Дискретная математика

том 17 выпуск 2 * 2005

УДК 519.2

Вычисление моментов комбинаторных статистик от перестановочных случайных величин

© 2005 г. А. М. Зубков, Д. В. Шуваев

В настоящей работе рассматриваются статистики, заданные на последовательностях перестановочных случайных величин: число возрастаний, число убываний, число равенств, число двойных возрастаний, двойных убываний, число пиков и число впадин. Получены явные выражения первых моментов таких статистик через простые характеристики совместных распределений.

Работа первого автора выполнена при поддержке грантом НШ-1758.2003.1 программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ и программой РАН «Современные проблемы теоретической математики».

1. Определения и обозначения

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются перестановочными, если совместные распределения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(n)}$ совпадают при любой перестановке $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ чисел $1, 2 \ldots, n$.

Примерами распределений наборов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ дискретных перестановочных случайных величин являются равномерное распределение на перестановках $\{1, \ldots, n\}$, равномерное распределение на множествах наборов заданной спецификации и смеси таких распределений. Всюду далее считаем, что $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — последовательность перестановочных случайных величин.

Индикаторную функцию события A будем обозначать $\chi(A)$: $\chi(A) = 1$, если A истинно, в противном случае $\chi(A) = 0$.

Образуем случайные величины

$$R = \sum_{k=1}^{n-1} \chi\{\xi_k < \xi_{k+1}\},$$

$$F = \sum_{k=1}^{n-1} \chi\{\xi_k > \xi_{k+1}\},$$

$$L = \sum_{k=1}^{n-1} \chi\{\xi_k = \xi_{k+1}\},$$

которые равны, соответственно, числу возрастаний, числу убываний и числу равенств в последовательности $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Цель работы — выразить первые моменты распределений R, L, F и некоторых других случайных величин через характеристики распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

2. Основные результаты

Распределение трехмерного случайного вектора (R, F, L) сосредоточено на двумерной плоскости, определяемой очевидным равенством

$$R + F + L = n - 1.$$

В теоремах 1–3 приводятся выражения для математического ожидания и компонент ковариационной матрицы вектора (R, F, L). Введем обозначения, которые будут использоваться в работе. Для $n \geqslant 4$ полагаем

$$P_2 = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\}, \qquad P_3 = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\},$$
$$P_{2,2} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 = \xi_4\}, \qquad P_2^* = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3\} - \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3\}.$$

Теорема 1. *Математическое ожидание и дисперсия числа возрастаний R равны, соответственно,*

$$\mathbf{M}R = \frac{(n-1)}{2}(1 - P_2),$$
$$\mathbf{D}R = \frac{n+1}{12}(1 - P_{2,2}) + \frac{2}{3}(n-2)(P_3 - P_{2,2}) + \frac{1}{4}(n-1)^2(P_{2,2} - P_2^2).$$

Замечание 1. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, то

$$P_{2,2} = P_2^2,$$

и последнее слагаемое в формуле для $\mathbf{D}R$ равно нулю.

Замечание 2. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайная перестановка, равновероятно выбираемая из множества всех перестановок степени n, то

$$P_2 = P_3 = P_{2,2} = 0.$$

В этом случае теорема 1 дает формулы

$$\mathbf{M}R = \frac{n+1}{2}, \qquad \mathbf{D}R = \frac{n+1}{12},$$

согласующиеся с известной предельной теоремой (см. [3], стр. 288).

Теорема 2. *Математическое ожидание и дисперсия числа убываний F равны, соответственно,*

$$\mathbf{M}F = \mathbf{M}R, \qquad \mathbf{D}F = \mathbf{D}R,$$

ковариация R и F равна

$$\operatorname{cov}(R, F) = -(n-1)\left(\frac{1 - P_2}{2}\right)^2 + (n-2)\left(\frac{1 - P_2^2}{6} + \frac{P_{2,2} - P_3}{3}\right) + (n-2)(n-3)\left(\frac{P_{2,2} - P_2^2}{4}\right).$$

Замечание 3. Совпадают не только первые моменты, но и сами распределения числа возрастаний R и числа убываний F, поскольку в силу перестановочности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ отрезки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_1)$ распределены одинаково.

Замечание 4. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, то в силу замечания 1 последнее слагаемое в правой части выражения для ковариации R и F равно нулю.

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ реализуют равновероятные перестановки заданной спецификации, то исследование числа убываний F сводится к известной задаче Симона Ньюкомба (см. [2], стр. 254).

Теорема 3. *Математическое ожидание и дисперсия числа равенств L равны, соответственно,*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}L &= (n-1)P_2,\\ \mathbf{D}L &= -2\operatorname{cov}(L,R) = -2\operatorname{cov}(L,F)\\ &= (n-1)P_2(1-P_2) + 2(n-2)(P_3 - P_{2,2}) + (n-2)(n-3)(P_{2,2} - P_2^2).\end{aligned}$$

Замечание 5. Утверждения теорем 1, 2 и 3 были опубликованы ранее [1]. Можно также получить утверждения для моментов третьего порядка, одно такое утверждение мы приводим для примера.

При соответствующих предположениях, что $n \geqslant 5, 6$, дополнительно полагаем

$$\begin{aligned}P_{3,2} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 = \xi_5\},\\ P_{2,2,2} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 = \xi_4, \xi_5 = \xi_6\}.\end{aligned}$$

Теорема 4. *Третий момент числа равенств L равен*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}L^3 = {} & (n-1)P_2 + 6(n-2)P_3 + 6(n-3)P_4\\ & + 3(n-2)(n-3)P_{2,2} + 6(n-3)(n-4)P_{3,2} + (n-3)(n-4)(n-5)P_{2,2,2}.\end{aligned}$$

Введем случайные величины

$$\widehat{RR} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k < \xi_{k+1} < \xi_{k+2}\}, \qquad \widehat{RL} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k < \xi_{k+1} = \xi_{k+2}\},$$

$$\widehat{RF} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k < \xi_{k+1} > \xi_{k+2}\}, \qquad \widehat{LR} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k = \xi_{k+1} < \xi_{k+2}\},$$

$$\widehat{LL} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k = \xi_{k+1} = \xi_{k+2}\}, \qquad \widehat{LF} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k = \xi_{k+1} > \xi_{k+2}\},$$

$$\widehat{FR} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k > \xi_{k+1} < \xi_{k+2}\}, \qquad \widehat{FL} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k > \xi_{k+1} = \xi_{k+2}\},$$

$$\widehat{FF} = \sum_{k=1}^{n-2} \chi\{\xi_k > \xi_{k+1} > \xi_{k+2}\}.$$

Величины $\widehat{RR}$, $\widehat{RF}$, $\widehat{FR}$, $\widehat{FF}$ назовем, соответственно, числом двойных возрастаний, числом пиков, числом впадин, числом двойных убываний в последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

В [4] для случая, когда $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — равновероятная перестановка степени n, получены рекурсивные формулы вычисления совместного распределения этих четырех случайных величин.

При соответствующих предположениях, что $n \geqslant 4, 5, 6$, дополнительно полагаем

$$P_4 = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4\}, \qquad P_3^* = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\} - \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 > \xi_4\},$$
$$P_5 = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\}, \quad P_{3,3} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 = \xi_5 = \xi_6\},$$

Теорема 5. *Математическое ожидание и дисперсия числа двойных возрастаний $\widehat{RR}$ равны, соответственно,*

$$\mathbf{M}\widehat{RR} = (n-2)\left(\frac{1}{6} - \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{3}\right),$$
$$\begin{aligned}\mathbf{D}\widehat{RR} = {} & \frac{23n-37}{180}(1-P_{2,2}) - \frac{2n-3}{6}P_2(1-P_3) + \frac{7n-20}{9}(P_3 - P_{2,2}) \\ & + \frac{(n-2)^2}{4}(P_{2,2} - P_2^2) + \frac{7n-8}{45}(P_{2,2} - P_3^2) \\ & + \frac{2n^2-10n+11}{6}(P_2P_3 - P_{3,2}) + \frac{7-2n}{2}(P_4 - P_{3,2}) \\ & + \frac{2(n-4)}{5}(P_5 - P_{3,3}) + \frac{(n-4)(5n-7)}{45}(P_{3,3} - P_3^2).\end{aligned}$$

Замечание 6. Как и в замечании 3, легко видеть, что два набора статистик

$$(\widehat{RR}, \widehat{RL}, \widehat{LF}), \qquad (\widehat{FF}, \widehat{LR}, \widehat{FL})$$

распределены одинаково.

Теорема 6. *Математическое ожидание и дисперсия числа двойных равенств $\widehat{LL}$ равны, соответственно,*

$$\mathbf{M}\widehat{LL} = (n-2)P_3,$$
$$\begin{aligned}\mathbf{D}\widehat{LL} = {} & 2(n-4)(P_5 - P_{3,3}) + (n-3)(n-4)(P_{3,3} - P_3^2) \\ & + 3(n-3)(P_4 - P_3) + (3n-8)P_3(1-P_3).\end{aligned}$$

Замечание 7. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, то, дополнительно к замечанию 1,

$$P_{2,2,2} = P_2^3, \quad P_{3,2} = P_3P_2, \quad P_{3,3} = P_3^2.$$

Замечание 8. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайная перестановка, равновероятно выбираемая из множества всех перестановок, то, дополнительно к замечанию 2,

$$P_3^* = P_4 = P_5 = P_{3,2} = P_{2,2,2} = P_{3,3} = 0.$$

Теорема 7. *Математические ожидания числа пиков $\widehat{RF}$ и числа впадин $\widehat{FR}$ равны, соответственно,*

$$\mathbf{M}\widehat{RF} = (n-2)\left(\frac{1}{3} - \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6}\right),$$
$$\mathbf{M}\widehat{FR} = (n-2)\left(\frac{1}{3} - \frac{P_2 + P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6}\right).$$

Замечание 9. В силу очевидных равенств

$$R + F + L = n - 1,$$
$$\widehat{RR} + \widehat{RF} + \widehat{RL} + \chi\{\xi_{n-1} < \xi_n\} = \widehat{RR} + \widehat{FR} + \widehat{LR} + \chi\{\xi_1 < \xi_2\} = R,$$
$$\widehat{FR} + \widehat{FF} + \widehat{FL} + \chi\{\xi_{n-1} > \xi_n\} = \widehat{RF} + \widehat{FF} + \widehat{LF} + \chi\{\xi_1 > \xi_2\} = F$$

статистики L, $\widehat{RL}$, $\widehat{LR}$, $\widehat{FL}$, $\widehat{LF}$ линейно выражаются через n, R, F, $\widehat{RF}$, $\widehat{FR}$, $\widehat{RR}$, $\widehat{FF}$, $\{\xi_1 < \xi_2\}$, $\{\xi_1 > \xi_2\}$, $\{\xi_{n-1} < \xi_n\}$, $\{\xi_{n-1} > \xi_n\}$.

3. Вычисление вероятностей некоторых событий, связанных с перестановочными случайными величинами

В настоящем пункте вычисляются вероятности и некоторые вероятностные характеристики, которые будут использованы при доказательстве теорем.

Лемма 1. *Если ξ_1, ξ_2, ξ_3 — перестановочные случайные величины, то в соответствии с введенными обозначениями*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2\} = \frac{1 - P_2}{2}, \qquad \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_2\} = \frac{1 + P_2}{2}, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3\} = P_2 - P_3, \tag{2}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} = \frac{1}{6} - \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{3}, \tag{3}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3,\ \xi_2 < \xi_3\} = \frac{1}{3} - \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6}, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2,\ \xi_1 < \xi_3\} = \frac{1}{3} - \frac{P_2 + P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6}, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_3,\ \xi_2 < \xi_3\} = \frac{1}{3} - \frac{P_3}{3}, \tag{6}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_3,\ \xi_2 \leqslant \xi_3\} = \frac{1}{3} + \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6}. \tag{7}$$

Замечание 10. Если ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы, одинаково распределены, и распределение ξ_1 симметрично, то есть совпадает с распределением $C - \xi_1$ при некоторой постоянной C, то

$$P_2^* = P_3^* = 0.$$

Замечание 11. Сумма правых частей (4), (6), (7) равна 1; это является следствием перестановочности ξ_1, ξ_2, ξ_3 и того, что события $\{\xi_1 < \xi_3, \xi_2 < \xi_3\}$, $\{\xi_1 < \xi_2, \xi_3 \leqslant \xi_2\}$, $\{\xi_2 \leqslant \xi_1, \xi_3 \leqslant \xi_1\}$ попарно не пересекаются, а их объединение дает полное событие, то есть содержит все возможные исходы.

Доказательство леммы 1. Равенства (1) следуют из тождеств

$$1 = \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} + \mathbf{P}\{\xi_1 > \xi_2\},$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2\} = \mathbf{P}\{\xi_1 > \xi_2\}.$$

Аналогично выводится (2) из равенства

$$P_2 = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3\}.$$

Равенство (3) следует из (2) и того, что в силу перестановочности случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned} 1 &= 3!\,\mathbf{P}\{\xi_1<\xi_2<\xi_3\} + 3\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3\} + 3\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\} \\ &= 6\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} + 3P_2 - 2P_3. \end{aligned}$$

Используя (3), (2) и определение P_2^*, получаем (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3, \xi_2 < \xi_3\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_2 < \xi_1 < \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3\} \\ &= 2\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} + \frac{P_2 - P_3 + P_2^*}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{6} + \frac{P_2^*}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем равенство (5):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2, \xi_1 < \xi_3\} &= 2\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} + \frac{P_2 - P_3 - P_2^*}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{6} - \frac{P_2^*}{2}. \end{aligned}$$

Равенство (6) следует из (4), (2) и определения P_2^*:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_3, \xi_2 < \xi_3\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3, \xi_2 < \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_3 > \xi_2\} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6} + \frac{P_2 - P_3 - P_2^*}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{P_3}{3}. \end{aligned}$$

Наконец, (7) выводится из (4) и (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_3, \xi_2 \leqslant \xi_3\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3, \xi_2 < \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 = \xi_2\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_3 > \xi_2\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6} + \left(P_2 - P_3 - P_2^*\right) + P_3 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{3}. \end{aligned}$$

Следствие 1. *Для перестановочных случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 справедливы равенства*

$$D = \mathbf{D}\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_2\} = \mathbf{D}\chi\{\xi_1 < \xi_2\} = \frac{1 - P_2^2}{4}, \tag{8}$$

$$c_{\leqslant\leqslant} = \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_3\}, \chi\{\xi_2 \leqslant \xi_3\}) = \frac{1 - P_2^2}{12} - \frac{P_2^2 - P_3}{6} - \frac{P_2^*}{2}, \tag{9}$$

$$c_{\leqslant<} = \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_3\}, \chi\{\xi_2 < \xi_3\}) = \frac{1 - P_2^2}{12} + \frac{P_2^2 - P_3}{3}, \tag{10}$$

$$c_{<<} = \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 < \xi_3\}, \chi\{\xi_2 < \xi_3\}) = \frac{1 - P_2^2}{12} - \frac{P_2^2 - P_3}{6} + \frac{P_2^*}{2}. \tag{11}$$

Доказательство. Равенства (8) непосредственно следуют из (1). Далее, из (7), (1) и (4) выводим (9):

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_3\}, \chi\{\xi_2 \leqslant \xi_3\}) &= \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_3, \xi_2 \leqslant \xi_3\} - \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_3\}\mathbf{P}\{\xi_2 \leqslant \xi_3\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6} - \frac{(1+P_2)^2}{4} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{P_2^2}{4} + \frac{P_3}{6} - \frac{P_2^*}{2}.\end{aligned}$$

Аналогично доказываются формулы (10) и (11):

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_3\}, \chi\{\xi_2 < \xi_3\}) &= \frac{1}{3} - \frac{P_3}{3} - \frac{1-P_2^2}{4} = \frac{1}{12} + \frac{P_2^2}{4} - \frac{P_3}{3}, \\ \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 < \xi_3\}, \chi\{\xi_2 < \xi_3\}) &= \frac{1}{3} - \frac{P_2 - P_2^*}{2} + \frac{P_3}{6} - \frac{(1-P_2)^2}{4} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{P_2^2}{4} + \frac{P_3}{6} + \frac{P_2^*}{2}.\end{aligned}$$

Замечание 12. Если случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют равномерное распределение на $\{1, \ldots, m\}$, то

$$P_2 = 1/m, \quad P_3 = 1/m^2, \quad P_2^* = 0,$$

и поэтому

$$\mathbf{D}\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_2\} = \mathbf{D}\chi\{\xi_1 < \xi_2\} = \frac{m^2-1}{4m^2}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_3\}, \chi\{\xi_2 \leqslant \xi_3\}) &= \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_3\}, \chi\{\xi_2 < \xi_3\}) \\ &= \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 < \xi_3\}, \chi\{\xi_2 < \xi_3\}) = \frac{m^2-1}{12m^2}.\end{aligned} \tag{13}$$

Лемма 2. *Если ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — перестановочные случайные величины, то*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} = \frac{1}{4} - \frac{P_2}{2} + \frac{P_{2,2}}{4}, \tag{14}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} = \frac{1}{4} - \frac{P_{2,2}}{4}, \tag{15}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_2, \xi_3 \leqslant \xi_4\} = \frac{1}{4} + \frac{P_2}{2} + \frac{P_{2,2}}{4}. \tag{16}$$

Доказательство. Из тождества

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 > \xi_4\} \\ &= 2\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 = \xi_4\}\end{aligned}$$

следует равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} = \frac{P_2 - P_{2,2}}{2}. \tag{17}$$

Из аналогичного тождества

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2\} = 2\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2, \xi_3 = \xi_4\}$$

и из (17) получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-P_2}{2} - \frac{P_2 - P_{2,2}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{P_2}{2} + \frac{P_{2,2}}{4}.\end{aligned}$$

Равенство (15) получается сложением правых частей (14) и (17).

Докажем (16):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_2, \xi_3 \leqslant \xi_4\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant \xi_2, \xi_3 = \xi_4\}\\ &= \frac{1-P_{2,2}}{4} + \frac{P_2 - P_{2,2}}{2} + P_{2,2}\\ &= \frac{1 + 2P_2 + P_{2,2}}{4}.\end{aligned}$$

Из леммы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Для перестановочных случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 справедливы равенства*

$$\begin{aligned}c_4 &= \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_2\}, \chi\{\xi_3 \leqslant \xi_4\})\\ &= -\operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_2\}, \chi\{\xi_3 < \xi_4\})\\ &= \operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 < \xi_2\}, \chi\{\xi_3 < \xi_4\})\\ &= \frac{P_{2,2} - P_2^2}{4}.\end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Докажем последнее из трех равенств:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 < \xi_2\}, \chi\{\xi_3 < \xi_4\}) &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2, \xi_3 < \xi_4\} - \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2\}\mathbf{P}\{\xi_3 < \xi_4\}\\ &= \frac{1 - 2P_2 + P_{2,2}}{4} - \left(\frac{1-P_2}{2}\right)^2\\ &= \frac{P_{2,2} - P_2^2}{4}.\end{aligned}$$

Два других равенства следуют из очевидного тождества

$$\chi\{\xi_1 \leqslant \xi_2\} = 1 - \chi\{\xi_2 < \xi_1\}$$

и некоррелированности произвольных случайных величин с константами.

Лемма 3. *Если ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — перестановочные случайные величины, то в соответствии*

с введенными обозначениями

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} = \frac{P_{2,2} - P_4}{2}, \tag{19}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 > \xi_4\} = \frac{P_3 - P_4 - P_3^*}{2}, \tag{20}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\} = \frac{P_3 - P_4 + P_3^*}{2}, \tag{21}$$

$$2\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\} = \frac{(P_2 - P_{2,2}) + (P_2^* - P_3^*)}{2} + P_4 - P_3, \tag{22}$$

$$2\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\} = \frac{(P_2 - P_{2,2}) - (P_2^* - P_3^*)}{2} + P_4 - P_3, \tag{23}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} = \frac{1}{24} - \frac{P_2}{4} + \frac{P_3}{3} + \frac{P_{2,2}}{8} - \frac{P_4}{4}. \tag{24}$$

Доказательство. Равенство (19) следует из перестановочности $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и очевидного тождества

$$\begin{aligned} P_{2,2} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 = \xi_4\} \\ &= P_4 + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3 = \xi_4\}. \end{aligned}$$

Равенства (20) и (21) следуют из определения P_3^* и тождества

$$\begin{aligned} P_3 &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\} \\ &= P_4 + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 > \xi_4\}. \end{aligned}$$

Выполняется цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 > \xi_4\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_4 < \xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_4 < \xi_3\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\xi_4 < \xi_1 = \xi_2 < \xi_3\}. \end{aligned}$$

С учетом (19) и (21) выражение в правой части цепочки преобразуется к виду

$$2\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} + \frac{P_{2,2} - P_4}{2} + \frac{P_3 - P_4 + P_3^*}{2} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\},$$

но согласно определению P_2^* левая часть цепочки есть $(P_2 + P_2^* - P_3)/2$. Равенство левой и правой частей цепочки после приведения подобных членов доказывает формулу (22). Формула (23) выводится аналогичным образом из равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\xi_2 < \xi_1 < \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_2 < \xi_1 = \xi_3 = \xi_4\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_1\} \end{aligned}$$

с учетом формулы

$$\mathbf{P}\{\xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} = \frac{P_2 - P_2^* - P_3}{2}$$

и формул (19), (20). Докажем (24). В силу перестановочности $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} 1 = 4!\,&\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} \\ &+ 12(\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\}) \\ &+ 4(\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 = \xi_4\}) \\ &+ 6\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму в правой части равенства. Группа слагаемых, перед которыми стоит коэффициент 12, равна, очевидно, полусумме

$$2\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\}$$

и

$$2\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4\}$$

и выражается с помощью (22) и (23). Группа слагаемых перед которыми стоит коэффициент 4, выражается через (20) и (21), слагаемое с коэффициентом 6 выражается через (19), последнее слагаемое есть P_4. В результате указанных преобразований и приведения подобных членов получаем (24).

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ — перестановочные случайные величины, то в соответствии с введенными обозначениями*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 < \xi_5\} = \frac{1}{2}(P_3 - P_{3,2}), \tag{25}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 > \xi_5\} = P_4 - P_5, \tag{26}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 > \xi_4 = \xi_5\} = P_{3,2} - P_5, \tag{27}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} = \frac{1}{120} - \frac{P_2}{12} + \frac{P_3}{6} - \frac{P_4}{4} + \frac{P_5}{5} + \frac{P_{2,2}}{8} - \frac{P_{3,2}}{6}. \tag{28}$$

Доказательство. В силу перестановочности

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 < \xi_5\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 > \xi_5\},$$

поэтому

$$2\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 < \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 = \xi_5\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\}.$$

Из последнего равенства следует (25). Равенства (26) и (27) следуют непосредственно из определения величин $P_{3,2}$, P_4, P_5. Равенство (28) докажем, исходя из следующего

тождества:

$$
\begin{aligned}
1 = 5!\,\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} &+ \frac{5!}{2}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} \\
&+ \frac{5!}{2}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} + \frac{5!}{2}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&+ \frac{5!}{2}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} + \frac{5!}{3!}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} \\
&+ \frac{5!}{2^2}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} + \frac{5!}{2^2}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} \\
&+ \frac{5!}{3!}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} + \frac{5!}{2^2}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} \\
&+ \frac{5!}{3!}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} + \frac{5!}{4!}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&+ \frac{5!}{2!\,3!}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} + \frac{5!}{2!\,3!}\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} \\
&+ \frac{5!}{4!}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\}.
\end{aligned}
$$

Преобразуем правую часть тождества, разбив для удобства всю сумму на отдельные группы слагаемых с одинаковыми коэффициентами (точнее, с коэффициентами, записанными одинаковым образом). Слагаемые первой группы определяются искомой величиной. Слагаемые второй группы (с коэффициентами $5!/2$) могут быть описаны следующим образом: среди $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ найдется ровно четыре различных значения. Заметим, что если $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4$, то значение ξ_5 либо совпадает с одним из $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, либо может быть вставлено в строго возрастающую цепочку $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4$ одним из пяти способов. Из этого следует равенство

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} - 5\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\},
\end{aligned}
$$

в котором с учетом свойства перестановочности мы пренебрегли различными перестановками индексов. Рассмотрим третью группу слагаемых (с коэффициентами $5!/3!$), их можно описать следующим образом: среди $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ найдется три равных и найдется три попарно различных значения. Из равенств (25), (26) и очевидного тождества

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 < \xi_5\} = \mathbf{P}&\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} \\
&+ \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&+ \mathbf{P}\{\xi_4 < \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_5\} \\
&+ \mathbf{P}\{\xi_4 < \xi_5 = \xi_1 = \xi_2 < \xi_3\} \\
&+ \mathbf{P}\{\xi_4 < \xi_5 < \xi_1 = \xi_2 < \xi_3\},
\end{aligned}
$$

получим формулу для преобразования третьей группы слагаемых:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&\qquad + \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} = (P_3 - P_{3,2})/2 - P_4 + P_5.
\end{aligned}
$$

Слагаемые четвертой группы описываются следующим образом: среди $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ найдется две пары равных значений и найдется три попарно различных значения. Найдем

выражение для преобразования этой группы. Последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
P_{2,2} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2, \xi_3 = \xi_4\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_5, \xi_3 = \xi_4\} + P_{3,2} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_5, \xi_3 = \xi_4\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_5 < \xi_3 = \xi_4\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_3 = \xi_4 < \xi_1 = \xi_2 < \xi_5\} + P_{3,2} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_5 > \xi_3 = \xi_4\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3 = \xi_4 > \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 > \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_3 = \xi_4 > \xi_1 = \xi_2 > \xi_5\}.
\end{aligned}$$

Используя перестановочность, переставим индексы в единообразном порядке и продолжим преобразования с учетом формул (27), (26):

$$\begin{aligned}
P_{2,2} &= 2(\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3 = \xi_4 > \xi_5\}) + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 > \xi_5\} + P_{3,2} \\
&= 2(\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3 = \xi_4 > \xi_5\}) + P_{3,2} - P_5 + P_4 - P_5 + P_{3,2},
\end{aligned}$$

что изначально было равно $P_{2,2}$. Из доказанного равенства следует формула для преобразования четвертой группы слагаемых:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 = \xi_5\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = \xi_4 < \xi_5\} \\
&\qquad + \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 > \xi_3 = \xi_4 > \xi_5\} = (P_{2,2} - P_4)/2 - P_{3,2} + P_5.
\end{aligned}$$

В пятую группу войдет два слагаемых с коэффициентами $5!/(3!2!)$, и они будут преобразованы с помощью формулы (27).

В группу слагаемых с коэффициентами $5!/4!$ войдет тоже два слагаемых, и они будут преобразованы с помощью формулы (26).

В седьмую группу войдет единственное последнее слагаемое, и по определению

$$P_5 = \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\}.$$

В результате указанных преобразований исходное тождество приобретет вид

$$\begin{aligned}
1 &= 5!\,\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\} \\
&\quad + \frac{5!}{2}(\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} - 5\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\}) \\
&\quad + \frac{5!}{3!}\left(\frac{P_3 - P_{3,2}}{2} - P_4 + P_5\right) + \frac{5!}{2\cdot 2}\left(\frac{P_{2,2} - P_4}{2} - P_{3,2} + P_5\right) + P_5.
\end{aligned}$$

Формула (28) получается, если из последнего равенства выразить вероятность $\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\}$, применить формулу (24) и привести подобные члены.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ — перестановочные случайные величины, то в соответствии с введенными обозначениями*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \xi_4 < \xi_5 < \xi_6\} = \frac{1}{36} - \frac{P_2}{6} + \frac{P_3}{9} + \frac{P_{2,2}}{4} - \frac{P_{3,2}}{3} + \frac{P_{3,3}}{9}. \tag{29}$$

Доказательство. Подобно тому, как при доказательстве леммы 1 из представления вероятности полного события

$$\begin{aligned} 1 &= 3!\,\mathbf{P}\{\xi_1<\xi_2<\xi_3\} + 3\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2<\xi_3\} + 3\mathbf{P}\{\xi_1=\xi_2>\xi_3\} + \mathbf{P}\{\xi_1=\xi_2=\xi_3\} \\ &= 6\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} + 3P_2 - 2P_3. \end{aligned}$$

было получено равенство (3), так из аналогичных представлений вероятностей

$$P_2 = \mathbf{P}\{\xi_4 = \xi_5\}, \quad P_3 = \mathbf{P}\{\xi_4 = \xi_5 = \xi_6\}, \quad \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\}$$

получаются равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \xi_4 = \xi_5\} &= \frac{P_2}{6} - \frac{P_{2,2}}{2} + \frac{P_{3,2}}{3}, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \xi_4 = \xi_5 = \xi_6\} &= \frac{P_3}{6} - \frac{P_{3,2}}{2} + \frac{P_{3,3}}{3}, \\ \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \xi_4 < \xi_5 < \xi_6\} &= \frac{1}{6}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} - \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3,\ \xi_4 = \xi_5\} \\ &\quad + \frac{1}{3}\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \xi_4 = \xi_5 = \xi_6\}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует утверждение леммы.

4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Выражение для математического ожидания следует из определения величины F и из формулы (1). Вычислим дисперсию:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}R &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{D}\chi\{\xi_i < \xi_{i+1}\} + 2\sum_{i=1}^{n-3}\sum_{j=i+2}^{n-1} \operatorname{cov}(\chi\{\xi_i < \xi_{i+1}\}, \chi\{\xi_j < \xi_{j+1}\}) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n-2} \operatorname{cov}(\chi\{\xi_i < \xi_{i+1}\}, \chi\{\xi_{i+1} < \xi_{i+2}\}) \\ &= (n-1)D + (n-2)(n-3)c_4 - 2(n-2)c_{\leqslant<}. \end{aligned}$$

Используя равенства (8), (18) и (10), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}R &= (n-1)\frac{1-P_2^2}{4} + (n-2)(n-3)\frac{P_{2,2}-P_2^2}{4} - 2(n-1)\left(\frac{1-P_2^2}{12} - \frac{P_2^2-P_3}{3}\right) \\ &= \frac{n+1}{12}(1-P_{2,2}) + \frac{2}{3}(n-2)(P_3-P_{2,2}) + \frac{1}{4}(n-1)^2(P_{2,2}-P_2^2). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу замечания 3 распределения случайных величин R и F совпадают. Остается доказать формулу для их ковариации. По определению

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(R,F) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_i > \xi_{i+1}\}, \chi\{\xi_j < \xi_{j+1}\})\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_i > \xi_{i+1}\}, \chi\{\xi_i < \xi_{i+1}\})\\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n-3}\sum_{j=i+2}^{n-1}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_i > \xi_{i+1}\}, \chi\{\xi_j < \xi_{j+1}\})\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-2}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_i > \xi_{i+1}\}, \chi\{\xi_{i+1} < \xi_{i+2}\})\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-2}\operatorname{cov}(\chi\{\xi_i < \xi_{i+1}\}, \chi\{\xi_{i+1} > \xi_{i+2}\})\\ &= -(n-1)D + (n-2)(n-3)c_4 + (n-2)c_{\leqslant\leqslant} + (n-2)c_{<<}.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается подставить в последнее выражение формулы (8),(18), (11) и (9).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины L получается из теорем 1 и 2 и тождества

$$R + L + F = n - 1,$$

но проще их найти непосредственно. Выражение для математического ожидания следует из определения значения P_2. Равенство

$$\mathbf{D}L = -2\operatorname{cov}(L,R) = -2\operatorname{cov}(L,F)$$

получается, если рассмотреть дисперсии правой и левой части тождества

$$R + L = n - 1 - F$$

и учесть равенство распределений F и R. Для дисперсии находим выражение

$$\begin{aligned}\mathbf{D}L = (n-1)\mathbf{D}\chi\{\xi_1 = \xi_2\} + 2(n-2)\operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 = \xi_2\}, \chi\{\xi_2 = \xi_3\})\\ + (n-2)(n-3)\operatorname{cov}(\chi\{\xi_1 = \xi_2\}, \chi\{\xi_3 = \xi_4\}).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается применить формулы из следствий 1 и 2.

Доказательство теоремы 4. По определению

$$\mathbf{M}L^3 = \mathbf{M}\sum_{i,j,k=1}^{n-2}\chi\{\xi_i = \xi_{i+1}\}\chi\{\xi_j = \xi_{j+1}\}\chi\{\xi_k = \xi_{k+1}\}.$$

Отсюда с учетом перестановочности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ следует утверждение теоремы 4.

Доказательство теоремы 5. По определению

$$\mathbf{M}\widehat{RR} = \mathbf{M}\sum_{k=1}^{n-2}\chi\{\xi_k < \xi_{k+1} < \xi_{k+2}\}$$
$$= (n-2)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\}.$$

Учитывая (3), получаем первое утверждение теоремы. Чтобы доказать второе утверждение, вычислим $\mathbf{M}\widehat{RR}^2$. Учитывая перестановочность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, находим, что

$$\mathbf{M}\widehat{RR}^2 = \mathbf{M}\sum_{j=1}^{n-2}\chi\{\xi_j < \xi_{j+1} < \xi_{j+2}\}\sum_{k=1}^{n-2}\chi\{\xi_k < \xi_{k+1} < \xi_{k+2}\}$$
$$= (n-2)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\} + 2(n-3)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\}$$
$$+ (n-4)(n-5)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \xi_4 < \xi_5 < \xi_6\}$$
$$+ 2(n-4)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{D}\widehat{RR} = \mathbf{M}\widehat{RR}^2 - (\mathbf{M}\widehat{RR})^2 = (n-2)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\}$$
$$+ 2(n-3)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4\} + 2(n-4)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5\}$$
$$+ (n-4)(n-5)\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \xi_4 < \xi_5 < \xi_6\} - (n-2)^2\mathbf{P}^2\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\}.$$

Используя формулы лемм 1–5, путем элементарных преобразований выводим второе утверждение теоремы 5.

Доказательство теоремы 6. По определению

$$\mathbf{M}\widehat{LL} = \mathbf{M}\sum_{k=1}^{n-2}\chi\{\xi_k = \xi_{k+1} = \xi_{k+2}\}$$
$$= (n-2)\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\}.$$

Учитывая определение P_3, получаем первое утверждение теоремы. Чтобы доказать второе утверждение, вычислим $\mathbf{M}\widehat{LL}^2$. Учитывая перестановочность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, находим, что

$$\mathbf{M}\widehat{LL}^2 = \mathbf{M}\sum_{j=1}^{n-2}\chi\{\xi_j = \xi_{j+1} = \xi_{j+2}\}\sum_{k=1}^{n-2}\chi\{\xi_k = \xi_{k+1} = \xi_{k+2}\}$$
$$= (n-2)\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\} + 2(n-3)\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4\}$$
$$+ 2(n-4)\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5\}$$
$$+ (n-4)(n-5)\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_4 = \xi_5 = \xi_6\}.$$

Отсюда получаем равенство

$$\mathbf{D}\widehat{LL} = \mathbf{M}\widehat{LL}^2 - (\mathbf{M}\widehat{LL})^2$$
$$= (n-2)P_3 + 2(n-3)P_4 + 2(n-4)P_5 + (n-4)(n-5)P_{3,3} - (n-2)^2P_3^2,$$

которое после элементарных преобразований дает нужную формулу для дисперсии.

Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Выражение для математического ожидания числа пиков следует из формулы (4). Выражение для математического ожидания числа впадин следует из формулы (5).

Теорема 7 доказана.

Список литературы

1. Зубков А. М., Шуваев Д. В., Первые моменты числа отрезков неубывания в последовательности перестановочных случайных величин. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2001) **8**, №2, 760–761.

2. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ.* ИЛ, Москва, 1963.

3. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики.* Наука, Москва, 1983.

4. Yi-Liang Chen, Wei-Hou Cheng, A note on joint distributions of some random vectors defined on permutations. *Ars Combinatoria* (2000) **54**, 139–148.

Статья поступила 02.12.2004.