omega - \alpha_1 - \alpha_2$ или $\omega - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3$. Пусть $\lambda = \omega - \alpha_1 - \alpha_2$. Тогда пространство $L(\omega)^\lambda$ порождается векторами $v_1 = X_{-2}X_{-1}v^+$ и $v_2 = X_{-1}X_{-2}v^+$. По лемме 1, $X_1v_1 = X_{-2}v^+ \neq 0$, $X_2v_1 = H_2X_{-1}v^+ = 0$, $X_1v_2 = H_1X_{-2}v^+ = 0$ и $X_2v_2 = X_{-1}v^+ \neq 0$. Значит, не существует примитивного относительно подгруппы H вектора веса $\omega - \alpha_1 - \alpha_2$.

Пусть $\lambda = \omega - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3$. Обозначим символом ω^- минимальный вес модуля $L(\omega)$, а символом v^- – фиксированный вектор этого веса. Тогда $\lambda = \omega^- + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Мы хотим доказать, что $L(\omega)^\lambda = 0$. Действуя группой Вейля, легко видеть, что это эквивалентно тому, что $L(\omega)^\mu = 0$ при $\mu = \omega - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$. Весовое пространство $L(\omega)^\mu$ порождается векторами $v_1 = X_{-3}X_{-2}X_{-1}v^+$, $v_2 = X_{-3}X_{-1}X_{-2}v^+$ и $v_3 = X_{-1}X_{-3}X_{-2}v^+$. Положим $u = X_{-3}X_{-2}v^+$. По лемме 1, $X_1u = 0$, $X_2u = X_{-3}v^+ = 0$ и $X_3u = H_3X_{-2}v^+ = 0$. Согласно лемме 4 вектор u примитивен относительно группы G. Следовательно, $u = 0$. Теперь $X_1v_1 = X_{-3}X_{-2}v^+ = 0$, $X_2v_1 = X_{-3}H_2X_{-1}v^+ = 0$ и $X_3v_1 = H_3X_{-2}X_{-1}v^+ = 0$. Значит, $v_1 = 0$. Аналогично можно получить, что $v_2 = v_3 = 0$. Следовательно, $L(\omega)^\lambda = 0$ и $(0,0) \notin \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

5) Пусть $\omega = \omega_2 + \omega_3$. Тогда $\mathfrak{S} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (2,1), (1,2)\}$. По формуле (1), $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(2,1) \in \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$. Положим $v_1 = v(3,2,1)$ и $v_2 = X_{-3}v^+$. Тогда $\omega_H(v_1) = (1,2)$ и $\omega_H(v_2) = (0,2) \in \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

6) Если $\omega = \omega_1 + \omega_3$, то $\mathfrak{S} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2)\}$. Из следствия теоремы 41 в [2] вытекает, что $L(\omega) \cong L(\omega_1) \otimes L(\omega_3)$. Из пунктов (1) и (3) следует, что $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)\} \in \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

Остается найти $(0,0)$. Пусть V_1 и V_2 – неприводимые H-модули со старшими весами ω_1 и ω_2 соответственно. Согласно вышеприведенному следствию $\operatorname{Irr}(V_1 \otimes V_2) \subset \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$. Так как $\Lambda(V_1) = \{\omega_1, \omega_1 - \alpha_1, \omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2\}$, $\Lambda(V_1) = \{\omega_2, \omega_2 - \alpha_2, \omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2\}$ и каждый из этих весов имеет кратность 1, то $\Lambda(V_1 \otimes V_2) = \{\omega, \omega - \alpha_1, \omega - \alpha_2, \omega - \alpha_1 - \alpha_2, \omega - 2\alpha_1 - \alpha_2, \omega - \alpha_1 - 2\alpha_2, \omega - 2\alpha_1 - 2\alpha_2\}$. Вес $\omega - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ имеет в модуле $V_1 \otimes V_2$ кратность 3, а другие веса имеют кратность 1. Следовательно, модуль $V_1 \otimes V_2$ не является неприводимым и $\operatorname{Irr}(V_1 \otimes V_2) = \{(1,1), (0,0)\}$. Отсюда вытекает, что $(0,0) \in \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

7) Для $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$

$$\mathfrak{S} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0),\\ (2,1), (1,2), (0,3), (3,1), (2,2), (1,3)\}.$$

Из следствия теоремы 41 в [2] получаем, что $L(\omega) \cong L(\omega_1+\omega_2) \otimes L(\omega_3)$. Из пунктов (1) и (4) следует, что все веса из $\mathfrak{S}$, которые не равны $(0,0)$, лежат в $\operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$. Рассуждая, как в предыдущем пункте, получаем, что $(0,0) \in \operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$.

Теорема доказана.

Литература

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — В кн.: Семинар по алгебраическим группам. Мир, М., 1973.
2. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М., 1975.
3. R. Goodman, N. R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants.* Graduate texts in mathematics **255**, Springer, 2009.
4. J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups,* 2nd ed. Providence, AMS (2003).
5. A. A. Osinovskaya, *On the restrictions of modular irreducible representations of algebraic groups of type A_n to naturally embedded subgroups of type A_2.* — J. Group Theory **8** (2005), 43–92.
6. A. A. Osinovskaya, *The restrictions of representations of algebraic groups of types B_n and D_n to subgroups of type A_2.* — J. Algebra and Its Applications **4** (2005), 467–479.
7. I. D. Suprunenko, *The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **200**, No. 939 (2009).

Osinovskaya A. A. Restrictions of modules over classical groups to subgroups of type A_2 in characteristic 2.

The restrictions of irreducible modules over classical groups to subsystem subgroups of type A_2 in characteristic 2 are studied. The composition factors (without their multiplicities) for restrictions of such modules with 2-restricted highest weights are found.

Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова 11,
220072 Минск, Беларусь

E-mail: anna@im.bas-net.by

Поступило 19 ноября 2010 г.