



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Rabinovich, Noetherian character of pseudodifferential operators with symbols of class $S_{\rho,\delta}^m$ ($0 \leq \delta = \rho < 1$),
Mat. Zametki, 1980, Volume 27, Issue 3, 457–467

<https://www.mathnet.ru/eng/mzm6530>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

May 21, 2025, 07:32:53



О НЕТЕРОВОСТИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СИМВОЛАМИ КЛАССА

$$S_{\rho, \delta}^m \quad (0 \leq \delta = \rho < 1)$$

В. С. Рабинович

Настоящая заметка посвящена необходимым и достаточным условиям нетеровости и вопросу гладкости и роста решений псевдодифференциальных уравнений на \mathbb{R}^n с символами класса Л. Хермандера $S_{\rho, \sigma}^m$ [1] в предельном случае $\rho = \delta$ ($0 \leq \delta < 1$).

Достаточность аналогичных условий для операторов с символами класса $S_{1,0}^m$ впервые установлена В. В. Грушиным [2]. Перенос этих результатов на классы $S_{\rho, \delta}^m$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, не вызывает трудностей.

В случае же $\rho = \delta$ традиционная техника оценок остаточных членов не годится, поэтому мы применяем технику, аналогичную развитой в работе [3] (см. также [4]) при оценках нормы псевдодифференциальных операторов (п.д.о.) в L_2 в предельном случае $\rho = \delta$.

В работе рассматриваются более общие, чем $S_{\rho, \delta}^m$, классы символов, допускающих рост также и по переменной x .

Отметим еще работы [5]—[7], где рассматривались близкие вопросы для других классов п.д.о.

§ 1. Обозначения и формулировка основного результата. 1. Через R_x^n мы обозначаем n -мерное вещественное пространство, точки которого обозначаются через $x = (x_1, \dots, x_n)$, через R_ξ^n — двойственное к R_x^n пространство относительно линейной формы $\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс; тогда $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ — его длина:

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

$$\partial x_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}, \quad \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить, что C^∞ — функция $a(x, \xi)$, определенная на $R_{(x, \xi)}^{2n} = R_x^n \times R_\xi^n$, принадлежит классу $S_\delta^{m, l}$, $0 \leq \delta < 1$, $m \in R$, $l \in R$, если для любых мультииндексов α, β существуют такие константы $C_{\alpha\beta}$ ($C_{\alpha\beta} > 0$), что

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^l \langle \xi \rangle^{m - \delta(|\alpha| - |\beta|)}.$$

Отметим, что при $l = 0$ получается класс символов $S_{\delta, \delta}^m$ из [1].

Положим

$$\mu_{\alpha, \beta}^a(x, \xi) = \langle x \rangle^{-l} \langle \xi \rangle^{-(m - \delta(|\alpha| - |\beta|))} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)|;$$

$$v_{k_1, k_2}^a(x, \xi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq k_1 \\ |\beta| \leq k_2}} \mu_{\alpha, \beta}^a(x, \xi).$$

В пространстве $S_\delta^{m, l}$ введем топологию системой полунорм

$$a|_{k_1, k_2} = \sup_{x, \xi} v_{k_1, k_2}^a(x, \xi).$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Через $\tilde{S}_\delta^{m, l}$ обозначим подмножество в $S_\delta^{m, l}$, состоящее из таких функций, что

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \mu_{\alpha, \beta}(x, \xi) = 0, \quad \forall \beta \neq 0, \quad \forall a \text{ равномерно}$$

по $\xi \in R_\xi^n$,

$$2) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mu_{\alpha, \beta}(x, \xi) = 0, \quad \forall a \neq 0, \quad \forall \beta \text{ равномерно}$$

по $x \in R_x^n$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Через $\tilde{S}_\delta^{m, l, 0}$ обозначим подмножество $S_\delta^{m, l}$, состоящее из таких функций, что

$$\lim_{|\alpha| + |\beta| \rightarrow \infty} \mu_{\alpha, \beta}(x, \xi) = 0, \quad \text{для любых } a \text{ и } \beta.$$

Если $a(x, \xi) \in S_{\delta}^{m,l}$, то через $a(x, D)$ обозначим п.д.о.:

$$a(x, D)u = (2\pi)^{-n} \int a(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi,$$

$$u \in C_0^{\infty}(R^n),$$

$$\hat{u}(\xi) = \int u(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx.$$

Класс всех п.д.о. с символами из $S_{\delta}^{m,l}$ обозначим $LS_{\delta}^{m,l}$

Аналогичный смысл имеют обозначения $L\hat{S}_{\delta}^{m,l}$, $LS_{\delta}^{0,m,l}$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Через H_r^s обозначим пространство Соболева с весом, т. е. множество таких распределений, что

$$\|u\|_{s,r} = \|\langle x \rangle^r \langle D \rangle^s u\|_{L_2} < \infty.$$

П р е д л о ж е н и е 1.1. Пусть $a(x, D) \in LS_{\delta}^{m,l}$, $0 \leq \delta < 1$; тогда $a(x, D)$ ограничен из H_r^s в H_{r-l}^{s-m} . Существует такая константа C , не зависящая от $a(x, \xi)$, такие целые числа k_1 и k_2 , что

$$\|a(x, D)u\|_{s-m, r-l} \leq C |a|_{k_1, k_2} \|u\|_{s, r}.$$

З а м е ч а н и е. По поводу ограниченности п.д.о. класса $S_{\delta}^{m,0} \equiv S_{\delta, \delta}^m$ из H^s в H^{s-m} смотри [4–8]. При $l \neq 0$ ограниченность в классах $LS_{\delta}^{m,l}$ вытекает из формул композиции, доказанных в § 2, и результатов работы [3].

2. Основные результаты настоящей работы сформулированы в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $a(x, D) \in LS_{\delta}^{m,l}$; тогда для того, чтобы $a(x, D)$ был оператором Нетера из H_r^s в H_{r-l}^{s-m} , необходимо и достаточно, чтобы

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \inf_{|x|+|\xi|>R} |a(x, \xi)| \langle x \rangle^{-l} \langle \xi \rangle^{-m} > 0. \quad (1.2)$$

ТЕОРЕМА 1.2. Если выполнено условие (1.2), то

$$\{u \in S'(R^n), a(x, D)u \in S(R^n)\} \Rightarrow u \in S(R^n). \quad (1.3)$$

§ 2. Доказательство формул композиции п.д.о из $\tilde{S}_\delta^{m,l}$, $0 \leq \delta < 1$.

1. Предложение 2.1. Пусть $a(x, \xi) \in S_\delta^{m_1, l_1}$, $b(x, \xi) \in S_\delta^{m_2, l_2}$; тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad r_\theta(x, \xi) &= \\ &= \iint a(x, \xi + \theta\eta) b(x + y, \xi) e^{-i\langle y, \eta \rangle} dy d\eta \in S_\delta^{m_1+m_2, l_1+l_2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

равномерно по $\theta \in [0, 1]$.

2) Пусть $\mu_{\alpha, \beta}^a(x, \xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ для любых α, β равномерно по x , $\mu_{\alpha, \beta}^b(x, \xi) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ для любых α, β равномерно по ξ ; тогда

$$\lim_{|x|+|\xi| \rightarrow \infty} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha r_\theta(x, \xi)| \langle x \rangle^{-(l_1+l_2)} \langle \xi \rangle^{-(m_1+m_2-\delta(|\alpha|-|\beta|))} = 0$$

равномерно по $\theta \in [0, 1]$.

З а м е ч а н и е. Интеграл в (2.1) понимается как осциллирующий (см., например, [4] — [5]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы используем следующие тождества:

$$\begin{aligned} e^{-i\langle y, \eta \rangle} &= \\ &= (1 + \langle \xi + \theta\eta \rangle^{2k_1\delta} |y|^{2k_1})^{-1} (1 + \langle \xi + \theta\eta \rangle^{2k_1\delta} (-\Delta_\eta)^{2k_1}) e^{-i\langle y, \eta \rangle}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$e^{-i\langle y, \eta \rangle} = \langle \eta \rangle^{-2k_2} \langle D_y \rangle^{2k_2} e^{-i\langle y, \eta \rangle}, \quad (2.3)$$

(k_1, k_2 — натуральные числа), из которых следует, что интеграл (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_\theta(x, \xi) &= \iint \langle D_y \rangle^{2k_2} \{ \langle \eta \rangle^{-2k_2} (1 + \langle \xi + \theta\eta \rangle^{2k_1\delta} (-\Delta_\eta)^{2k_1}) \cdot \\ &\cdot (1 + \langle \xi + \theta\eta \rangle^{2k_1\delta} |y|^{2k_1})^{-1} a(x, \xi + \theta\eta) \cdot \\ &\cdot b(x + y, \xi) \} e^{-i\langle y, \eta \rangle} dy d\eta. \end{aligned}$$

Дифференцируя под знаком интеграла и используя оценки (1.1), получаем

$$\begin{aligned} |r_\theta(x, \xi)| &\leq C \iint v_{0, 2k_2}^b(x + y, \xi) v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \eta \rangle^{-2k_2} \cdot \\ &\cdot (1 + \langle \xi + \theta\eta \rangle^{2k_1\delta} |y|^{2k_1})^{-1} \langle x \rangle^{l_1} \langle \xi + \theta\eta \rangle^{m_1} \cdot \\ &\cdot \langle x + y \rangle^{l_2} \langle \xi \rangle^{m_2+2k_2\delta} dy d\eta. \end{aligned}$$

Используя неравенство $\langle x + y \rangle^l \leq C_l \langle x \rangle^l \langle y \rangle^{|l|}$, найдем, что

$$\begin{aligned}
 |r_\theta(x, \xi)| &\leq C \langle x \rangle^{l_1+l_2} \langle \xi \rangle^{m_2+2k_2\delta} \iint v_{0, 2k_2}^b(x + y, \xi) \cdot \\
 &\cdot v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \eta \rangle^{-2k_2} (1 + \langle \xi + \theta\eta \rangle^{2k_1\delta} |y|^{2k_1})^{-1} \cdot \\
 &\cdot \langle \xi + \theta\eta \rangle^{m_1} \langle y \rangle^{|l_2|} dy d\eta \leq \\
 &\leq C \langle x \rangle^{l_1+l_2} \langle \xi \rangle^{m_2+2k_2\delta} \sup_y (v_{0, 2k_2}^b(x + y, \xi) / \langle y \rangle) \cdot \\
 &\cdot \int v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \xi + \theta\eta \rangle^{m_1} \langle \eta \rangle^{-2k_2} d\eta \cdot \\
 &\cdot \int (1 + \langle \xi + \theta\eta \rangle^{2k_1\delta} \langle y \rangle^{2k_1})^{-1} \langle y \rangle^{|l_2|+1} dy.
 \end{aligned}$$

Если во внутреннем интеграле сделать замену $z = \langle \xi + \theta\eta \rangle^\delta y$ и выбрать $2k_1 > n + 1$, то мы получим оценку

$$\begin{aligned}
 |r_\theta(x, \xi)| &\leq \\
 &\leq C \langle x \rangle^{l_1+l_2} \langle \xi \rangle^{m_2+2k_2\delta} \sup_y (v_{0, 2k_2}^b(x + y, \xi) / \langle y \rangle) \cdot \\
 &\cdot \int v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \xi + \theta\eta \rangle^{m_1-n\delta} \langle \eta \rangle^{-2k_2} d\eta. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Область интегрирования в интеграле (2.4) разобьем на три части:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\xi, \theta}^1 &= \{\eta: 0 \leq |\eta| \leq (1/2) |\xi + \theta\eta|^\delta\}; \\
 \Omega_{\xi, \theta}^2 &= \{\eta: (1/2) |\xi + \theta\eta|^\delta \leq |\eta| \leq (1/2) |\xi + \theta\eta|\}; \quad (2.5) \\
 \Omega_{\xi, \theta}^3 &= \{\eta: |\eta| \geq (1/2) |\xi + \theta\eta|\}.
 \end{aligned}$$

Из неравенств (2.3) следует, что в $\Omega_{\xi, \theta}^1 \cup \Omega_{\xi, \theta}^2$ выполнено неравенство $(2/3) |\xi| \leq |\xi + \theta\eta| \leq 2 |\xi|$, а в области $\Omega_{\xi, \theta}^3 - |\eta| \geq |\xi|/3$. Используя эти неравенства, оценим интеграл в (2.4) по каждой из этих областей:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{\xi, \theta}^1} v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \xi + \theta\eta \rangle^{m_1-n\delta} \langle \eta \rangle^{-2k_2} d\eta &\leq \\
 &\leq C \sup_{\Omega_{\xi, \theta}^1} v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \xi \rangle^{m_1}, \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{\xi, \theta}^2} v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \xi + \theta\eta \rangle^{m_1-n\delta} \langle \eta \rangle^{-2k_2} d\eta &\leq \\
 &\leq \sup_{\Omega_{\xi, \theta}^2} v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \xi \rangle^{m_1-2k_2\delta}. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

В оценке (2.7) $2k_2 > n$, а в (2.6) $k_1 = 0$. Далее имеем

$$\int_{\Omega_{\xi, \theta}^3} v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) \langle \xi + \theta\eta \rangle^{m_1 - n\delta} \langle \eta \rangle^{-2k_2} d\eta \leq \\ \leq C \sup_{\Omega_{\xi, \theta}^3} (v_{2k_1, 0}^a(x, \xi + \theta\eta) / \langle \eta \rangle) \langle \xi \rangle^{m_1 - n\delta - 2k_2 + n + 2}. \quad (2.8)$$

Выберем теперь k_2 так, чтобы

$$2k_2 > \max \{n + 2/(1 - \delta), m_1 + n(1 - \delta) + 2\};$$

тогда из оценок (2.6) — (2.8) получаем

$$|r_\theta(x, \xi)| \leq C |a|_{2k_1, 0} |b|_{0, 2k_2} \langle x \rangle^{l_1 + l_2} \langle \xi \rangle^{m_1 + m_2}.$$

Если же выполнены условия второй части предложения, то

$$\lim_{|x| + |\xi| \rightarrow \infty} |r_\theta(x, \xi)| \langle x \rangle^{-(l_1 + l_2)} \langle \xi \rangle^{-(m_1 + m_2)} = 0$$

равномерно по θ .

Оценки производных функций $r_\theta(x, \xi)$ проводятся точно так же.

С л е д с т в и е 2.1. 1 Пусть $a(x, \xi) \in S_\delta^{m_1, l_1}$, $b(x, \xi) \in S_\delta^{m_2, l_2}$; тогда символ $a(x, \xi) \circ b(x, \xi)$ произведения $a(x, D) \times b(x, D)$ принадлежит $S_\delta^{m_1 + m_2, l_1 + l_2}$.

2) Если $a(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta^{m_1, l_1}$, $b(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta^{m_2, l_2}$, то

$$a(x, \xi) \cdot b(x, \xi) = a(x, \xi) b(x, \xi) + q(x, \xi).$$

где $q(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta^{m_1 + m_2, l_1 + l_2}$.

З а м е ч а н и е. Первая часть следствия 2.1 при $l_1 = l_2 = 0$ установлена в работе [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2.1. Мы имеем [6]

$$a(x, \xi) \circ b(x, \xi) = \\ = a(x, \xi) b(x, \xi) + (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^n \int_0^1 d\theta \cdot \\ \cdot \int \int \partial_{\eta_j} a(x, \xi + \theta\eta) D_{x_j} b(x + y, \xi) e^{-i\langle y, \eta \rangle} dy d\eta. \quad (2.9)$$

Применяя к (2.9) первую и вторую части предложения 2.1, получаем соответствующие части следствия 2.1.

П р е д л о ж е н и е 2.2 (см. [2]). Пусть $a(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta^{m, l}$; тогда $a(x, D)$ вполне непрерывен из H_r^s в H_{r-l}^{s-m} .

Это предложение следует из предложения 1.1. Доказательство аналогично [2].

2. Докажем достаточность условия (1.2) теоремы 1.1 о нетеровости п.д.о. $a(x, D) \in LS_{\delta}^{m, l}$.

Из условия (1.2) следует, что существует такое число $R > 0$, что $|a(x, \xi)| \geq C \langle x \rangle^l \langle \xi \rangle^m$ при $|x|^2 + |\xi|^2 \geq R^2$. Пусть

$$\varphi(x, \xi) = \begin{cases} 1, & |x|^2 + |\xi|^2 > 2R^2, \\ 0, & |x|^2 + |\xi|^2 < R^2, \end{cases}$$

и $\varphi(x, \xi)$ принадлежит C^{∞} .

Символ $b(x, \xi) = a^{-1}(x, \xi) \varphi(x, \xi) \in \mathcal{S}_{\delta}^{-m, -l}$. Из следствия 2.1 находим, что

$$\begin{aligned} b(x, D) a(x, D) &= I + r_1(x, D), \\ a(x, D) b(x, D) &= I + r_2(x, D), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $r_j(x, D) \in LS_{\delta}^{s, 0}$ ($j = 1, 2$) и, следовательно, вполне непрерывны в пространствах H_r^s для любых s и r .

3. В этом пункте мы докажем теорему 1.2 о гладкости решений уравнения $a(x, D)u = f$, $a(x, \xi) \in \mathcal{S}_{\delta}^{m, l}$.

Отметим, что стандартные рассуждения, связанные с априорной оценкой в этой ситуации не подходят, так как $r_1(x, D)$ улучшает свойства H_r^s не контролируемо.

Нам понадобится

Предложение 2.3. *Формально сопряженный к $a(x, D) \in LS_{\delta}^{m, l}$ оператор $A^* \in LS_{\delta}^{m, l}$. Его символ $a^*(x, \xi) = \overline{a(x, \xi)} + q(x, \xi)$, где $q(x, \xi) \in \mathcal{S}_{\delta}^{m, l}$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 2.1 и его следствия.

Докажем теперь теорему 1.2. Отметим, что $S(R^n) = \cap_{s, r} H_r^s$ и $S'(R^n) = \cup_{s, r} H_r^s$, где в пересечении берется топология проективного предела, в объединении топология индуктивного предела, а в $S(R^n)$, $S'(R^n)$ — стандартные топологии. Ясно, что $\text{Ker } a(x, D) \subset \text{Ker } (I + r_1(x, D))$, но множество $\text{Ker } (I + r_1(x, D))$ одно и то же во всех пространствах H_r^s , что следует из [9, стр. 313]. Таким образом, $\text{Ker } a(x, D) \subset \cap_{s, r} H_r^s = S(R^n)$.

Аналогично доказывается, что ядро оператора A^* , сопряженного к $a(x, D)$: $H_r^s \rightarrow H_{r-l}^{s-m}$, также принадлежит $S(R^n)$. Отсюда немедленно следует включение (1.3).

§ 3. Необходимость условий теоремы 1.1. Доказательство необходимости легко сводится к случаю $H_0^0 = L_2$ и операторам класса $LS_\delta^{0,0} = LS_\delta$. Условие (1.1) в этом случае принимает вид

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{|x|+|\xi|>R} |a(x, \xi)| = d > 0. \quad (3.1)$$

Пусть последовательность $(x_\nu, \xi_\nu), (x_\nu, \xi_\nu) \in R_{(x, \xi)}^{2n}$, сходится к бесконечности и

$$d = \lim_{\nu \rightarrow \infty} |a(x_\nu, \xi_\nu)|. \quad (3.2)$$

Следует отдельно рассмотреть три случая:

- 1) $x_\nu \rightarrow \infty, \xi_\nu \rightarrow \xi_0$;
- 2) $x_\nu \rightarrow x_0, \xi_\nu \rightarrow \infty$;
- 3) $x_\nu \rightarrow \infty, \xi_\nu \rightarrow \infty$.

Нетрудно показать, используя, что $a(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta$, и если $u(x) \in S(R^n)$, то

1) $a(x + x_\nu, \xi_0) u(x) = a(x_\nu, \xi_0) u(x) + b_\nu(x, \xi_0) u$, где $\|b_\nu(x, \xi_0) u\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$;

2) $a(x_0, D + \xi_\nu) u(x) = a(x_0, \xi_\nu) u(x) + b_\nu(x_0, D) u(x)$,

где $\|b_\nu(x_0, D) u\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$;

3) $a(x + x_\nu, D + \xi_\nu) u(x) = a(x_\nu, \xi_\nu) u(x) + b_\nu(x, D) u(x)$,

где $\|b_\nu(x, D) u\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала случай 1). Пусть $a(x, D)$ — нетеров оператор; тогда существует такой вполне непрерывный оператор T , что

$$\|(a(x, D) - T) u\|_{L_2} \geq C \|u\|_{L_2} \quad (C > 0). \quad (3.3)$$

Зададимся достаточно малым $\varepsilon > 0$ и выберем ν^1 так, чтобы

$$|a(x_\nu, \xi_0)| - d < \varepsilon \text{ при } \nu > \nu^1. \quad (3.4)$$

Пусть $u(x) \in S(R^n)$, $\|u(x)\|_{L_2} = 1$ и $\text{sup } \hat{u}(\xi)$ лежит в достаточно малой окрестности точки ξ_0 . Эту окрестность выберем так, чтобы

$$\|(a(x, D) - a(x, \xi_0)) u\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Так как $u(\widehat{x - x_\nu}) = e^{i\langle x, \xi_\nu \rangle} \hat{u}(\xi)$, то

$$\| (a(x, D) - a(x, \xi_0)) u(x - x_\nu) \|_{L_2} < \varepsilon. \quad (3.5)$$

Если T вполне непрерывный оператор, то ввиду того, что $u(x - x_\nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$ слабо сходится к нулю, можно найти такое $\nu^2 > \nu^1$, что

$$\| Tu(x - x_\nu) \|_{L_2} < \varepsilon, \quad \nu > \nu^2. \quad (3.6)$$

Выберем $\nu^3 > \nu^2$ так, чтобы

$$\| b_\nu(x, D) u \|_{L_2} < \varepsilon, \quad \nu > \nu^3. \quad (3.7)$$

Используя (3.3) — (3.7), получаем при $\nu > \nu^3$

$$\begin{aligned} d > |a(x_\nu, \xi_0)| - \varepsilon &= \|a(x_\nu, \xi_0) u\|_{L_2} - \varepsilon \geq \\ &\geq \|a(x + x_\nu, \xi_0) u(x)\|_{L_2} - 2\varepsilon = \\ &= \|a(x, \xi_0) u(x - x_\nu)\|_{L_2} - 2\varepsilon \geq \\ &\geq \|a(x, D) u(x - x_\nu)\|_{L_2} - 3\varepsilon \geq \\ &\geq \|(a(x, D) - T) u(x - x_\nu)\|_{L_2} - 4\varepsilon \geq \\ &\geq (C - 4\varepsilon) \|u(x - x_\nu)\|_{L_2} = C - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ как угодно мало, получаем, что $d \geq C > 0$.

Рассмотрение случаев 2) и 3) проводится аналогично. В случае 2) в качестве слабо сходящейся к нулю последовательности выбирается последовательность $e^{i\langle x, \xi_\nu \rangle} u(x)$, где $\sup u(x)$ лежит в малой окрестности точки x_0 . В случае 3) мы рассматриваем последовательность $e^{i\langle x, \xi_\nu \rangle} u(x - x_\nu)$, $\xi_\nu \rightarrow \infty$, $x_\nu \rightarrow \infty$.

В заключение этого параграфа мы отметим следующий результат в пространстве L_2 .

Предложение 3.1. Пусть $a(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta$, $\delta < 1$; тогда

$$\begin{aligned} \| \| a(x, D) \| \|_{L_2} &= \inf_T \| a(x, D) - T \|_{L_2} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x|+|\xi|>R} |a(x, \xi)| \quad (3.8) \end{aligned}$$

(inf берется по всем вполне непрерывным операторам, действующим в L_2).

Доказательство. Оценка снизу

$$\| \| a(x, D) \| \| \geq \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x|+|\xi|>R} |a(x, \xi)|$$

получается теми же рассуждениями, что в доказательстве необходимости теоремы 1.1. Отметим, что для операторов $S_{1,0}$ она ранее получена В. В. Грушиным [2]. Оценка сверху легко получается (см. [10, стр. 39]) из оценки

$$\|a(X, D)u\| \leq (K + \varepsilon)\|u\| + C\|Tu\|,$$

где $K = \limsup_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x|+|\xi|>R} |a(x, \xi)|$, $\varepsilon > 0$ малое, константа $C > 0$ зависит от ε , T — вполне непрерывный оператор.

З а м е ч а н и е 1. Построенная в настоящей заметке теория нетеровости п.д.о. дословно переносится на символы, удовлетворяющие следующим оценкам:

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta}(x, \xi) \langle x \rangle^{l - \delta(|\beta| - |\alpha|)} \langle \xi \rangle^m, \quad 0 \leq \delta < 1,$$

где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C_{\alpha\beta}(x, \xi) = 0, \quad \beta \neq 0$$

для любого α равномерно по x и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C_{\alpha\beta}(x, \xi) = 0, \quad \alpha \neq 0$$

для любого β равномерно по ξ .

З а м е ч а н и е 2. Класс операторов $S_\delta^{m,r}$ при $\delta = 0$ естественно возникает при изучении дифференциально-разностных операторов с частными производными.

З а м е ч а н и е 3. Класс $\bigcup_{m,r} S_\delta^{m,r}$ инвариантен относительно перехода к двойственным операторам относительно преобразования Фурье F , т. е. относительно отображения $A \rightarrow F^{-1}AF$, что весьма важно в асимптотических методах (см. [11]).

Ростовский государственный
университет

Поступило
10.V.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Х е р м а н д е р Л., Псевдодифференциальные операторы и гипозэллиптические уравнения, Сб., Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1967.
- [2] Г р у ш и н В. В., Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами, Функц. анализ и его прилож., 4, № 3 (1970), 37—50.
- [3] C a l d e r o n A. P., V a i l l a n c o n r t R., A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69 (1972), 1185—1187.

- [4] K u m a n o-g o H., Pseudo-differential operators of multiple symbol and the Calderon — Vaillancourt theorem, J. Math. Soc. Japan, 27, № 1 (1975), 113—120.
- [5] B e a l s R., A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J., 42, № 1 (1975), 1—42.
- [6] K u m a n o-g o H., T a n i g u c h i K., Oscillatory integrals of symbols of pseudo-differential operators on R^n and operators of Fredholm type, Proc. Japan. Acad., 49 (1973), 397—402.
- [7] Ш у б и н М. А., Псевдодифференциальные операторы в R^n , Докл. АН СССР, 196, № 2 (1974), 316—319.
- [8] S o r d e s H. O., On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundness of pseudodifferential operators, J. Funct. Anal., 18 (1975), 115—131.
- [9] Г о х б е р г И. Ц., Ф е л ь д м а н И. А., Уравнение в свертках и проекционные методы их решения, М., «Наука», 1971.
- [10] К о н Дж. Дж., Н и р е н б е р г Л., Алгебра псевдодифференциальных операторов, Сб., Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1967.
- [11] М а с л о в В. П., Ф е д о р ю к М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., «Наука», 1976.