Математические заметки

Том 106 выпуск 4 октябрь 2019

УДК 517

Об экстраполяции полиномов с действительными коэффициентами в комплексную плоскость

А. С. Кочуров, В. М. Тихомиров

Рассматривается задача о наибольшем возможном значении, которое может принять модуль k-й производной алгебраического полинома порядка $n > k$ с действительными коэффициентами в заданной точке комплексной плоскости. Предполагается при этом, что сам полином ограничен единицей на отрезке $[-1, 1]$. Показывается, что решение достигается на полиноме $\kappa \cdot T_\sigma$, где T_σ – один из полиномов Золотарёва либо Чебышёва, κ – некоторое число.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: экстраполяция, альтернанс, полином Золотарёва, двойственная задача.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12260

Экстремальные задачи на пространствах полиномов имеют давнюю историю; результаты для них (как и для общих задач на экстремум) широко используются при исследованиях различных математических проблем. Особенно важны установленные в таких задачах точные неравенства и семейства экстремальных полиномов, из которых многие названы всем известными именами: таковы полиномы Чебышёва, Лежандра, Эрмита, Лагерра, Якоби, Гегенбауэра, Золотарёва (см. [1], [2]). Многие из них появились как решения задачи о нахождении наилучшего приближения полинома $p(t) = t^n$, $t \in [a, b]$, полиномами на единицу меньшей степени в гильбертовом пространстве $L_2(\varrho, [a, b])$ с весом ϱ. В дальнейшем оказалось, что имеется ряд примеров, когда совсем разные по постановке задачи своим решением имеют один и тот же общий полином.

Помимо задач о нахождении наилучшего приближения в гильбертовом пространстве, широкую известность получили экстремальные задачи о нахождении максимума линейного функционала $\ell(x(\,\cdot\,))$ на пространствах полиномов

$$\ell(x(\,\cdot\,)) \to \max, \qquad \|x(\,\cdot\,)\|_X \leqslant 1, \quad x(\,\cdot\,) \in T_{n+1}, \tag{1}$$

X – какое-либо функциональное пространство, например, L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а T_{n+1} – $(n+1)$-мерное пространство полиномов, $n \in \mathbb{N}$. К их числу относятся

Данная работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 17-01-00649, № 16-01-00295, № 17-01-00809).

© А. С. Кочуров, В. М. Тихомиров, 2019

Теорема 1 (теорема Чебышёва об экстраполяции значения полинома в точке). *Алгебраический полином степени n, не превосходящий по модулю единицы на отрезке $[-1,1]$ и достигающий максимума модуля в точке τ, $|\tau| \geqslant 1$, – это полином Чебышёва $T_{n\infty}$ степени n. Другими словами имеет место точное неравенство*

$$|p(\tau)| \leqslant |T_{n\infty}(\tau)| \cdot \|p(\,\cdot\,)\|_{C[-1,1]}, \qquad |\tau| \geqslant 1.$$

Теорема 2 (теоремы А. А. и В. А. Марковых об интерполяции и экстраполяции значения k-й производной в точке). *Алгебраический полином степени $n > k$, не превосходящий по модулю единицы на отрезке $[-1,1]$ и достигающий максимума значения k-й производной в точке τ при $|\tau| \geqslant 1$, пропорционален полиному Чебышёва $T_{n\infty}$, а при $|\tau| < 1$ – одному из полиномов Золотарёва порядка n (см. [1]–[3]) либо полиному $T_{n-1\,\infty}$.*

Из-за конечномерности пространства T_{n+1} решение задачи (1) всегда существует, а ее исследование в случае $X = C[-1,1]$, может быть проведено, опираясь на "теоремы об очистке" (см. [1], [3], [4]). Как следствие такого подхода получаются необходимые (и достаточные) условия экстремума в (1) для $X = C[-1,1]$ и пространства $T_{n+1} = \mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов степени не выше n (с действительными коэффициентами); они заключаются в том, что справедлива

Теорема 3 (см. [1], [3], [4]). *Пусть $X = C[-1,1]$, $T_{n+1} = \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{x}(\,\cdot\,) \in \mathcal{P}_n$ – решение задачи (1). Тогда найдутся $r \leqslant n+1$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\tau_j \in [-1,1]$, для которых $|\widehat{x}(\tau_j)| = 1$, $j = 1,\dots,r$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_r$ и*

$$\ell(x(\,\cdot\,)) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot \operatorname{sgn} \widehat{x}(\tau_j) \cdot x(\tau_j) \quad \Longleftrightarrow \quad \ell(x(\,\cdot\,)) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot \widehat{x}(\tau_j) \cdot x(\tau_j), \tag{2}$$

$x(\,\cdot\,) \in \mathcal{P}_n$ любое.

Если в (2) удается явно вычислить значения неизвестных r, α_j, τ_j, $j = 1,\dots,r$, то равенство (2) называют еще *тождеством Рисса.* Подробный анализ (1) и вывод (2) содержатся в [1], [3], [4]; помимо (1) там рассматриваются многие другие классические задачи на экстремум и способы их решения.

Выберем в качестве функционала из (1) проекцию значения $x^{(k)}(w)$ в фиксированной точке $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ на заданный вектор единичной длины из плоскости $\mathbb{C}$: пусть $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\psi \in [0, 2\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим задачу

$$\cos\psi \cdot \operatorname{Re}\biggl(\biggl(\sum_{j=0}^{n} a_j w^j\biggr)^{(k)}\biggr) + \sin\psi \cdot \operatorname{Im}\biggl(\biggl(\sum_{j=0}^{n} a_j w^j\biggr)^{(k)}\biggr) \to \max \tag{3}$$

по всем значениям $\overline{a} = (a_0,\dots,a_n)$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,\dots,n$, удовлетворяющим ограничениям

$$\biggl|\sum_{j=0}^{n} a_j t^j\biggr| \leqslant 1 \qquad \text{при всех} \quad t \in [-1,1].$$

Согласно теореме 3 для задачи (3) выполнено тождество (2).

Теорема 4 (обобщение теорем А. А. и В. А. Марковых). *Решение задачи о максимуме значения проекции $x^{(k)}(w)$ в фиксированной точке $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ на фиксированный вектор $(\cos\psi, \sin\psi)$ единичной длины из плоскости $\mathbb{C}$ с точностью до*

нормирующего множителя достигается либо на полиноме Чебышёва $T_{n\infty}$, $n > k$, либо на на одном из полиномов Золотарёва порядка n, либо на полиноме Чебышёва $T_{n-1\,\infty}$.

Доказательство. Поставленная задача является частным случаем задачи

$$\ell(x(\,\cdot\,)) \to \max, \qquad \|x(\,\cdot\,)\|_{C[-1,1]} \leqslant 1, \quad x(\,\cdot\,) \in \mathcal{P}_n, \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ – пространство алгебраических многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами, $\ell(x(\,\cdot\,))$ – линейный функционал на $\mathcal{P}_n$: надо положить

$$\ell(x(\,\cdot\,)) = \cos\psi \cdot \operatorname{Re}\biggl(\biggl(\sum_{j=0}^{n} a_j w^j\biggr)^{(k)}\biggr) + \sin\psi \cdot \operatorname{Im}\biggl(\biggl(\sum_{j=0}^{n} a_j w^j\biggr)^{(k)}\biggr).$$

К задаче (4) применим теорему 3, из которой следует, что если $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ – решение задачи (4), то найдутся $r \leqslant n+1$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_j > 0$, $\tau_j \in [-1,1]$, для которых $|\widehat{x}(\tau_j)| = 1$ при $j = 1,\dots,r$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_r$ и

$$\ell(x(\,\cdot\,)) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \operatorname{sgn}\widehat{x}(\tau_j) \cdot x(\tau_j) \quad \Longleftrightarrow \quad \ell(x(\,\cdot\,)) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot \widehat{x}(\tau_j) \cdot x(\tau_j), \tag{5}$$

где $x(\,\cdot\,) \in \mathcal{P}_n$ любое.

Разберем случай $\psi \neq \pm\pi/2$. Если в (5) предположить, что $r \leqslant k$, то получим противоречие: $k!\cos\psi = 0$ (и $\psi \neq \pm\pi/2$), подставив в (5) полином

$$z^{k-r} \prod\nolimits_{j=1}^{r} (z - \tau_j).$$

Поэтому $r > k$. Если допустить, что $r < n$, то противоречие с (5) получим, рассмотрев полиномы степени $(r+1)$ вида

$$(bz^2 + cz + d) \cdot p(z), \qquad p(z) = \prod\nolimits_{j=1}^{r-1} (z - \tau_j).$$

Для этого подберем нетривиальный набор действительных чисел (b, c, d) так, чтобы k-я производная полинома $(bz^2 + cz + d) \cdot p(z)$ обратилась бы в нуль в точке w:

$$(bw^2 + cw + d) \cdot p^{(k)}(w) + k(2bw + c) \cdot p^{(k-1)}(w) + k(k-1)b \cdot p^{(k-2)}(w) = 0.$$

Выделяя действительную и мнимую части в этом равенстве и приравнивая их к нулю, получим систему из двух однородных линейных уравнений с действительными коэффициентами для неизвестных b, c, d. Такая система всегда имеет нетривиальное решение. Построенный таким образом полином

$$x(z) = (bz^2 + cz + d) \cdot p(z)$$

обращается в нуль во всех точках τ_j, $j = 1,\dots,r-1$, и не может обратиться в нуль в точке τ_r, так как если он все-таки обращается в нуль в τ_r, то его k-я производная обращается в нуль слишком большое число раз: в точках w и $\overline{w}$ и в $(r-k)$ различных точках на отрезке $[\tau_1, \tau_r]$. Подставляя этот полином в (5), получим невозможное

$$0 = \alpha_r \cdot \operatorname{sgn}\widehat{x}(\tau_r) \cdot x(\tau_r) \neq 0.$$

Значит, $r = n+1$ или $r = n$. Если $r = n+1$, то, как известно, с точностью до знака $\widehat{x}(t) = T_{n\infty}(t)$ – полином Чебышёва. Если $r = n$ и, скажем, $\widehat{x}(\tau_{n-1}) = \widehat{x}(\tau_n)$, то рассмотрим полиномы степени n вида

$$(bz^2 + cz + d)\cdot p_1(z), \qquad p_1(z) = \prod\nolimits_{j=1}^{n-2}(z-\tau_j).$$

Как прежде, подберем нетривиальный набор действительных чисел b, c, d так, чтобы k-я производная полинома $(bz^2+cz+d)\cdot p_1(z)$ обратилась бы в нуль в точке w. Для такого набора (b,c,d) полином

$$x_1(z) = (bz^2 + cz + d)\cdot p_1(z)$$

обращается в нуль во всех точках τ_j, $j = 1,\dots,(n-2)$, и, как и выше, не может быть так, чтобы $x_1(t) = 0$ для какого-нибудь $t \in [\tau_{n-1},\tau_n]$. Подставляя этот полином в (5), получаем противоречие

$$0 = \alpha_{n-1}\cdot \operatorname{sgn}\widehat{x}(\tau_{n-1})\cdot x(\tau_{n-1}) + \alpha_n\cdot \operatorname{sgn}\widehat{x}(\tau_n)\cdot x(\tau_n) \neq 0.$$

Таким образом, экстремальный полином степени n имеет n-альтернанс. А такой полином, с точностью до нормирующего множителя – один из серии полиномов Золотарёва либо полином $T_{n-1\,\infty}$.

Утверждение теоремы для $\psi = \pm\pi/2$ получим предельным переходом утверждений для $\psi \neq \pm\pi/2$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Решение задачи о максимуме значения $|x^{(k)}(w)|$ среди полиномов $x(\,\cdot\,)$ степени n для заданного $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ пропорционально полиному Чебышёва $T_{n-1\,\infty}$ порядка $n-1 \geqslant k$, либо одному из полиномов Золотарёва порядка n.*

Составим двойственную к (3) задачу. Для этого запишем (3) в форме

$$M_1 = \inf_{\{a_j\}}\sup_{\mu(\,\cdot\,),\lambda}\left(-\sum_{j=k}^{n} a_j\frac{j!\,r^{j-k}}{(j-k)!}\cos((j-k)\varphi-\psi) + \lambda\left(\int_{-1}^{1}\sum_j a_j t^j\,d\mu(t) - 1\right)\right) \quad (6)$$

по всем $\lambda \geqslant 0$ и всем функциям $\mu(\,\cdot\,)$ ограниченной на $[-1,1]$ вариации с вариацией не превосходящей 1, $\{a_j\}\subset\mathbb{R}$.

По теореме 4 решение в (6) пропорционально T_σ – одному из полиномов Золотарёва порядка n либо полиному $T_{n-1\,\infty}$. Коэффициенты $\widehat{a}_j$ этого полинома являются значениями a_j, для которых в (6) достигается нижняя грань. Пусть $\widehat{\mu}(\,\cdot\,)$ – кусочно-постоянная функция с промежутками постоянства, образованными системой точек $\{\tau_j\}$ – точками альтернанса полинома T_σ; пусть вариация $\widehat{\mu}(\,\cdot\,)$ на $[-1,1]$ равна 1; пусть также величины скачков $\widehat{\mu}(\,\cdot\,)$ в точках альтернанса и коэффициент $\widehat{\lambda} > 0$ определяются, исходя из согласованного с (5) тождества

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}\int_{-1}^{1} x(t)\,d\,\widehat{\mu}(t) &= \sum_{j=1}^{r}\alpha_j\operatorname{sgn}\widehat{x}(\tau_j)\cdot x(\tau_j)\\ &= \sum_{j=1}^{r}\alpha_j\operatorname{sgn}T_\sigma(\tau_j)\cdot x(\tau_j), \qquad \alpha_j > 0, \quad j = 1,\dots,r,\end{aligned}$$

$x \in \mathcal{P}_n$, $r = n+1$ либо $r = n$ (в зависимости от того, пропорционален ли экстремальный полином T_σ полиному Чебышёва $T_{n\infty}$ или нет). Из (5) и из определения M_1 следует, что наибольшее значение в (4) равно

$$(-M_1) = \widehat{\lambda} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j.$$

Изменим порядок перехода к верхней и к нижней грани в (6): пусть

$$M_2 = \sup_{\mu,\lambda} \inf_{\{a_j\}} \left(-\sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k)!} r^{j-k} \cos((j-k)\varphi - \psi) + \lambda \left(\int_{-1}^{1} \sum_j a_j t^j \, d\mu(t) - 1 \right) \right) \quad (7)$$

и, значит, $M_1 \geqslant M_2$. Так как $\{a_j\}$ в (7) можно выбирать произвольно, то верхняя грань в (7) достигается на парах λ, $\mu(\,\cdot\,)$, у которых (при $\operatorname{sgn}(0) := 1$)

$$\lambda \cdot \int_{-1}^{1} t^j \, d\mu(t) = \frac{j!(1+\operatorname{sgn}(j-k))}{2 \cdot (j-k)!} r^{j-k} \cos((j-k)\varphi - \psi), \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Это условие выполняется для $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\mu}(\,\cdot\,)$ и поэтому $M_2 \geqslant -\widehat{\lambda} = M_1$, т.е. значения M_1 и M_2 равны.

Исходя из определения, значение M_2 является решением следующей экстремальной задачи (ее называем *двойственной* к (3)):

$$\operatorname{var} \mu \to \inf, \qquad \int_{-1}^{1} t^j \, d\mu(t) = \frac{j!(1+\operatorname{sgn}(j-k))}{2 \cdot (j-k)!} r^{j-k} \cos((j-k)\varphi - \psi), \qquad j = 0, \ldots, n, \quad (8)$$

$\operatorname{var} \mu$ – вариация μ на отрезке $[-1, 1]$ и $\operatorname{sgn}(0) := 1$.

С общей схемой построения двойственной задачи, отвечающей заданному возмущению исходной задачи, можно ознакомиться, например, по [5], [6] или [3]; подробнее о связи задач восстановления линейных функционалов на пространстве полиномов, задачи (4) и задачи (8) можно прочитать в [3].

Следствие 2. *Задачи (3) и (8) при заданных значениях $\psi \in [0, 2\pi)$, $w \in \mathbb{C}$ являются двойственными, их значения совпадают. Решение T_σ задачи (3) пропорционально одному из полиномов Золотарёва порядка n либо полиному Чебышёва $T_{n-1\,\infty}$ порядка $n-1$; для T_σ выполнено тождество*

$$\ell(x) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \operatorname{sgn} T_\sigma(\tau_j) \cdot x(\tau_j), \qquad a_j > 0, \quad j = 1, \ldots, r, \quad \forall\, x(\,\cdot\,) \in \mathcal{P}_n,$$

в котором $\{\tau_j\}_{j=1}^{r}$ – множество точек альтернанса T_σ, $r = n$ либо (в случае, когда $T_\sigma = \pm T_{n\infty}$) $r = n+1$, $\ell(\,\cdot\,)$ – максимизируемый в (3) функционал. Для решения $\mu(\,\cdot\,)$ задачи (8) выполнены следующие определяющие условия: μ – кусочно-постоянная функция с точками разрыва τ_j, и справедливо тождество

$$\int_{-1}^{1} x(t) \, d\mu(t) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \operatorname{sgn} T_\sigma(\tau_j) \cdot x(\tau_j) \qquad \text{для всех} \quad x(\,\cdot\,) \in \mathcal{P}_n.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.

[2] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.

[3] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000.

[4] В. Б. Демидович, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “Экстремальные задачи для линейных функционалов на чебышёвских пространствах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:2 (2005), 87–100.

[5] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

[6] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.

А. С. Кочуров
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: kochurov@mech.math.msu.su, KchrvAS@yandex.ru

В. М. Тихомиров
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: vmtikh@googlemail.com

Поступило
11.12.2018
После доработки
15.02.2019
Принято к публикации
20.03.2019