

ЯДРО БЕРГМАНА В ОКРЕСТНОСТИ ДИАГОНАЛИ
 ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, БЛИЗКИХ К ЭЛЛИПСОИДАМ

О. К настоящему времени оценкам, асимптотике и вычислению ядер Бергмана для областей в \mathbb{C}^n посвящена обширная литература. Однако без преувеличения можно сказать, что двумя мощными последовательными импульсами, породившими ее, являются фундаментальные работы Ч.Феффермана [1] и Л.Буте де Монвеля и И.Шёстранда [2], посвященные строго псевдовыпуклым областям с C^∞ -границей. Ч.Фефферманом путем виртуозной работы было выделено главное слагаемое в ядре Бергмана при использовании сильных результатов о решении $\bar{\partial}$ -задачи Неймана, создан метод, впоследствии уточнявшийся самим Ч.Фефферманом и другими математиками; Л.Буте де Монвель и И.Шёстранд применили теорию псевдодифференциальных операторов. Пока для получения главного члена асимптотики в ядре Бергмана в точном виде альтернативных подходов, кроме этих двух, не было. Для получения точных по порядку оценок ядра Бергмана и его производных для достаточно произвольных слабо псевдовыпуклых областей недавно И.Стейном и другими был применен новый метод. Однако употребленная там терминология, чрезвычайно удобная для оценок, не позволяет уточнить оценки до асимптотики.

В настоящей работе предлагается еще один подход к задаче об асимптотике ядра Бергмана, позволяющий отказаться от требования гладкости границы — при том, конечно, условии, что изучается поведение ядра "вблизи диагонали". Если область строго псевдовыпукла и с C^k -границей, то приводимая ниже теорема дает главное слагаемое как у Ч.Феффермана [1] с оценкой остатка как у Л.Буте де Монвеля — И.Шёстранда [2], в работах которых область должна была иметь C^∞ -границу.

1. Перейдем к точным формулировкам. Пусть $\alpha_k, \alpha_k \geq 1$, $k = 1, \dots, n$ — произвольные числа, Ω_0 — комплексный эллипсоид

$$\Omega_0 = \{ z = (z_1, \dots, z_n) : |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq 1 \},$$

$B_0(z, \eta)$, $z, \eta \in \Omega_0$ — ядро Бергмана для эллипсоида Ω_0 . Выражение для $B_0(z, \eta)$ имеется в статье А.Бонами и Н.Лоуе [3]. В настоящей работе для экономии места не будем выписывать его явно. Пусть далее Ω — область со следующими свойствами (не обязательно псевдовыпуклая): а) область Ω ограничена, $|z| < c_0$ при $z \in \Omega$, с C^1 -границей и вне цилиндра $T_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{ z : |z_j - 1| \leq \varepsilon_0 \}$ произвольна,

в) пересечение $\Omega \cap T_{\varepsilon_0}$ задается неравенством

$$|z_1|^2 + |z_2|^{2\alpha_2} + \dots + |z_n|^{2\alpha_n} + F(z_1, \dots, z_n) \leq 1, \quad (1)$$

где F - вещественная C^1 -гладкая функция со свойством

$$|F(z_1, \dots, z_n)| \leq c_1 (|1 - x_1|^{\beta_1} + |y_1|^{\gamma_1} + |z_2|^{\beta_2} + \dots + |z_n|^{\beta_n}), \quad (2)$$

где $z_k = x_k + iy_k$, $\beta_1 > 1$, $\gamma_1 > 2$, $\beta_k > 2\alpha_k$, $k = 2, \dots, n$.

Пусть, далее, $z^* = (\rho, 0, \dots, 0)$, где $0 < \rho < 1$ и $0 < \delta < 1$.

Через $V_\delta(z^*)$ обозначим эллипсоид

$$V_\delta(z^*) = \{ \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) : |\eta_1 - \rho|^2 + (1 - \rho^2)(|\eta_2|^2 + \dots + |\eta_n|^2) \leq \delta^2(1 - \rho)^2 \}.$$

Нетрудно установить, что существует $\rho_0 = \rho_0(c_1, \varepsilon_0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < 1$ такое, что при $\rho_0 < \rho < 1$ будут справедливы соотношения $z^* \in \Omega$,

$V_\delta(z^*) \subset \Omega \cap \Omega_0$, а также

$$B_{\delta(1-\rho)}(z^*) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \eta : |\eta - z^*| \leq \delta(1-\rho) \} \subset V_\delta(z^*).$$

ТЕОРЕМА. Предположим, что область Ω удовлетворяет условиям, приведенным в пунктах а) и в), ρ_0 , $V_\delta(z^*)$ введены выше.

Пусть

$$\sigma = \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n},$$

$$l = \min \left(1, \beta_1 - 1, \frac{\gamma_1 - 2}{2}, \frac{\beta_2 - 2\alpha_2}{2\alpha_2}, \dots, \frac{\beta_n - 2\alpha_n}{2\alpha_n} \right).$$

Через $B(z^*, \eta)$ обозначим ядро Бергмана для Ω , $B_0(z^*, \eta)$ - соответственно, для Ω_0 . Тогда существует постоянная $A = A(c_0, c_1, \varepsilon_0, \delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n, l)$, такая, что при $\rho > \rho_0$, $\eta \in V_\delta(z^*)$ выполнено

$$|B(z^*, \eta) - B_0(z^*, \eta)| \leq \frac{A}{(1-\rho)^{2+\sigma-l}}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если Ω - строго псевдовыпуклая область с C^4 -границей, то с помощью канонического биголоморфизма [1] можно привести ее к виду (1) с функцией F , удовлетворяющей соотношению (2) при $\alpha_k = 1$, $2 \leq k \leq n$, $\gamma_1 = 4$, $\beta_k = 4$, $2 \leq k \leq 4$, что дает $l = 1$, т.е. действительно получится в данном случае главное слагаемое $B_0(z, \eta)$ как в [1] с оценкой остатка, как в [2]. Представляет интерес также и зависимость постоянной A только от перечисленных параметров.

2. Начало доказательства: свойства ядра Бергмана.

Приведем некоторые классические факты о ядре Бергмана.

а) Для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ядро Бергмана

$K_{\Omega}(z, \eta)$ существует и $K_{\Omega}(z, \cdot) \in L^2(\Omega)$

в) Ядро $K_{\Omega}(z, \eta)$ голоморфно по z и антиголоморфно по η , при этом

$$K_{\Omega}(\eta, z) = \overline{K_{\Omega}(z, \eta)}, \quad K(\eta, \eta) > 0$$

с) если функция f голоморфна в Ω и $f \in L^2(\Omega)$, то

$$f(z) = \int_{\Omega} f(\eta) K(z, \eta) d\sigma_{\eta}, \quad d\sigma_{\eta} - \text{мера Лебега в } \Omega,$$

д) если A - биголоморфное отображение, $A: \Omega \rightarrow \mathcal{D}$, $J(\eta)$ - якобиан A , то

$$B_{\Omega}(z, \eta) = B_{\mathcal{D}}(A(z), A(\eta)) \overline{J(z)} J(\eta)$$

е) если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, $\eta \in \Omega_1$, то

$$K_{\Omega_1}(\eta, \eta) \geq K_{\Omega_2}(\eta, \eta).$$

Для полноты изложения и в силу важности для дальнейшего докажем свойство е). Пользуясь свойством с), неравенством Кош-Буняковского, свойством в) и опять свойством с), получим

$$\begin{aligned} K_{\Omega_2}(\eta, \eta) &= \int_{\Omega_1} K_{\Omega_2}(t, \eta) K_{\Omega_1}(\eta, t) d\sigma_t \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega_1} |K_{\Omega_2}(t, \eta)|^2 d\sigma_t \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_1} |K_{\Omega_1}(\eta, t)|^2 d\sigma_t \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega_2} |K_{\Omega_2}(t, \eta)|^2 d\sigma_t \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_1} |K_{\Omega_1}(\eta, t)|^2 d\sigma_t \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{\Omega_2} K_{\Omega_2}(t, \eta) K_{\Omega_2}(\eta, t) d\sigma_t \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_1} K_{\Omega_1}(t, \eta) K_{\Omega_1}(\eta, t) d\sigma_t \right)^{1/2} = \\ &= (K_{\Omega_2}(\eta, \eta))^{1/2} (K_{\Omega_1}(\eta, \eta))^{1/2}, \end{aligned}$$

что и дает свойство е).

3. Продолжение доказательства: специальное отображение

Используя обозначения теоремы, введем следующее биголоморфное отображение

$$\eta = A(z); \quad \eta_1 = \frac{z_1 - \rho}{1 - \rho z_1}, \quad \eta_k = \frac{(1 - \rho^2)^{1/2} \alpha_k}{(1 - \rho z_1)^{1/\alpha_k}} z_k, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Тогда

$$A(\Omega_0) = \Omega_0, \quad A(\eta_0) = \eta_0$$

в) существуют $\beta_1 = \beta_0(c_0, c_1, \varepsilon_0, \delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n, l) < 1$ и $c_2 = c_2(c_0, c_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, l) > 0$ такие, что при $\beta_1 < \rho < 1$, $z^* = (\beta, 0, \dots, 0)$ справедливо

$$\text{dist}(A(\nu_{\mathcal{F}}(z^*)), \partial\Omega_0) \geq c_2(1-\delta)$$

с) существуют $\rho_2 = \rho_2(c_0, c_1, \varepsilon_0, \delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \nu) < 1$ и $c_3 = c_3(c_0, c_1, \varepsilon_0, \delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \nu) > 0$ такие, что при $1-\rho > \rho_2$ и $w \in \partial\Omega$ выполняется

$$\text{dist}(A(w), \partial\Omega_0) \leq c_3(1-\rho)^\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) Имеем

$$z \in \partial\Omega_0 \iff |z_1|^2 + \sum_{k=2}^n |z_k|^{2\alpha_k} = 1.$$

Поэтому, если $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) = A(z)$, $z \in \partial\Omega_0$, то

$$\begin{aligned} |\eta_1|^2 + \sum_k |\eta_k|^{2\alpha_k} &= \left| \frac{z_1 - \rho}{1 - \rho z_1} \right|^2 + \frac{1 - \rho^2}{|1 - \rho z_1|^2} \cdot \sum_k |z_k|^{2\alpha_k} = \\ &= \left| \frac{z_1 - \rho}{1 - \rho z_1} \right|^2 + \frac{1 - \rho^2}{|1 - \rho z_1|^2} (1 - |z_1|^2) = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось; то, что $A(\eta_0) = \eta_0$, очевидно.

в) Понятно, что достаточно установить соотношение

$$|\tau_1|^2 + \sum_k |\tau_k|^{2\alpha_k} \leq \delta^2, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) = A(\eta), \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \nu_{\mathcal{F}}(z^*).$$

Поскольку в данном случае

$$\left(\sum_k |\eta_k|^{2\alpha_k} \right) (1 - \rho^2) \leq \delta^2 (1 - \rho^2) - |\eta_1 - \rho|^2, \quad |\eta_1 - \rho| \leq \delta(1 - \rho),$$

то

$$\begin{aligned} |\tau_1|^2 + \sum_k |\tau_k|^{2\alpha_k} &= \left| \frac{\eta_1 - \rho}{1 - \rho \eta_1} \right|^2 + \frac{1 - \rho^2}{|1 - \rho \eta_1|^2} \left(\sum_k |\eta_k|^{2\alpha_k} \right) \leq \\ &\leq \left| \frac{\eta_1 - \rho}{1 - \rho \eta_1} \right|^2 + \frac{\delta^2 (1 - \rho^2) - |\eta_1 - \rho|^2}{|1 - \rho \eta_1|^2} = \frac{\delta^2 (1 - \rho^2)^2}{|1 - \rho \eta_1|^2} \leq \frac{\delta^2 (1 - \rho^2)^2}{(1 - \rho(\rho + \delta(1 - \rho)))^2} = \\ &= \frac{\delta^2 (1 - \rho)^2}{(1 - \rho)^2 (1 + \rho - \delta \rho)^2} \leq \delta^2, \end{aligned}$$

что и требуется.

с) Рассмотрим следующие вспомогательные области Ω_+ , Ω_- :

$$\Omega_+ = \{ z = (z_1, \dots, z_n) : |z - \eta_0| \leq \varepsilon_0, |z_1|^2 + \dots + |z_n|^{2\alpha_n} + c_1(|1 - z_1|^{\beta_1} + |z_1|^{\beta_1} + \dots + |z_n|^{\beta_n}) \leq 1 \}$$

$$\Omega_- = \{ z = (z_1, \dots, z_n) : |z - \eta_0| \leq \varepsilon_0, |z_1|^2 + \dots + |z_n|^{2\alpha_n} - c_1(|1 - z_1|^{\beta_1} + |z_1|^{\beta_1} + \dots + |z_n|^{\beta_n}) \leq 1 \}.$$

Ясно, что

$$\Omega_+ \subset \Omega \cap \Gamma_{\varepsilon_0} \subset \Omega_-$$

В самом деле, если $z \in \partial\Omega \cap B_{\varepsilon_0}$, то

$$|z_1|^2 + \dots + |z_n|^{2\alpha_n} + F(z) = 1,$$

поэтому в силу (2)

$$|z_1|^2 + \dots + |z_n|^{2\alpha_n} + c_1(\dots) > 1, \quad |z_1|^2 + \dots + |z_n|^{2\alpha_n} - c_1(\dots) < 1,$$

т.е. действительно $z \notin \Omega_+$, $z \in \Omega_-$.

Рассмотрим теперь следующие точки:

$$z_+^0 = (z_{1+}^0, \dots, z_{n+}^0), \quad z_-^0 = (z_{1-}^0, \dots, z_{n-}^0), \quad z_{i\pm}^0 = x_{i\pm}^0 + iy_{i\pm}^0,$$

где $z_{k\pm}^0$ определены по (z_1, \dots, z_n) , $z_1 = x_1 + iy_1$ так:

$$\lambda(x_{i\pm}^0 - 1) + (x_{i\pm}^0 - 1)^2 = \lambda(x_1 - 1) + (x_1 - 1)^2 \pm c_1|x_1 - 1|^{\beta_1} \quad (3)$$

$$y_{i\pm}^{02} = y_1^2 \pm c_1|y_1|^{\gamma} \quad (4)$$

$$z_{k\pm}^0 = z_k(1 \pm c_1|z_k|^{\beta_k - 2\alpha_k})^{\frac{1}{2\alpha_k}}, \quad k = 2, \dots, n. \quad (5)$$

Если $z \in \partial\Omega_+$, то

$$\begin{aligned} |z_{1+}^0|^2 + \sum_{k=2}^n |z_{k+}^0|^{2\alpha_k} &= 1 + \lambda(z_{1+}^0 - 1) + (x_{1+}^0 - 1)^2 + y_{1+}^{02} + \\ &+ \sum_{k=2}^n |z_k|^2 \alpha_k (1 + c_1|z_k|^{\beta_k - 2\alpha_k}) = 1 + \lambda(x_1 - 1) + (x_1 - 1)^2 + y_1^2 + \\ &+ \sum_{k=2}^n |z_k|^{2\alpha_k} + c_1(|x_1 - 1|^{\beta_1} + |y_1|^{\gamma} + \sum_{k=2}^n |z_k|^{\beta_k}) = 1 \end{aligned} \quad (6_+)$$

и аналогично при $z \in \partial\Omega_-$

$$|z_{1-}^0|^2 + \sum_{k=2}^n |z_{k-}^0|^{2\alpha_k} = 1. \quad (6_-)$$

Понятно также, что

$$|x_{i\pm}^0 - 1| \asymp |x_1 - 1|, \quad |y_{i\pm}^0| \asymp |y_1| \quad (7)$$

$$|z_{k\pm}^0| \asymp |z_k|, \quad k = 2, \dots, n, \quad (8)$$

затем из (3) - (5) и (7), (8) находим, что для некоторой постоянной $c = (c_1, \varepsilon_0, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \gamma, \beta_2, \dots, \beta_n)$ выполняется

$$|x_1 - x_{1+}^0| \leq c|x_1 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_+ \quad (9_+)$$

$$|x_1 - x_{1-}^0| \leq c|x_1 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (9_-)$$

$$|y_{1+}^{02} - y_1^2| \leq c|y_1|^{\gamma}, \quad z \in \partial\Omega_+ \quad (10_+)$$

$$|y_{j_+}^{0z} - y_{j_+}^z| \leq c |y_{j_+}|^r, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (I0_-)$$

$$\left| |x_{k_+}^0|^{2\alpha_k} - |x_k|^{2\alpha_k} \right| \leq c |x_k|^{\beta_k}, \quad z \in \partial\Omega_+ \quad (II_+)$$

$$\left| |x_{k_-}^0|^{2\alpha_k} - |x_k|^{2\alpha_k} \right| \leq c |x_k|^{\beta_k}, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (II_-)$$

Далее, (6_±) - (II_±) влекут при $z \in \partial\Omega_{\pm}$ и $|x_1 - 1| \leq \varepsilon_0$:

$$|y_{j_+}^0| \leq c' |1 - x_{j_+}^0|^{1/2}, \quad z \in \partial\Omega_+, \quad |y_{j_-}^0| \leq c' |1 - x_{j_-}^0|^{1/2}, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (I2)$$

$$|x_{k_+}^0| \leq c' |1 - x_{j_+}^0|^{1/2\alpha_k}, \quad z \in \partial\Omega_+, \quad |x_{k_-}^0| \leq c' |1 - x_{j_-}^0|^{1/2\alpha_k}, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (I3)$$

Наконец, вспоминая определение ν , из (3)-(I3) находим

$$|x_1 - x_{j_+}^0| \leq c'' |x_{j_+}^0 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_+; \quad |x_1 - x_{j_-}^0| \leq c'' |x_{j_-}^0 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (I4)$$

$$|y_{j_+}^z - y_{j_+}^{0z}| \leq c'' |x_{j_+}^0 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_+; \quad |y_{j_-}^z - y_{j_-}^{0z}| \leq c'' |x_{j_-}^0 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (I5)$$

$$\left| |x_k|^{2\alpha_k} - |x_{k_+}^0|^{2\alpha_k} \right| \leq c'' |x_{j_+}^0 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_+; \quad \left| |x_k|^{2\alpha_k} - |x_{k_-}^0|^{2\alpha_k} \right| \leq c'' |x_{j_-}^0 - 1|^{\beta_1}, \quad z \in \partial\Omega_- \quad (I6)$$

Если мы учтем, что при малых ε_0 и $z = (z_1, \dots, z_n) \in \partial\Omega_{\pm} \cap B_{\varepsilon_0}$ справедливо $x_1 \leq 1$, $z_1 = x_1 + iy_1$, то с учетом (7) имеем

$$\begin{aligned} |1 - \rho z_1|^2 &= (1 - \rho x_1)^2 + \rho^2 y_1^2 = (1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \rho)(1 - x_1) + \rho^2(1 - x_1)^2 + \rho^2 y_1^2 \times \\ &\times (1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \rho)(1 - x_{j_{\pm}}^0) + \rho^2(1 - x_{j_{\pm}}^0)^2 + \rho^2 y_{j_{\pm}}^{0z} = |1 - \rho z_{j_{\pm}}^0|^2, \end{aligned} \quad (I7)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n) \in \partial\Omega_{\pm} \cap B_{\varepsilon_0}$, $0 < \rho < 1$.

Закончим теперь доказательство свойства с) биголоморфизма

A. Прежде всего отметим, что если $z \in \Omega \setminus T_{\varepsilon_0}$, т.е. если $|z_1 - 1| > \varepsilon_0$ но $|z| \leq c$, то с некоторой постоянной c''' при $\rho > 1 - \varepsilon_0/2$ имеем

$$\left| \frac{z_1 - \rho}{1 - \rho z_1} + 1 \right| \leq c''' (1 - \rho),$$

тогда

$$\left| \frac{z - \rho}{1 - \rho z_1} \right|^2 + \sum_2^n \left| \frac{(1 - \rho^2)^{1/2\alpha_k} z_k}{(1 - \rho_1)^{1/\alpha_k}} - 1 \right|^{2\alpha_k} \leq c''' (1 - \rho) \leq c''' (1 - \rho)^{\beta}. \quad (I8)$$

Поскольку для $\nu(z) = |z_1|^2 + \sum_2^n |z_k|^{2\alpha_k}$ справедливо

$$|\text{grad } \nu(z)|_{\nu(z)=1} \geq c_0, \quad (I9)$$

то (I8) влечет

$$\text{dist}(A(z), \partial\Omega_0) \leq c_3 (1 - \rho)^{\beta}, \quad z \in \Omega \setminus T_{\varepsilon_0}. \quad (20)$$

Если мы воспользуемся соотношением (19) и тем, что $\Omega_+ \subset \Omega \cap T_{\varepsilon_0} \subset \Omega_-$, т.е. $\partial\Omega \cap T_{\varepsilon_0} \subset \Omega_- \setminus \Omega_+$, то понятно, что достаточно установить соотношение

$$\left| |v_1|^2 + \sum_2^n |v_k|^{2\alpha_k} - 1 \right| \leq c(1-\rho)^l, \quad v = (v_1, \dots, v_n), \quad v = A(z), \quad z \in \partial\Omega_+, \quad z \in \partial\Omega_-.$$

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n) \in \partial\Omega_+$ или $z \in \partial\Omega_-$; через z_k^0 обозначим соответственно z_{k+} или z_{k-} . С учетом (6 $_{\pm}$)-(17) имеем

$$\begin{aligned} & \left| |v_1|^2 + \sum_2^n |v_k|^{2\alpha_k} - 1 \right| = \left| \left| \frac{z_1 - \rho}{1 - \rho z_1} \right|^2 + \frac{1 - \rho^2}{|1 - \rho z_1|^2} \sum_2^n |z_k|^{2\alpha_k} - 1 \right| = \\ & = \left| -\frac{(1-\rho^2)(1-|z_1|^2)}{|1-\rho z_1|^2} + \frac{1-\rho^2}{|1-\rho z_1|^2} \sum_1^n |z_k|^{2\alpha_k} \right| = \\ & = \frac{1-\rho^2}{|1-\rho z_1|^2} \left| |z_1|^2 + \sum_2^n |z_k|^{2\alpha_k} - 1 \right| = \\ & = \frac{1-\rho^2}{|1-\rho z_1|^2} \left| |z_1|^2 + \sum_2^n |z_k|^{2\alpha_k} - |z_1^0|^2 - \sum_2^n |z_k^0|^{2\alpha_k} \right| \leq \\ & \leq \frac{1-\rho^2}{|1-\rho z_1|^2} \left(\left| |z_1|^2 - |z_1^0|^2 \right| + \sum_2^n \left| |z_k|^{2\alpha_k} - |z_k^0|^{2\alpha_k} \right| \right) \leq \\ & \leq c_3 \frac{(1-\rho^2)(1-|x_1^0|)^{l+1}}{|1-\rho z_1^0|^2} \leq c_4 \frac{(1-\rho)(1-x_1^0)^{l+1}}{(1-\rho)^2 + (1-x_1^0)^2} \leq c_4'' (1-\rho)^l. \end{aligned} \quad (21)$$

Итак, (20) и (21) с учетом вышесказанного доказывают свойство с) биголоморфизма A .

Отметим важное для дальнейшего следствие свойств а) - с):

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях теоремы $\tilde{d}_0 = (1-\rho)^l$. Существуют постоянные $c_5 = c_5(c_1, \varepsilon_0, \alpha_1, \dots, \beta_n)$ и $\rho_3 = \rho_3(c_1, \dots, \beta_n) < 1$ такие, что при $1 > \rho > \rho_3$ и $d = 1 + c_5 \tilde{d}_0$ будут справедливы включения

$$\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{d} \Omega_0 \subset \tilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} A(\Omega) \subset d \Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_2.$$

4. Окончание доказательства теоремы.

Свойство (d) ядер Бергмана дает

$$B_{\Omega_2}(w, \omega) = \frac{1}{d^{2n}} B_{\Omega_0}\left(\frac{w}{d}, \frac{\omega}{d}\right)$$

$$B_{\Omega_1}(\omega, \omega) = d^{2m} B_{\Omega_0}(d\omega, d\omega)$$

и далее по свойству в) ядер Бергмана и свойству в) биголоморфизма A для $\tau \in A(V_f(z^*))$ имеем

$$0 < B_{\Omega_1}(\tau, \tau) - B_{\Omega_2}(\tau, \tau) \leq c_6 \delta_0, \quad (22)$$

$$B_{\Omega_1}(\tau, \tau) \geq B_{\tilde{\Omega}}(\tau, \tau) \geq B_{\Omega_2}(\tau, \tau), \quad (22')$$

и, значит, (22), (22') влекут

$$0 \leq B_{\Omega_2}(\tau, \tau) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, \tau) \leq B_{\Omega_2}(\tau, \tau) - B_{\Omega_1}(\tau, \tau) \leq c_6 \delta_0, \quad \tau \in A V_f(z^*). \quad (23)$$

Теперь пусть $(\tau, \sigma) \in A(V_f(z^*))$. Тогда, поскольку $\tilde{\Omega} = A(\Omega) \subset \Omega_2$, имеем

$$\begin{aligned} I(\tau, \sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}} (B_{\Omega_2}(t, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(t, \sigma))(B_{\Omega_2}(\tau, t) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, t)) d\sigma_t = \\ &= - \int_{\tilde{\Omega}} (B_{\Omega_2}(t, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(t, \sigma)) B_{\tilde{\Omega}}(\tau, t) d\sigma_t + \\ &+ \int_{\tilde{\Omega}} B_{\Omega_2}(t, \sigma) B_{\Omega_2}(\tau, t) d\sigma_t - \int_{\tilde{\Omega}} B_{\tilde{\Omega}}(t, \sigma) B_{\Omega_2}(\tau, t) d\sigma_t = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь

$$I_1 = B_{\Omega_2}(\tau, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, \sigma)$$

в силу аналитичности $B_{\dots}(u, v)$ по u

Далее,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\tilde{\Omega}} B_{\tilde{\Omega}}(t, \sigma) B_{\Omega_2}(\tau, t) d\sigma_t = \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \overline{B_{\tilde{\Omega}}(t, \sigma) B_{\Omega_2}(t, t)} d\sigma_t = \int_{\tilde{\Omega}} B_{\Omega_2}(t, \tau) \overline{B_{\tilde{\Omega}}(\sigma, t)} d\sigma_t = \\ &= \overline{B_{\Omega_2}(\sigma, \tau)} = B_{\Omega_2}(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (25)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\tilde{\Omega}} B_{\Omega_2}(t, \sigma) B_{\Omega_2}(\tau, t) d\sigma_t = \int_{\Omega_2} B_{\Omega_2}(t, \sigma) B_{\Omega_2}(\tau, t) d\sigma_t - \\ &\int_{\Omega_2 \setminus \tilde{\Omega}} B_{\Omega_2}(t, \sigma) B_{\Omega_2}(\tau, t) d\sigma_t = B_{\Omega_2}(\tau, \sigma) - \epsilon \eta \sigma(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\text{error}(\tau, \sigma) = \int_{\Omega_{\alpha} \setminus \tilde{\Omega}} B_{\Omega_{\alpha}}(t, \sigma) B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, t) d\sigma_t. \quad (27)$$

В итоге (24)-(27) дают

$$\begin{aligned} I(\tau, \sigma) &= - (B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, \sigma)) + B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, \sigma) - \\ &- \text{error}(\tau, \sigma) - B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, \sigma) = - (B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, \sigma)) - \text{error}(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (28)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\begin{aligned} |I(\tau, \sigma)| &\leq \left(\int_{\tilde{\Omega}} |B_{\Omega_{\alpha}}(t, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(t, \sigma)|^2 d\sigma_t \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_{\tilde{\Omega}} |B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, t) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, t)|^2 d\sigma_t \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{\tilde{\Omega}} (B_{\Omega_{\alpha}}(t, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(t, \sigma)) (B_{\Omega_{\alpha}}(\sigma, t) - B_{\tilde{\Omega}}(\sigma, t)) d\sigma_t \right)^{1/2} \left(\int_{\tilde{\Omega}} (B_{\Omega_{\alpha}}(t, \tau) - B_{\tilde{\Omega}}(t, \tau)) \cdot \right. \\ &\cdot (B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, t) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, t)) d\sigma_t \Big)^{1/2} = (I(\sigma, \sigma))^{1/2} (I(\tau, \tau))^{1/2} = \\ &= (B_{\tilde{\Omega}}(\sigma, \sigma) - B_{\Omega_{\alpha}}(\sigma, \sigma) - \text{error}(\sigma, \sigma))^{1/2} (B_{\tilde{\Omega}}(\tau, \tau) - B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, \tau) - \text{error}(\tau, \tau))^{1/2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Как следует из свойств в) и с) биголоморфизма A и из асимптотики ядер Бергмана для эллипсоидов [3], при $\xi \in A(V_{\sigma}(z^*))$ и $t \in \Omega_{\alpha} \setminus \tilde{\Omega}$ выполнено

$$|K_{\Omega_{\alpha}}(\xi, t)| \leq c_7,$$

т.е. при $\sigma, \tau \in A(V_{\sigma}(z^*))$, опять применяя с) для A , найдем, что

$$|\text{error}(\tau, \sigma)| \leq c_8 \int_{\Omega_{\alpha} \setminus \tilde{\Omega}} d\sigma_t \leq c_9 \delta_0. \quad (30)$$

Теперь, комбинируя (23), (28)-(30), получим

$$|B_{\Omega_{\alpha}}(\tau, \sigma) - B_{\tilde{\Omega}}(\tau, \sigma)| \leq |I(\tau, \sigma)| + c_9 \delta_0 \leq c_{10} \delta_0. \quad (31)$$

Наконец, применяя к (31) свойство (d) ядер Бергмана, получим требуемое утверждение теоремы.

Литература

1. Fefferman C. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. Invent. Math., 1974, v.26, p.1-65.

2. Boutet de Monvel L., Sjöstrand J. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő, Soc. Math. de France Astérisque, 1976, v.34-35, p.123-164.
3. Bonami A., Lohoné N. Projectures de Bergman et Szegő pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimation L^p . Comp.Math., 1982, v.46, N 2, p.159-226.

A.N.Shirokov. The Bergman kernel near the diagonal for domains close to ellipsoids.

Summary

Asymptotics of the Bergman kernel near the diagonal of a pseudoconvex domain with mild boundary restrictions is investigated. For strictly pseudoconvex domains with C^4 -boundary the principal term has the Ch. Fefferman form, and the error estimate coincides with that of L. Boutet de Monvel.