

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. R. Dushin, Numerical investigation of the invariant-group solution of the equation of motion of “power” liquid, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 106–109

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

March 21, 2025, 01:17:28



няв φ_s^{N+1} в Y^{N+1} , обозначим новое отображение через g_1 . Его можно выбрать так, чтобы $\text{dist}(g_1, \varphi_s^{N+1}) < \frac{\varepsilon}{4}$. Полагая теперь $g_2 = f'_2$, получаем нужные отображения g_i .

Осталось доказать, что $f: Y \rightarrow X$ — CE -отображение. Достаточно показать, что слои f стягиваемы. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, $f^{-1}x$ — ее прообраз. Используя определенные выше отображения g_i^t , строим гомотопию

$$f_t: f^{-1}x \rightarrow f^{-1}x,$$

$$f_t = \begin{cases} \text{id}, & t=0; \\ \underbrace{\text{id} \times \dots \times \text{id}}_n \times \prod_{i=n}^{\infty} g_{n((n+1)t-1)}^n, & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots, \end{cases}$$

где все отображения ограничены на $f^{-1}x$. Легко видеть, что $f_1(f^{-1}x) = x$.

Автор приносит глубокую благодарность Е. В. Щепину за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дранишников А. Н. О размерности произведения ANR-компактов // Докл. АН СССР. 1988. 300, № 5. 1045—1049.
2. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971.
3. Дранишников А. Н., Щепин Е. В. Клеточноподобные отображения. Проблема повышения размерности // Успехи матем. наук. 1986. 41, вып. 6. 49—90.
4. Daverman R. Detecting the disjoint disks property // Pacif. J. Math. 1981. 93, N 2. 277—298.

Поступила в редакцию
10.04.92

УДК 532.5:532.135

В. Р. Душин

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ «СТЕПЕННОЙ» ЖИДКОСТИ

Рассмотрим систему уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости со «степенной» зависимостью напряжений τ_{ij} от скоростей деформации e_{ij} , которая в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2k |2e_{ij}e_{ji}|^{\frac{n-1}{2}} e_{ij}, \quad i, j = 1 \div N,$$

где k, n — реологические константы, N — размерность физического пространства.

В работе [1] приведен пример инвариантно-группового решения уравнений (1), построенного на трехпараметрической подгруппе с инфинитезимальным оператором

$$\langle X_0 = \partial_t, \quad Z = \frac{2}{n} t \partial_t + \frac{2-n}{n} x_i \partial_{x_i} - v_i \partial_{v_i} - 2p \partial_p, \quad (1)$$

$$X_{12} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} + v_2 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_2} \rangle$$

из класса оптимальной системы подгрупп третьего порядка группы, допускаемой системой (1). При этом решение системы (1), инвариантное относительно подгруппы с оператором $\langle X_0, Z, X_{12} \rangle$, после отыскания инвариантов подгруппы записывается в сферической системе координат (r, θ, φ) в следующей функциональной форме:

$$\begin{aligned} v_r &= r^{\frac{n}{n-2}} U(\theta), \quad v_\theta = r^{\frac{n}{n-2}} V(\theta), \\ v_\varphi &= r^{\frac{n}{n-2}} W(\theta), \quad p = r^{\frac{2n}{n-2}} P(\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Для случая чисто радиального движения, полагая в (2) $V=W=0$, из условия несжимаемости находим, что показатель n в реологическом законе должен быть равен $4/3$.

Подставляя выражения (2) для компонент скорости и давления в систему (1), преобразованную к сферическим координатам, и исключая давление из системы, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\frac{d}{d\theta} \left[2\Delta \operatorname{Re} u^2 + 12Bu + \frac{d}{d\theta} \left(B \frac{du}{d\theta} \right) + \operatorname{ctg} \theta B \frac{du}{d\theta} \right] - 4B \frac{du}{d\theta} = 0, \quad (3)$$

где

$$B = \left[12u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/6}, \quad u(\theta) = \Delta \left(\operatorname{Re} \frac{k}{\rho} \right)^{-3/2} U(\theta),$$

$$\operatorname{Re} = \frac{r^{\frac{4}{3}} v_r^{\frac{2}{3}}(0, r) \rho}{k}.$$

Значения параметра $\Delta = +1, -1$ соответствуют случаям расходящегося ($v_r(0, r) > 0$) и сходящегося течений жидкости.

Построенное автомодельное решение системы (1), дополненной краевыми условиями вида (4), описывает установившееся осесимметричное радиальное течение дилатантной ($n=4/3$) жидкости в коническом канале с углом полураствора α , в вершине которого находится источник (сток).

Из условий прилипания вязкой жидкости на стенке канала ($\theta=\alpha$) и симметрии течения относительно оси канала ($\alpha=0$) для безразмерной радиальной компоненты скорости следует, что

$$u(0) = 1, \quad \left. \frac{du}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad u(\alpha) = 0. \quad (4)$$

Двухточечная краевая задача (3), (4) численно исследовалась в работе [1] для значений определяющих параметров

$$\Delta = \pm 1, \quad \operatorname{Re} > 0 \quad \text{и} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

В данной работе это исследование продолжено для значений $\Delta = \pm 1, \operatorname{Re} > 0$ и $0 < \alpha < \pi$ методом проб с интерполяцией и автоматическим выбором шага интегрирования по заданной точности вычислений.

Уравнение (3) интегрировалось методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности.

Результаты численных исследований для $Re=0$ и $0 < \alpha < \pi$ представлены на рис. 1—3. Значение $Re=0$ соответствует решению рассматриваемой задачи в приближении Стокса, т. е. без учета квадратичных членов инерции в левых частях уравнений движения. Выбор значения $Re=0$ для иллюстрации основных свойств течений при умеренных значениях Re не случаен, так как при уменьшении значения Re решения поставленной задачи, как показали численные исследования, сходятся

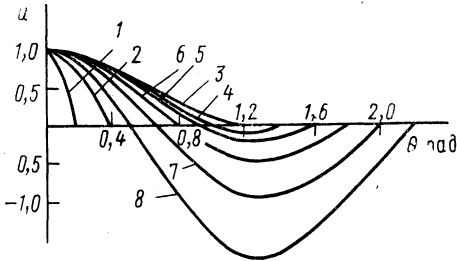


Рис. 1. Безразмерные профили скорости для различных значений угла полураствора канала α и $Re=0$: 1 — $\alpha=0,2$ рад.; 2 — $0,4$ рад.; 3 — $1,2$ рад.; 4 — $1,4$ рад.; 5 — $1,6$ рад.; 6 — $1,8$ рад.; 7 — $2,0$ рад.; 8 — $2,2$ рад.

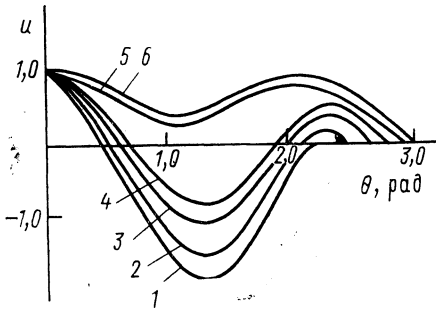


Рис. 2. Безразмерные профили скорости для различных значений угла полураствора канала α и $Re=0$: 1 — $\alpha=2,3$ рад.; 2 — $2,5$ рад.; 3 — $2,7$ рад.; 4 — $2,8$ рад.; 5 — $2,9$ рад.; 6 — $3,0$ рад.

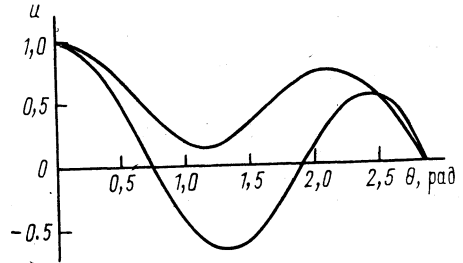


Рис. 3. Безразмерные профили скорости для $\alpha=2,85$ рад. и $Re=0$

к решению с $Re=0$ как для расходящегося, так и для сходящегося течений. Причем для расходящегося течения кривая зависимости $u=u(\theta)$ при $Re=0$ является предельной сверху кривой, а для сходящегося течения — предельной снизу (см., например, [1] для $\alpha=0,2$ рад.). Как видно из рис. 1, 2, с увеличением значения α профиль скорости в канале становится все более пологим, и для $\alpha > \alpha_0 \approx 1,19$ рад. вблизи стенки канала образуется зона возвратного тока. С ростом α в диапазоне $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1 \approx 2,25$ рад. размер зоны возвратного тока увеличивается, и при $\alpha=\alpha_1$, как и в случае $\alpha=\alpha_0$, вязкие напряжения на стенке канала обращаются в нуль. Для значения α из диапазона $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \approx 2,87$ рад. вблизи стенки канала формируется зона регулярного течения (движущегося в том же направлении, что и на оси канала), которая с ростом α все дальше вглубь потока оттесняет от стенки область возвратного тока. И, наконец, при переходе α через значение α_2 происходит скачкообразное изменение типа течения от течения регулярного вида вблизи оси и стенки канала с зоной возвратного тока внутри потока к всюду

регулярному течению (кривые 5, 6 на рис. 2). Причем зависимости $u=u(\theta)$ в диапазоне изменения угла полураствора канала $\alpha_2 < \alpha < \pi$, как и в случае $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, имеют три стационарные точки и три участка монотонности, однако в случае $\alpha_2 < \alpha < \pi$ поток по всей ширине канала движется в одном направлении.

Численные исследования двухточечной краевой задачи (3), (4) для $Re=0$ показали, что в окрестности значения угла полураствора канала $\alpha=2,87$ рад. имеют место оба типа решения с тремя стационарными точками в потоке. На рис. 3 дан вид этих решений для значения $\alpha=2,85$ рад. Обнаруженное свойство неединственности решения задачи (3), (4) сохраняется в диапазоне $2,85 \text{ рад} \leq \alpha \leq 2,9 \text{ рад}$. При этом для $0 < \alpha \leq 2,84 \text{ рад}$ и $2,91 \text{ рад} \leq \alpha < \pi$ решение задачи (3), (4) единственно и имеет тип, относящийся к соответствующим диапазонам изменения угла α , описанным выше.

Ранее свойство неединственности решений краевой задачи (3), (4) было обнаружено в диапазоне изменения $0 < \alpha < \pi/2$ при увеличении значения Re (например, в [1] для $\alpha=0,2$ рад. и $Re=10^4$ было найдено три типа решения как в расходящемся, так и в сходящемся потоках) и объяснялось наличием квадратичных членов инерции в левых частях уравнений движения. Однако из результатов настоящей работы видно, что и в приближении Стокса в узком диапазоне изменения угла полураствора канала для больших его значений проявляется свойство неединственности решения краевой задачи (3), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Душин В. Р. Инвариантные решения уравнений движения «степенных» жидкостей // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1988. № 2. 91—95.

Поступила в редакцию
05.10.92