V. I. Bernik, A. G. Gusakova, A. S. Kudin, Upper and lower estimates of the number of algebraic points in short intervals,
Chebyshevskii Sb., 2017, Volume 18, Issue 4, 116–127

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-115-126

ОЦЕНКИ СВЕРХУ И СНИЗУ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧЕК В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

В. И. Берник (г. Минск), А. Г. Гусакова (г. Минск), А. С. Кудин (г. Минск)

Аннотация

Алгебраические числа распределены весьма причудливо. Видимо поэтому их практически никогда не используют в качестве всюду плотных множеств. Как доказали в 1970 году А. Бейкер и В. Шмидт, алгебраические числа все же обладают неким подобием равномерного распределения последовательностей на длинных интервалах, которое они назвали регулярностью. В последние годы появилось немало работ, в которых решались проблемы о длине интервалов, на которых проявляется регулярность распределения действительных алгебраических чисел. Было выяснено, что для любого целого $Q > 1$ существуют интервалы длины $0,5Q^{-1}$, внутри которых нет алгебраических чисел α любой степени n и высоты $H(\alpha) \leqslant Q$. В то же время можно найти величину $c_0 = c_0(n)$, что уже при $c > c_0$ лежащие на любом интервале I длины большей cQ^{-1} алгебраические числа обладают свойством регулярности. Такими "удобными" для алгебраических чисел оказались интервалы, свободные от рациональных чисел с малыми знаменателями и алгебраических чисел небольшой степени и малой высоты. Для нахождения алгебраических чисел с помощью теоремы Минковского о линейных формах строятся целочисленные многочлены с малыми значениями на интервале и с большой высотой. Оказывается, что для "большинства" точек x интервала эти многочлены имеют близкие и удобные характеристики (степень, высоту, величину значения модуля многочлена в точке x). Этих характеристик достаточно для построения на интервале алгебраических чисел. В данной статье мы доказываем существование алгебраических чисел большой степени на “очень коротких“ интервалах.

Ключевые слова: алгебраическое число, диофантовы приближения, регулярные системы точек, теорема Минковского о линейных формах.

Библиография: 24 названий.

UPPER AND LOWER ESTIMATES OF THE NUMBER OF ALGEBRAIC POINTS IN SHORT INTERVALS

V. I. Bernik (Minsk), A. G. Gusakova (Minsk), A. S. Kudin (Minsk)

Abstract

The distribution of algebraic numbers is quite complicated. Probably this is why they are rarely used as dense sets. Nevertheless, A. Baker and W. Schmidt proved in 1970 that the distribution of algebraic numbers still have some kind of uniformity on long intervals, which they called regularity. Recently many works have appeared addressing the problems concerning the lengths of the intervals on which real algebraic numbers have regularity property. It was discovered that for any integer $Q > 1$ there are intervals of length $0.5Q^{-1}$, which don't contain algebraic numbers of any degree n and of height $H(\alpha) \leqslant Q$. At the same time it's possible to find such $c_0 = c_0(n)$ that for any $c > c_0$ algebraic numbers on any interval of length exceeding cQ^{-1} have regularity property. Such "friendly" to algebraic numbers intervals are intervals free of rational numbers with small denominators and algebraic numbers of small degree and height. In order to find algebraic numbers we build integral polynomials with small values on an interval and large height using Minkowski's linear forms theorem. It turns out that for "most" points x of an interval these polynomials have similar and nice characteristics (degree, height, module of polynomial value at point x). These characteristics are sufficient for building algebraic numbers on an interval. In this paper we prove existence of algebraic numbers of high degree on "very short" intervals.

Keywords: algebraic number, Diophantine approximation, regular systems of points, Minkowski's linears form theorem.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

Существуют различные количественные формы для всюду плотных последовательностей на действительной прямой. Одна из них носит название равномерного распределения и берет свое начало с работы Г. Вейля [1, 13], в которой он ввел понятие равномерного распределения и доказал критерий Вейля о равномерном распределении. В частности, из его критерия легко следует, что дробные части последовательности $\{\alpha n\}$, $n = 1, 2, ...$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1)$ тогда и только тогда, когда α — иррациональное число. Вторым важным понятием распределения последовательностей является понятие регулярности распределения, предложенное А. Бейкером и В. Шмидтом [2]. Это понятие показывает, как много первых членов последовательности надо взять, чтобы они содержались в малых подинтервалах заданного интервала и были не слишком близки друг к другу. Бейкер и Шмидт доказали регулярность множества действительных алгебраических чисел и нашли точную оценки снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, с заданным порядком приближаемых алгебраическими [2, 19]. В последующих работах понятие регулярности оказалось полезным при доказательстве аналога метрической теоремы А. Я. Хинчина [3] для многочленов [4, 5, 14], невырожденных кривых и поверхностей [6, 7, 8], а также обобщения теоремы Хинчина в полях комплексных и p-адических чисел [9, 10, 11, 12].

В настоящей работе мы покажем, что свойство регулярности обобщается и на интервалы малой длины. При этом мы имеем ввиду, что рассматривается K членов последовательности $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K$, а лежат они на интервале S длины $\mu S = K^{-l}$, $l > 0$. Эта работа является естественным продолжением работ [16, 17, 18, 20].

Для многочлена

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n \neq 0,$$

обозначим через $\deg P = n$ степень $P(x)$, а через $H = H(P) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ высоту многочлена $P(x)$. При достаточно большом Q введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\}.$$

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ корни многочлена $P(x)$. Пусть $c_1, c_2, ...$ — величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q; $\#A$ — количество элементов конечного множества A; μB — мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$. Множество всех корней многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ обозначим $T_n(Q)$. Ясно, что $\#\mathcal{P}_n(Q) \leqslant (2Q+1)^{n+1}$, и тогда $\#T_n(Q) \leqslant n(2Q+1)^{n+1}$. Известно [2], а для многочленов нечетной степени это очевидно, что $\#T_n(Q) \bigcap \mathbb{R} > c_1 Q^{n+1}$. В [17] доказано, что действительные алгебраические числа, упорядоченные по росту высоты минимальных многочленов, равномерно распределены только при $n = 1$, т.е. когда являются рациональными числами.

В данной работе будем изучать законы распределения множества $T_n(Q) \bigcap [0, 1)$ на коротких интервалах $I \subset [0, 1)$, $\mu I = Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$. Выбор интервала $[0, 1)$ не существенен, можно взять любой другой конечный интервал $[a, b)$. Выбор интервала $[0, 1)$ упрощает вычисления. Некоторые теоремы могут быть обобщены с полиномов на невырожденные функции [5, 6, 7, 8].

В коротких интервалах алгебраические числа ведут себя по-разному. В недавней работе [16] доказано, что

а) существуют интервалы I_1 длины $\mu I_1 = 0,5Q^{-1}$ такие, что $T_n(Q) \bigcap I_1 = \emptyset$ при любом n;

б) при достаточно большой величине c_2 для любого интервала I_2, $\mu I_2 > c_2 Q^{-1}$, при подходящей величине $c_3 > 0$ верно неравенство

$$\# T_n(Q) \bigcap I_2 > c_3 Q^{n+1} \mu I_2.$$

Утверждение а) может быть доказано с помощью несложных рассуждений с многочленами и их корнями. Напротив, утверждение б) использует многие недавние теоремы метрической теории диофантовых приближений [16, 20].

Ясно, что интервалов типа I_1, не содержащих алгебраических чисел, немного, ведь известно [2], что

$$\# T_n(Q) \bigcap [0, 1) > c_5 Q^{n+1}.$$

В работе впервые дается ответ на вопрос, какие условия надо наложить на интервалы I длины $\mu I = Q^{-\gamma_1}$, чтобы при $\gamma_1 > 1$ интервалы I содержали алгебраические числа из $T_n(Q)$. В [18] такое условие приведено при $\gamma_1 = \frac{3}{2}$.

Из теоремы Минковского о линейных формах [23] следует, что при любом $x \in [0, 1)$ и $Q > 1$ найдется целочисленный многочлен $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ такой, что

$$|P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}.$$

В этом неравенстве показатель степени $-n$ наилучший, т.к. при $x_1 = 2^{-\frac{1}{n+1}}$ верно неравенство $|P(x_1)| > c_5 Q^{-n}$. Из теоремы В.Г. Спринджука [21, 22] следует, что неравенство $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$ может выполняться только для $x \in B_1 \subset [0, 1)$, $\mu B_1 < \varepsilon_1$ при любом $\varepsilon_1 > 0$. Это означает, что если множество B_2 состоит из точек $x \in [0, 1)$, для которых $|P_k(x)| < c_5 Q^{-k-1}$ и Q велико, то $\mu B_2 < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$. Более того, известна оценка $\mu B_2 < c_6 Q^{-\frac{1}{n}}$.

Докажем несколько теорем об оценках сверху для $\# T_n(Q) \bigcap I$.

Теорема 1. *При $\mu I_2 = Q^{-\gamma_2}$, $0 \leqslant \gamma_2 < 1$ справедливо неравенство*

$$\# T_n(Q) \bigcap I_2 > n^2 2^{n+5} Q^{n+1} \mu I_2.$$

Доказательство. Обозначим $c_7 = n^2 2^{n+5}$ и предположим противное. Это означает, что

$$\# T_n(Q) \bigcap I_2 > c_7 Q^{n+1-\gamma_2}.$$

Возьмем вектор $\bar{b}_1 = (a_n, ..., a_1)$, координаты которого коэффициенты $P(x)$. Так как $\# \left\{ \bar{b}_1 \right\} = (2Q+1)^n < 2^{n+1} Q^n$ при $Q > Q_0$, то в классе полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, которые имеют корни $\alpha_1 \in T_n(Q) \bigcap I_2$, не менее $l_1 = c_7 2^{-n-1} Q^{1-\gamma_2}$ полиномов имеют один и тот же вектор $\bar{b}_1$ и, следовательно, их разность — целое число, не равное нулю. Если α_{1i} — корень $P_i(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, принадлежащий интервалу I_2, то из разложения $P_i(x)$ в ряд Тейлора на I_2 имеем

$$P_i(x) = P_i(\alpha_{1i}) + P_i'(\alpha_{1i})(x - \alpha_{1i}) + \frac{1}{2} P_i''(\alpha_{1i})(x - \alpha_{1i})^2 + ..., \quad 1 \leqslant i \leqslant l_1, \tag{1}$$

$$P_i(\alpha_{1i}) = 0, \quad \left| P_i'(\alpha_{1i})(x - \alpha_{1i}) \right| < n^2 Q^{1-\gamma_2},$$

при $Q > Q_0$. Остальные члены разложения в (1) оцениваются по модулю величиной $nQ^{1-\gamma_2}$, поэтому

$$|P_i(x)| < 2n^2Q^{1-\gamma_2}.$$

Образуем полиномы

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), 1 \leqslant j \leqslant l_1 - 1.$$

Полиномы $R_j(x)$ — различные целые, отличные от нуля числа, для которых справедливо

$$|R_j(x)| < 2n^2Q^{1-\gamma_2}.$$

При достаточно большом l_1 среди них найдется число, по модулю большее $2n^2Q^{1-\gamma_2}$, что противоречит предыдущему неравенству. $\square$

В работах Спринджука [21, 22] показано, что метрические теоремы о целочисленных многочленах остаются верными при переходах от многочленов $P(x)$ к многочленам $P_1(x) = P(x-m)$, $m \in \mathbb{Z}$ и к многочленам $P_2(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. Эти два преобразования позволяют перейти от произвольных многочленов к многочленам с условием

$$|a_n| > c_8 H(P). \tag{2}$$

При условии (2) нетрудно доказать [22, 14], что для всех корней α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ полинома $P(x)$ верно неравенство $|\alpha_j| < c_9$. Поэтому в дальнейшем считаем, что для полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ выполнено условие (2) и все корни полиномов ограничены величиной, зависящей от n и не зависящей от H и Q.

Введем понятие типа интервала. Интервал I длины $|I| = Q^{-\gamma_1}$ называется интервалом типа (k, v), если на нем находится действительное алгебраическое число β_1 степени $\deg \beta_1 = k < n$ и высоты $H(\beta_1) \leqslant Q^v$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Теорема 2. *При $\gamma_1 > k + nv$ интервалы I типа (k, v) не содержат действительных алгебраических точек α_1, $\deg \alpha_1 = n$, $H(\alpha_1) \leqslant Q$.*

Доказательство. Обозначим через $T_1(x) = b_k x^k + ... + b_1 x + b_0$ минимальный многочлен алгебраического числа β_1, а через $T_2(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ минимальный многочлен алгебраического числа α_1. Многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$ не имеют общих корней, их старшие коэффициенты удовлетворяют (2) и, следовательно, корни $\beta_1, ..., \beta_k$ полинома $T_1(x)$ и корни $\alpha_1, ..., \alpha_n$ полинома $T_2(x)$ ограничены по модулю некоторой величиной c_9. Поэтому результант $R(T_1, T_2) \neq 0$. Корень $\beta_1 \in I$ определяет тип интервала I. Предположим, что $\alpha_1 \in I$. Тогда

$$1 \leqslant |R(T_1, T_2)| = a_n^k b_k^n \prod_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant k} (\alpha_i - \beta_j) \ll_n Q^{k+nv} |\alpha_1 - \beta_1| \ll_n Q^{k+nv-\gamma_1}. \tag{3}$$

По условию теоремы показатель степени в (3) отрицательный, и неравенство (3) при достаточно большом Q противоречиво. $\square$

Если $\gamma_1 < k + nv$, то интервал I_1 может содержать алгебраические числа, однако, "не слишком много".

Теорема 3. *При $\gamma_3 > 1+v$ интервал I_3 длины $|I_3| = Q^{-\gamma_3}$ содержит не более $2^{n+7}Q^{n+1-\gamma_3}$ алгебраических чисел β_1, $\deg \beta_1 = n$, $H(\beta_1) \leqslant Q$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е.

$$\#\left\{\beta_1 \in I_3 : P(\beta_1) = 0, P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)\right\} > 2^{n+7}Q^{n+1-\gamma_3}.$$

Зафиксируем вектор $\bar{b}_2 = (a_n, ..., a_2)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Ясно, что

$$\#\left\{\bar{b}_2\right\} = (2Q+1)^{n-1} < 2^n Q^{n-1}, Q > Q_0(n).$$

Поэтому не менее $l_2 = 2^8 Q^{2-\gamma_3}$ многочленов имеют один и тот же вектор $\bar{b}_2$. Разложим каждый из таких многочленов $P_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant l_2$ в ряд Тейлора на отрезке I_3 в окрестности корня $\beta_1 = \beta_{1j}$ и оценим $P(x)$ сверху.

$$P_j(x) = P(\beta_1) + P^{'}(\beta_1)(x-\beta_1) + \frac{1}{2}P^{''}(\beta_1)(x-\beta_1)^2 + ... + \frac{1}{n!}P^{(n)}(\beta_1)(x-\beta_1)^n,$$
$$|P_j(x)| \leqslant n^2 Q^{1-\gamma_3} + n\frac{1}{n}Q^{1-\gamma_3} < 2n^2 Q^{1-\gamma_3}, Q > Q_0.$$

Образуем многочлены

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), 1 \leqslant j \leqslant l_2 - 1 \leqslant \frac{l_2}{2} = 2^6 Q^{1-\gamma_3}. \tag{4}$$

Количество различных многочленов в (4) не менее $2^7 Q^{2-\gamma_3}$. При этом, $\deg R_j \leqslant 1$, $H(R_j) \leqslant 2Q$ и

$$|a_j x + b_j| = |R_j(x)| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3}, 1 \leqslant j \leqslant l_2 - 1 \leqslant \frac{l_2}{2} = 2^6 Q^{1-\gamma_3}. \tag{5}$$

Из (5) следует

$$\left|x + \frac{b_j}{a_j}\right| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3}|a_j|^{-1} \leqslant 4n^2 Q^{1-\gamma_3}. \tag{6}$$

Если среди 2^7 многочленов $R_j(x) = a_j x + b_j$ найдется хотя бы один, корень которого, равный $-\frac{b_i}{a_i}$, не совпадает с $\beta_1 = -\frac{b_0}{a_0}$, то рассмотрим результант данного многочлена $a_i x + b_i$ и многочлена $R_0 = a_0 x + b_0$, определяющего тип интервала I_3.

$$1 \leqslant |R(R_0, R_j)| = \left|a_0 a_i \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_0}{a_0}\right)\right| \leqslant 8n^2 Q^{1+v-\gamma_3}. \tag{7}$$

Неравенство (7) при $\gamma_3 > 1+v$ и $Q > Q_0$ противоречиво. Если все линейные многочлены $R_j(x)$ различны и при этом имеют один и тот же корень $-\frac{b_0}{a_0}$, то они имеют вид

$$k(a_0 x + b_0), \ \ k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Так как $|a_0| > 0,5Q^v$, и k можно взять больше $k_0 = \frac{l_2}{8}$, то одновременно должны выполняться неравенства

$$|a_0 k_0| > 8Q^{v+2-\gamma_3},$$
$$|a_0 k_0| < 4Q,$$

что невозможно при $\gamma_3 > 1 + v$. Теорема доказана. $\square$

В следующей теореме на точки интервала I накладывается условие

$$\max_{x \in I}|P(x)| > c_{10} H(P)^{-\deg P - 1}, \deg P < n. \tag{9}$$

Это означает, что точки $x \in I$ не должны слишком хорошо приближаться алгебраическими числами α степени меньше n.

Теорема 4. *Пусть задан интервал I длины $\mu I = Q^{-\gamma_2}$, $\gamma_2 > 1$ точки которого удовлетворяют неравенству* (9). *Тогда при подходящем c_{11} верно неравенство*

$$\# T_n(Q) \bigcap I > c_{11} Q^{n+1-\gamma_2} \mu I.$$

Основой доказательства теоремы является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть интервал I удовлетворяет условиям теоремы 4. Обозначим через B_3 множество точек $x \in I$, для которых система неравенств*

$$\left\{ \begin{array}{l} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0 Q^{-\gamma_2+1}, \end{array} \right. \tag{10}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 верно

$$\mu B_3 < \frac{1}{4} \mu I. \tag{11}$$

Для доказательства теоремы 5 необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть α_1 — ближайший к x корень полинома $P(x)$. Тогда при $P^{'}(x) \neq 0$ и $P^{'}(\alpha_1) \neq 0$ из* (10) *следует*

$$\begin{array}{c} |x - \alpha_1| \leqslant n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \\ |x - \alpha_1| \leqslant 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}. \end{array} \tag{12}$$

Лемма 1 хорошо известна [14, 21, 22].

Лемма 2. *Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — два целочисленных полинома без общих корней с условиями*

$$\deg P_1 \leqslant n, \ \ \deg P_2 \leqslant n, \ \ H(P_1) \leqslant Q, \ \ H(P_2) \leqslant Q,$$

которые на интервале J, $\mu J = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, удовлетворяют неравенствам

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau},$$

при некотором $\tau > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ при $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Лемма 2 доказана в [4].

2. Доказательство теоремы 5

По лемме 1 система неравенств (10) выполняется на интервале

$$\sigma(P) = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_1| < 2^{n-1} Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}. \tag{13}$$

Наряду с интервалом $\sigma(P)$ рассмотрим интервал

$$\sigma_l(P) = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_1| < c_{12} Q^{-l} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}, \ \ l \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Потребуем, чтобы интервал $\sigma_l(P)$ содержался в I. Для этого при некотором $\varepsilon_1 > 0$ должно выполняться неравенство

$$l \geq \gamma_2 + \lambda_0 + \varepsilon_1, \tag{15}$$

где λ_0 определяется из неравенства

$$Q^{-\lambda_0-\varepsilon_1} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-\lambda_0}.$$

Зафиксируем вектор $\bar{b}_l = (a_n, ..., a_l)$, состоящий из $n-l+1$ старших коэффициентов полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Справедлива оценка

$$\#\left\{\bar{b}_l\right\} < 2^n Q^{n-l}. \tag{16}$$

Множество полиномов с одним и тем же вектором $\bar{b}_l$ обозначим $T\left(\bar{b}_l\right)$. Для натурального числа $m \geqslant 3$ интервал $\sigma_l(P_1)$, содержащий точки не менее m интервалов $\sigma_l(P_j)$, $2 \leqslant j \leqslant m+1$, $P_j \in T\left(\bar{b}_l\right)$ будем называть m-несущественным. Если же интервал $\sigma_l(P_1)$ кроме себя содержит точки других интервалов $\sigma_l(P_j)$, но в количестве меньшем m, то его будем называть m-существенным.

Существенные интервалы. Множество m-существенных интервалов обозначим $M_m(\bar{b}_l)$. Из определения имеем

$$\sum_{\sigma_l(P)\in M_m\left(\bar{b}_l\right)} \mu\sigma_l(P) \leqslant m\mu J. \tag{17}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\mu\sigma(P) \leqslant 2^{n-1}c_{12}^{-1}Q^{-n+l}\mu\sigma_l(P),$$

откуда с учетом (16) и (17) получаем

$$\sum_{\bar{b}_l}\sum_{\sigma_l(P)\in M_m\left(\bar{b}_l\right)} \mu\sigma(P) \leqslant m2^{2n}c_{12}^{-1} < \frac{1}{2S}\mu I,$$

при подходящем выборе c_{12}.

Несущественные интервалы. Разложим многочлен $P(x)$ при $x \in \sigma_l(P)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и оценим $|P(x)|$ сверху:

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\xi)(x-\alpha_1)^2,\ \ \xi \in (\alpha_1, x).$$

Величина $|x-\alpha_1|$ оценена в (14), откуда

$$\left|P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)\right| < c_{12}Q^{-l},$$
$$\left|P''(\xi)(x-\alpha_1)^2\right| < c_{13}Q^{1-2l+2\lambda_0+2\varepsilon_1}.$$

Если

$$l > 2k + 1 + 2\varepsilon_1,$$

то при достаточно больших Q получаем

$$|P(x)| < 2c_{13}Q^{-l}. \tag{18}$$

На интервале $\sigma_l(P)$ имеется не менее $m-1$ многочленов $P_j(x) \in M_n\left(\bar{b}_l\right)$, $2 \leqslant j \leqslant m$, для которых и многочлена $P_1(x)$ справедливы неравенства (18). Первые коэффициенты многочленов $P_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant m$ совпадают и поэтому для многочленов $R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x)$ верны неравенства

$$|R_j(x)| < 4c_{13}Q^{-l},\ \ 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$
$$\deg R_j(x) \leqslant l,\ \ 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Если среди многочленов $R_j(x)$ найдутся по крайней мере два неприводимых, то они не имеют общих корней, и к ним можно применить лемму 2. В данном случае

$$\tau = l,\ \ \eta = l - k - \varepsilon_1,\ \ \tau + 1 + 2(\tau + 1 - \eta) = l + 3 + 2k + 2\varepsilon_1, \tag{19}$$

что больше, чем $2l + \delta$ при $l < 2\lambda_0 + 3 + 2\varepsilon_1 - \delta$. Пришли к противоречию.

Возьмем $k = \gamma_2 - 1$. Натуральное число l должно по (15) и (19) удовлетворять неравенству

$$2\gamma_2 - 1 + 2\varepsilon_1 \leqslant l < 2\gamma_2 + 1 + 2\varepsilon_1 - \delta.$$

Получаем, что l находится в интервалах длины $2 - \delta > 1.9$ при $\delta < 0,1$. Поэтому, такое целое l всегда найдется.

Покажем сейчас, как провести доказательство, если величины $|P'(\alpha_1)|$ и $|P'(x)|$ имеют разные порядки. Это будет в случае

$$|P'(x)| < 2n^3Q^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{20}$$

Из неравенства (20) получим неравенство

$$|P'(\alpha_1)| < 2^{n+6}Q^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{21}$$

Пусть неравенство (21) неверно, т.е.

$$|P'(\alpha_1)| \geqslant 2^{n+6}Q^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Тогда по лемме (1) из $|P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}$ имеем

$$|x - \alpha_1| < (n+1)Q^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Так как из представления

$$P'(\alpha_1) = P'(x) + P''(\xi_1)(x - \alpha_1),\ \ \xi_1 \in (x, \alpha_1), |x - \alpha_1| < (n+1)Q^{-\frac{n+1}{2}},$$

нетрудно получить

$$\left|P'(x) - P'(\xi_1)(x - \alpha_1)\right| < 2n^3 + 2n^3 = 4n^3,$$

получаем противоречие. При выполнении неравенства (21) доказательство теоремы может быть завершено как в работах [14, 19, 22].

Если среди $m-1$ многочленов $R_j(x)$ нельзя выбрать два неприводимых, то

$$R_j(x) = t_1(x)t_2(x).$$

Полиномы $t_1(x)$ и $t_2(x)$ можно выбрать без общих корней. Их степени и высоты связаны простыми известными соотношениями [14, 22]

$$\begin{gathered}\deg t_1 + \deg t_2 \leqslant l,\\ c_{14}H(R_j) < H(t_1)H(t_2) < c_{15}H(R_j).\end{gathered} \tag{22}$$

Обозначим $\deg t_1 = n_1$, $H(t_1) = Q^{\lambda_1}$. Тогда из (22) получим $\deg t_2 \leqslant l - n_1$, $H(t_2) < c_{16} Q^{1-\lambda_1}$. Найдем такое рациональное число a, что неравенство

$$|t_1(x)| < c_{17} Q^{-a} = c_{15} H(t_1)^{-\frac{a}{\lambda_1}}, \tag{23}$$

выполняется только для x из множества B, $\mu B > 0,5 \mu \sigma_l(P)$, но уже неравенство

$$|t_1(x)| < c_{17} Q^{-a-\varepsilon_1}, \tag{24}$$

выполняется только для x из множества B, $\mu B \leqslant 0,5 \mu \sigma_l(P)$. От неравенства (23) можно перейти к неравенству

$$|t_1(x)| < c_{18} Q^{-a}, \tag{25}$$

для всех $x \in \sigma_l(P)$ [14, 19]. Если $\frac{a}{\lambda_1} \geqslant n_1 + 1$, то это противоречит выбору интервала B. Если же $\frac{a}{\lambda_1} < n_1 + 1$, $a < \lambda_1(n_1+1)$, то $\frac{l-a}{1-\lambda_1} \geqslant l > l - n_1 + 1$ и уже многочлен $t_2(x)$ принимает для всех $x \in \sigma_l(P)$ значения меньше $c_{19} H(t_2)^{-(l-n_1)-1} = c_{19} H(t_2)^{-\deg t_2 - 1}$, что опять противоречит выбору интервала B.

3. Доказательство теоремы 4

Из теоремы 5 следует, что для точек $x_1 \in B_2$, $\mu B_2 \geqslant \frac{3}{4} \mu I$, выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1) Q^{-n}, \\ |P'(x)| > \delta_0 Q^{-\gamma_2 + 1}. \end{cases} \tag{26}$$

По лемме 1 находим корень α_1 полинома $P(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|x_1 - \alpha_1| < c_{20} Q^{-n-1+\gamma_2}.$$

Таким образом, все точки $x_1 \in B_2$ принадлежат подобным интервалам I_1, $\mu I_1 = 2 c_{20} Q^{-n-1+\gamma_2}$ с центрами в корнях полиномов α_1. Покрывая множество B_2 подобными интервалами I_1, получим искомую нижнюю оценку.

4. Заключение

Хотя теорема 4 гарантирует существование алгебраических чисел произвольной степени на сколь угодно коротких интервалах, получить конструктивное описание интервалов со свойством (9) в этой работе не удалось. Авторы будут признательны другим математикам, которым удастся получить продвижение в этой задаче.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Mathematische Annalen. 1916. T. 77. C. 313-352.

2. Baker A., Schmidt W. M. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. London Math. Soc. (3). 1970. T. 21. C. 1-11.

3. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Mathematische Annalen. 1924. T. 92. C. 115-125.

4. Bernik V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. T. 53, №1. C. 17-28.

5. Beresnevich V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. T. 50, №2. C. 97-112.

6. Beresnevich V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungarica. 2002. T. 94, №1-2. C. 99-130.

7. Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // Internat. Math. Res. Notices. 2001. №9. C. 453-486.

8. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A. Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. 2002. T. 2, №2. C. 203-225.

9. Bernik V. I., Vasilyev D. V. A Khinchine-type theorem for integer-valued polynomials of a complex variable // Proc. Inst. Math. 1999. T. 3. C. 10-20.

10. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E. I. Metric theorems on the approximation of p-adic numbers // J. Number Theory. 2005. T. 111, №1. C. 33-56.

11. Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D. A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields // Lith. Math. J. 2008. T. 48, №2. C. 158-173.

12. Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex, and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 2010. T. 149, №2. C. 193-216.

13. Kuipers L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. New York: Wiley. 1974.

14. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine Approximation on Manifolds (Cambridge Tracts in Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. 1999.

15. Bugeaud Y. Approximation by Algebraic Numbers (Cambridge Tracts in Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. 2004.

16. Bernik V. I., Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // Izvestiya: Mathematics. 2015. T. 79, №1. C. 18-39.

17. Kaliada D. Distribution of real algebraic numbers of a given degree // Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi. 2012. T. 56, №3. C. 28–33.

18. Bernik V. I., Götze F., Gusakova A. G. On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves // Moscow J. of Comb. and Numb. Theor. 2016. T. 6, №2-3. C. 57-100.

19. Bernik V. I., Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // Acta Arith. 1983. T. 42, №3. C. 219-253.

20. Götze F., Gusakova A. On algebraic integers in short intervals & near smooth curves // Acta Arith. 2016. T. 60, №2. C. 219-253.

21. Sprindzhuk V. G. A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of S-numbers // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1965. T. 29, №2. C. 379-436.

22. Sprindzhuk V. G. Mahler's Problem in Metric Number Theory. Minsk: Nauka i Tehnika. 1967.

23. Cassels J. W. S. An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45). Cambridge: Cambridge University Press. 1957.

24. Budarina N. V., Götze F. Distance between Conjugate Algebraic Numbers in Clusters // Mat. Zametki. 2013. T. 94, №5. C. 780-783.

REFERENCES

1. Weyl, H. 1916, "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", *Mathematische Annalen*, vol. 77, pp. 313-352.

2. Baker, A., Schmidt, W. M. 1970, "Diophantine approximation and Hausdorff dimension", *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 21, pp. 1-11.

3. Khintchine, A. 1924, "Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen", *Mathematische Annalen*, vol. 92, pp. 115-125.

4. Bernik V. I. 1989, "The exact order of approximating zero by values of integral polynomials", *Acta Arith.*, vol. 53, no. 1, pp. 17-28.

5. Beresnevich V. V. 1999, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers", *Acta Arith.*, vol. 50, no. 2, pp. 97-112.

6. Beresnevich V. V. 2002, "A Groshev type theorem for convergence on manifolds", *Acta Math. Hungarica.*, vol. 94, no. 1-2, pp. 99-130.

7. Bernik V. I., Kleinbock D. & Margulis G. A. 2001, "Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions", *Internat. Math. Res. Notices.*, no. 9, pp. 453-486.

8. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. & Margulis G. A. 2002, "Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds", *Mosc. Math. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 203-225.

9. Bernik V. I., Vasilyev D. V. 1999, "A Khinchine-type theorem for integer-valued polynomials of a complex variable", *Proc. Inst. Math.*, vol. 3, pp. 10-20.

10. Beresnevich V. V., Bernik V. I. & Kovalevskaya E. I. 2005, "Metric theorems on the approximation of p-adic numbers", *J. Number Theory.*, vol. 111, no. 1, pp. 33-56.

11. Bernik V. I., Budarina N. V. & Dickinson D. 2008, "A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields", *Lith. Math. J.*, vol. 48, no. 2, pp. 158-173.

12. Bernik V. I., Budarina N. V. & Dickinson D. 2010, "Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex, and p-adic fields", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 149, no. 2, pp. 193-216.

13. Kuipers L., Niederreiter H. 1974, "Uniform distribution of sequences", Wiley, New York, 390 pp.

14. Bernik V. I., Dodson M. M. 1999, "Metric Diophantine Approximation on Manifolds (Cambridge Tracts in Mathematics)", Cambridge University Press, Cambridge, 172 pp.

15. Bugeaud Y. 2004, "Approximation by Algebraic Numbers (Cambridge Tracts in Mathematics)", Cambridge University Press, Cambridge, 274 pp.

16. Bernik V. I., Götze F. 2015, “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1, pp. 18-39.

17. Kaliada D. 2012, “Distribution of real algebraic numbers of a given degree“, *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, vol. 56, no. 3, pp. 28–33.

18. Bernik V. I., Götze F., Gusakova A. G. 2016, “On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves“, *Moscow J. of Comb. and Numb. Theor.*, vol. 6, no. 2-3, pp. 57-100.

19. Bernik V. I. 1983, “Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations“, *Acta Arith.*, vol. 42, no. 3, pp. 219-253.

20. Götze F., Gusakova A. 2016, “H. On algebraic integers in short intervals & near smooth curves“, *Acta Arith.*, vol. 60, no. 2, pp. 219-253.

21. Sprindzhuk V. G. 1965, “A proof of Mahler’s conjecture on the measure of the set of S-numbers“, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 29, no. 2, pp. 379-436.

22. Sprindzhuk V. G. 1967, “Mahler’s Problem in Metric Number Theory“, Nauka i Tehnika, Minsk, 184 pp.

23. Cassels J. W. S. 1957, “An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45)“, Cambridge University Press, Cambridge, 168 pp.

24. Budarina N. V., Götze F. 2013, “Distance between Conjugate Algebraic Numbers in Clusters“, *Mat. Zametki.*, vol. 94, no. 5, pp. 780-783.

Институт математики НАН Беларуси.
Получено 29.09.2017
Принято в печать 14.12.2017