СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Манаков С. В. // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, вып. 8. С. 543—555. 2. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 36, вып. 1. С. 56—136. 3. Верещагин В. Л. // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 5. С. 584—595. 4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 5. Веселов А. П. // ТМФ. 1987. Т. 71, № 1. С. 154—159. 6. Кричевер И. М. // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16, вып. 4. С. 10—26. 7. Бразовский С. А., Дзялошинский И. Е., Кричевер И. М. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, № 1. С. 389—415. 8. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 9. Воробьев Ю. М., Доброхотов С. Ю. // Математические заметки. 1990. Т. 47, вып. 1. С. 47—61. 10. Кричевер И. М. // ДАН СССР. 1983. Т. 270, № 6. С. 1312—1317. 11. Верещагин В. Л. //УМН. 1990. Т. 45, вып. 3. С. 189—190.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТИПА БЕГУЩИХ ВОЛН ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В. Г. Данилов

В этой работе для полулинейных параболических уравнений

$$Lu = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \gamma(x, t) F(u) = 0, \tag{1}$$

$$u|_{x\to-\infty} \to 0, \quad u|_{x\to\infty} \to 1, \quad 0 < u < 1 \tag{2}$$

приведены аналоги конструкций, развитых в [1] для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. Будем предполагать, что

$\lambda(x, t)$, $\gamma(x, t) \geqslant \delta > 0$, $L \in C^\infty$; $F \in C^\infty([0, 1])$, $F(0) = F(1) = 0$,
и рассмотрим два случая

а) $F'(0) > 0$, $F'(0) > F'(u)$, $F(u) > 0$ при $u \in (0, 1)$, $F'(1) < 0$;
б) $F'(0) = 0$, $F'(1) < 0$, $F(u) > 0$ при $u \in (0, 1)$.

Оказывается, аналогично [1], задача Коши для уравнения (1) в случае а) некорректна в классе аддитивных асимптотик (решений u_N, удовлетворяющих уравнению $Lu_N = O(\varepsilon^N)$ с любой заданной степенной точностью по ε), но корректна в классе мультипликативных асимптотик (удовлетворяющих уравнению $Lu_N = O(\varepsilon^N)\,\partial u_N/\partial t$, см. [1, 2]). В случае б) задача Коши корректна в классе аддитивных асимптотик.

Приведем схему доказательства этих фактов. Напомним, что в случае $\lambda \equiv \gamma \equiv 1$ задача (1), (2) имеет автомодельные решения $u = \chi(x + bt)$, где $\chi = \chi(\tau)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$b\chi' - \chi'' - F(\chi) = 0, \quad b = \mathrm{const}, \tag{3}$$

$$\chi|_{\tau\to-\infty} \to 0, \quad \chi|_{\tau\to\infty} \to 1.$$

В случае а) решение задачи существует при любом $b \geqslant b_{\min} = 2\sqrt{F'(0)}$ [3], а в случае б) решение задачи (3) существует только при одном значении b [4]. В обоих случаях решения задачи (3) при заданном b единственны с точностью до сдвига.

При $\tau \to -\infty$ справедливо соотношение $\chi = O(\exp(l^-\tau))$, где $l^- = (b - \sqrt{b^2 - 4F'(0)})/2$, $b > b_{\min}$ в случае а) и $l^- = b$ в случае б). При $\tau \to \infty$ имеем $1 - \chi = O(\exp(-l^+\tau))$, $l^+ = (-b + \sqrt{b^2 - 4|F'(1)|})/2$. Асимптотическое решение u_N, удовлетворяющее условию $Lu_N = O(\varepsilon^N)$, вычисляется по формуле

$$u_N(x,t,\varepsilon)=\left[\chi(\tau)+\varepsilon\chi'_\tau(\tau)\int_0^\tau\frac{V}{(\chi'_\tau)^2},\int_a^{\tau'}\frac{f(t,\tau'')\,\chi'_\tau}{V}\,d\tau''d\tau'+\ldots\right]\Big|_{\tau=S/\varepsilon},\tag{4}$$

где V и $f(t,\tau)$ — вронскиан и правая часть уравнения в вариациях [5], $S=\beta(x+\varphi^0(t))+\varepsilon\beta\varphi^1(t)+\ldots,\quad \beta=(\gamma(-\varphi^0,t)/\lambda(-\varphi^0,t))^{1/2}$. Свойства решения (4) различны в случаях а) и б). В случае б) внутренний интеграл во втором слагаемом в (4) сходится при $\tau\to\pm\infty$, поэтому функция $u_N(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяет краевым условиям (2), если $a=-\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t,\tau)\,\chi'_\tau}{V}\,d\tau=0.\tag{5}$$

Последнее равенство есть уравнение для определения функции $\varphi^1(t)$. Аналогично, рассматривая невыписанные слагаемые в (4) из условий (2), получим уравнения, аналогичные (5), для $\varphi^i(t)$, $i>1$. Уравнение для $\varphi^0(t)$ есть следствие условия убывания производных решения по переменной t при $\tau\to\pm\infty$. В случае б) оно имеет вид $b=\varphi_t^0\beta/\gamma(-\varphi^0,t)$, где $b=\mathrm{const}$. Таким образом, краевые условия и условие $Lu_N=O(\varepsilon^N)$ приводят к уравнениям для всех входящих в (4) функций. В случае а) в силу оценки функции χ при $\tau\to-\infty$ внутренний интеграл во втором слагаемом в (4) расходится при $\tau\to-\infty$. Поэтому, полагая $a=\infty$, получим, что условия убывания второго (и следующих, невыписанных) слагаемого выполнено при любом выборе функции $\varphi^1(t)$ ($\varphi^i(t)$). Более того, условие ограниченности производных по t решения выполнено при условии $\varphi_t^0\beta/\gamma(-\varphi^0,t)=b(t)\in C^\infty$, $b(t)>b_{\min}$. Таким образом, в случае а) общее асимптотическое решение, удовлетворяющее краевым условиям и соотношению $Lu_N=O(\varepsilon^N)$ $\forall N>0$ имеет вид (4), где $\chi=\chi(\tau,t)$ — решение задачи (3) при $b=b(t)$ ($b(t)$ — любая гладкая функция), $b(t)>b_{\min}$. При этом положение фронта волны $x=-(\varphi^0+\varepsilon\varphi^1+\ldots)$ не определено. Ясно, что задавая начальное условие вида (4) (т. е. фиксируя $\varphi^i|_{t=0}$, $i=0,\ldots,N$) и продолжая функции $\varphi^i(t)$ при $t>0$ произвольно гладким образом (так, что $b(t)>b_{\min}$), мы получим множество решений задачи Коши. Неединственность решения исчезнет, если мы уточним понятие асимптотического решения. Именно, для построения мультипликативной асимптотики необходимо согласовать решение (4) с решениями линеаризованного в областях $x+\varphi^0>O(\varepsilon^{1-\delta})$, $x+\varphi^0<-O(\varepsilon^{1-\delta})$, $0<\delta<1/2$, уравнения (1). Из формулы (4) следует, что при $\tau\to\pm\infty$ сумма первых N слагаемых представима в виде

$$u_N^-(x,t,\varepsilon)=\left[\exp(l_\tau^-)\sum_{n=0}^N\varepsilon^nP_{2n}^-(t,\tau)\right](1+O(\exp(l^-\tau))\Big|_{\tau=s/\varepsilon},\quad\tau\to-\infty,$$

$$u_N^+(x,t,\varepsilon)=1-\left[\exp(-l^+\tau)\sum_{n=0}^N\varepsilon^nP_{2n}^+(t,\tau)\right]\tag{6}$$

$$(1+O(\exp(-l^+\tau))\Big|_{\tau=s/\varepsilon},\quad\tau\to+\infty,$$

$P_{2n}^\pm(t,\tau)$ — полиномы по τ степени $2n$ с коэффициентами из $C^\infty([0,T])$. Аналогично [1], справедлива

ТЕОРЕМА. а) *При* $c_1^+\varepsilon^{1-\gamma_1^+}\leqslant x+\varphi^0\leqslant c_2^+\varepsilon^{1-\gamma_2^+}$ *для любых* $0<\gamma_1^+<\gamma_2^+<1/2$, $c_1^+,c_2^+>0$ *справедливо равенство*

$$1-u_N(x,t,\varepsilon)=\exp\{Q_N^+(x+\varphi^0t,\varepsilon)/\varepsilon\}(1+O(\varepsilon^{N_1^+})).\tag{7}$$

б) *При* $-c_1^- \varepsilon^{1-\gamma_2^-} \leqslant x + \varphi^0 \leqslant -c_2^- \varepsilon^{1-\gamma_1^-}$ *для любых* $0 < \gamma_1^- < \gamma_2^- < 1/2$, $c_1^-, c_2^- > 0$ *справедливо равенство*

$$u_N(x, t, \varepsilon) = \exp\{Q_N^-(x + \varphi^0 t, \varepsilon)/\varepsilon\}(1 + O(\varepsilon^{N_1^-})), \tag{8}$$

где $Q_N^{\pm}(z, t, \varepsilon)$ — *полиномы степени* N *по* z *с коэффициентами, гладко зависящими от* t, ε, $Q_N^{\pm}(0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$, $N_1^{\pm} \to \infty$, *при* $N \to \infty$.

Положим $u_N^+ = 1 - u_N$ при $x + \varphi^0 \gg 1$, $u_N = u_N^-$ при $x + \varphi^0 \ll -1$. Тогда $u_N^{\pm} \to 0$ при $|\tau| \to \infty$ и линеаризованные уравнения для $u_N^{\pm}$ имеют вид

$$\varepsilon \frac{\partial u_N^{\pm}}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u_N^{\pm}}{\partial x}\right) - \gamma F'(\sigma_{\pm}) u_N^{\pm} = 0, \; \sigma_+ = 1, \; \sigma_- = 0. \tag{9}$$

Решения уравнений (9), зависящие от одной «быстрой» переменной $\Phi_N^{\pm}/\varepsilon$, $\Phi_N^{\pm} \geqslant 0$, имеют вид $u_N^{\pm} = \exp(-\Phi_N^{\pm}/\varepsilon)$, $\Phi_N^{\pm} = (\Phi_{\pm}^0 + \varepsilon\Phi_{\pm}^1 + \ldots)$, где функции $\Phi_{\pm}^0$ есть решения уравнений Гамильтона—Якоби. Сравнивая выражения для $u_N^{\pm}$ с (7) и (8), легко видеть, что полиномы $Q_N^{\pm}(x + \varphi^0 t, \varepsilon)$ есть отрезки рядов Тейлора для функций $\Phi_N^{\pm}$ при $x = -\varphi^0$. Отсюда в силу теоремы получаем краевые условия для функций $\Phi_{\pm}^0$, $\Phi_{\pm}^0 |_{x=-\varphi^0} = 0$. Уравнения Гамильтона — Якоби для функций $\Phi_{\pm}^0$ следующие: $\dfrac{\partial \Phi_{\pm}^0}{\partial t} + \lambda\left(\dfrac{\partial \Phi_{\pm}^0}{\partial x}\right)^2 + \gamma F'(\sigma_{\pm}) = 0$. Проекции траекторий системы Гамильтона в этом случае изображены на рис. 1, *а*), стрелками указано направление движения при возрастании t. Ясно, что за-

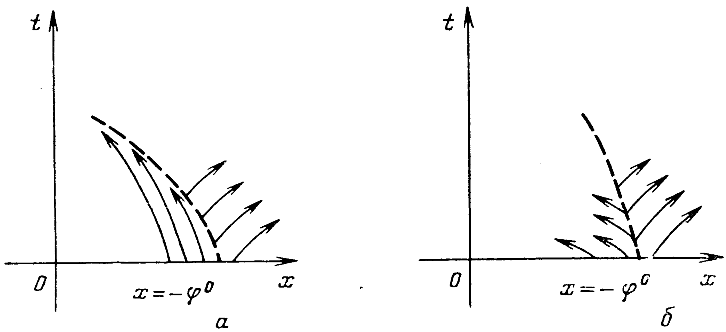

Рис. 1

дание начальных условий Φ_-^0 при $t = 0$ определяет положение множества (линии) нулей функции Φ_-^0 при $t > 0$, а начально-краевая задача для функции Φ_+^0 разрешима для любой заданной функции $\varphi^0(t)$. Таким образом, «главная» координата фронта волны $\varphi^0(t)$ определяется из уравнения $\Phi_-^0(-\varphi^0, t) = 0$, а начальное условие $\Phi_-^0|_{t=0}$ должно быть таким, чтобы

$$\varphi_t^0 \beta/\gamma(-\varphi^0, t) > b_{\min}.$$

В случае б) теорема остается справедливой, но проекции траекторий системы Гамильтона имеют вид, изображенный на рис. 1, *б*), и начальные данные для функций $\Phi^0_\pm$ не определяют функции φ^0, а решения $\Phi^0_\pm$ при $t > 0$ существуют при достаточно малых t для заданной функции $\varphi^0(t)$.

Московский институт электронного машиностроения

Поступило 11.01.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов В. Г. // Математические заметки. 1989. Т. 46, № 1. С. 115—117. 2. Маслов В. П. // ДАН СССР. 1981. Т. 261. С. 1059—1062. 3. Ushiyma K. // Math. Kyota Univ. 1978. V. 18. № 3. P. 453. 4. Канель Я. И. // Мат. сб. 1962. Т. 59. С. 245—288. 5. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ НА ПОЛУОСИ ПРИМЕСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М. С. Еремин

В [1] найдены достаточные условия того, чтобы спектральная функция уравнения Штурма—Лиувилля соответствовала ограниченному на полуоси потенциалу. В настоящей работе устанавливаются достаточные условия, чтобы спектральная функция уравнения

$$-y'' + [q(x) + r(x)]\, y = \lambda y \tag{1}$$

соответствовала ограниченному на полуоси примесному потенциалу $r(x)$. Функция $q(x)$ непрерывна на $[0, \infty)$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $\varphi_0(x, \lambda)$ — решения соответственно уравнения (1) и уравнения

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y, \tag{2}$$

удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(0, \lambda) = \varphi_0(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$, $\varphi_0'(0, \lambda) = h_0$; h, h_0 — действительные числа; $\rho(\lambda)$ и $\rho_0(\lambda)$ — спектральные функции, соответствующие этим решениям, причем: I) точки роста каждой из функций $\rho(\lambda)$ и $\rho_0(\lambda)$ имеют хотя бы одну конечную предельную точку; II) функция

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x, \lambda)\, \varphi_0(t, \lambda)\, \mathrm{d}\, [\rho(\lambda) - \rho_0(\lambda)] \tag{3}$$

является непрерывно дифференцируемой на множестве $0 \leqslant x,\ t < \infty$, а функции $F(x, x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, x)$, $\int_0^x |F(x, t)|^2\, \mathrm{d}t$, $\int_0^x |F_x'(x, t)|^2\, \mathrm{d}t$ ограничены на $[0, \infty)$: III) существует такое положительное число $\alpha < 1$ при котором $\omega(\lambda) = \rho(\lambda) + (\alpha - 1)\, \rho_0(\lambda)$ — неубывающая функция на оси $(-\infty, \infty)$. Покажем, что при этих условиях примесный потенциал $r(x)$ ограничен на полуоси $[0, \infty)$.

Полагая, что $\psi(x)$ — непрерывная функция на $[0, \infty)$, $b > 0$, $\chi_b(\lambda) = \int_0^b \psi(x)\, \varphi_0(x, \lambda)\, \mathrm{d}x$, из (3) и равенства Парсеваля получаем

$$\int_0^b \int_0^b F(x, t)\, \psi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_b(\lambda)|^2 \mathrm{d}\, [\rho(\lambda) - \rho_0(\lambda)],$$

$$\int_0^b |\psi(x)|^2\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_b(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho_0(\lambda).$$

