А.Б.Гулисашвили

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

Пусть A_1 и A_2 – функциональные пространства на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Функция f, определенная на $\mathbb{R}^n$, называется мультипликатором в паре (A_1, A_2), если

$$\| fg \|_{A_2} \leq c \| g \|_{A_1}$$

для всех $g \in A_1$, и постоянная c не зависит от g. Множество, состоящее из всевозможных мультипликаторов в паре (A_1, A_2), будет обозначаться через $M(A_1 \to A_2)$.

Свойства мультипликаторов в функциональных пространствах изучались во многих работах. Отметим [9] и, особенно, [3], где содержится обзор по теории мультипликаторов и обширная библиография. О мультипликаторах в пространствах Бесова можно прочесть в [II].

В этой работе нас интересуют условия, при которых характеристическая функция χ_E измеримого по Лебегу множества E, $E \subset \mathbb{R}^n$, является мультипликатором в паре пространств Бесова. Х.Трибель (см. [II], замечание 2 в главе 2.8.7) поставил вопрос, является ли характеристическая функция полупространства

$$\mathbb{R}^n_+ = \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0 \}$$

мультипликатором в пространстве Бесова с предельной гладкостью $B^{1/p}_{p\infty}$. В этой статье показано, что ответ на этот вопрос отрицателен. Более того, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4.I (см.§ 4 ниже). Функция $\chi_{\mathbb{R}^n_+}$ не принадлежит множеству $M(B^{1/p}_{pq} \to B^{1/p}_{p\infty})$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$.

Кроме того, в § 4 доказывается, что в случае $n = 1$ из $\chi_E \in M(B^{1/p}_{pq} \to B^{1/p}_{p\infty})$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ следует, что множество E тривиально (мы будем называть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ тривиальным, если $\mu_n E = 0$, либо $\mu_n(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$). По-видимому, такая теорема справедлива и в случае $n > 1$.

Совсем иначе обстоит дело со включением $\chi_E \in M(B^{1/p}_{p1} \to B^{1/p}_{p\infty})$. В этом случае $\chi_{\mathbb{R}^n_+} \in M(B^{1/p}_{p1} \to B^{1/p}_{p\infty})$, $1 < p < \infty$, и более того, автору удалось найти простое геометрическое условие на E, гарантирующее принадлежность χ_E множеству $M(B^{1/p}_{p1} \to B^{1/p}_{p\infty})$.

Оказалось, что важную роль в этой задаче играет теория множеств с конечным периметром (см. [2], [I2]). Справедлива

ТЕОРЕМА В. Для справедливости включения $\chi_E \in M(B^{1/p}_{p1} \to B^{1/p}_{p\infty})$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{H}_{n-1}((\mathcal{F}^*E) \cap B(x,r)) \leq c r^{n-1}, \; x \in R^n, \; 0<r<1 \qquad (I)$$

с постоянной c, не зависящей от x и r.

В формулировке теоремы В через $\mathcal{H}_{n-1}$ обозначена $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$, через $B(x,r)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом r, а через $\mathcal{F}^* E$ – приведенная граница E, иначе говоря, множество тех точек границы E, в которых существует аппроксимативная внешняя нормаль. Теорема В является частным случаем теоремы 3.I, доказываемой ниже.

Заметим, что различные аналоги условия (I) появлялись при изучении теорем вложения пространств гладких функций (см. [3]) и в теории сингулярных интегралов на спрямляемых кривых в $\mathbb{R}^2$. Как было показано Г.Давидом в [6], аналог условия (I) является необходимым и достаточным для того, чтобы сингулярный интегральный оператор на кривой Γ был ограничен в $L^p(\Gamma)$ при $1<p<\infty$.

I. Предварительные сведения

Через $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ обозначается n-мерное евклидово пространство с мерой Лебега μ_n, а через $\mathcal{H}_{n-1}$ – $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$.

Пространство Бесова B^s_{pq}, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < s < \infty$ (мы рассматриваем в этой работе только такие значения параметров) определяется следующим образом (см. [I], [4], [I0], [II]): пусть функция φ, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, такова, что I) $\operatorname{supp} \varphi = \{\xi : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$; 2) $\varphi(\xi) > 0$ при $2^{-1} < |\xi| < 2$; 3) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1$, $\xi \neq 0$. Обозначим через φ_k, $-\infty < k < \infty$, и ψ функции, определенные при помощи равенств

$$F\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi), -\infty<k<\infty, \quad F\psi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi), \qquad (2)$$

где F – преобразование Фурье. Тогда

$$B^s_{pq} \overset{def}{=} \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^s_{pq}} < \infty \},$$

где

$$\|f\|_{B^s_{pq}} = \begin{cases} \|\Psi * f\|_p + \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (2^{ks}\|\varphi_k * f\|_p)^q\right)^{1/q}, & q \neq \infty, \\ \|\Psi * f\|_p + \sup\limits_{k \geq 1} 2^{ks}\|\varphi_k * f\|_p, & q = \infty. \end{cases}$$

Пространства B^s_{pq} допускают эквивалентную нормировку в терминах группы сдвигов на $\mathbb{R}^n$. Нам понадобится только случай, когда $s<1$. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Модуль непрерывности f в $L^p(\mathbb{R}^n)$ определяется при помощи равенства

$$\omega_p(t, f) = \sup_{0<|h|\leq t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p, \quad 0 < t < \infty$$

Определим при $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < s < 1$ норму

$$\|f\|^{(1)}_{B^s_{pq}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left\{\int\limits_0^{\infty} [t^{-s}\omega_p(t,f)]^q \frac{dt}{t}\right\}^{1/q}, & q \neq \infty \\ \|f\|_p + \sup\limits_{t>0} t^{-s}\omega_p(t,f), & q = \infty \end{cases}$$

Известно, что

$$c_1\|f\|^{(1)}_{B^s_{pq}} \leq \|f\|_{B^s_{pq}} \leq c_2\|f\|^{(1)}_{B^s_{pq}} \tag{3}$$

с постоянными c_1, c_2, зависящими только от параметров (см. [I], [I0], [II]).

Как уже было отмечено, важную роль в настоящей работе играет теория множеств с конечным параметром (или множеств Каччиополи в честь автора определения). Подробные сведения об этой теории можно найти в [2] и [I2].

П е р и м е т р о м множества E из $\mathbb{R}^n$ называется величина

$$\operatorname{per} E = \inf \varliminf_{i\to\infty} \mathcal{H}_{n-1}(\partial M_i),$$

где $\inf$ берется по множеству всевозможных последовательностей $\{M_i\}$ множеств с гладкой границей (или полиэдров), таких, что $\|\chi_E - \chi_{M_i}\|_1 \longrightarrow 0$, $i \to \infty$. ✓

П р и в е д е н н о й г р а н и ц е й $\mathcal{F}^* E$ множества E называется множество всех точек границы E, в которых существует аппроксимативная внешняя нормаль (определение см. в [2] и

[I2]). Известно, что

$$\operatorname{per} E = \mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{F} * E)$$

(см. [2] , [I2]). Приведенная граница может не быть замкнутым множеством, но она всегда плотна в существенной границе E , равной пересечению границ всех множеств, совпадающих с E μ_n - почти всюду.

Пространство BV (функции с градиентом ограниченной вариации см. [2]) определяется как множество всех локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций f , у которых обобщенные первые производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ являются ограниченными борелевскими мерами. В случае $n=1$ получается обычное пространство функций с ограниченной вариацией. Мы будем рассматривать банахово пространство $L^1 \cap BV$. Нормой в этом пространстве будет сумма нормы в L^1 и полной вариации градиента функции.

Основным фактом в теории пространств BV является формула Кронрода-Федерера-Флеминга-Ришела (см. [2] , [3] , [7]). Эта формула такова:

$$\|f\|_{BV} = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{per}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}\, dt . \tag{4}$$

В частности, из (6) следует, что

$$\chi_E \in BV \Longleftrightarrow \operatorname{per} E < \infty . \tag{5}$$

Нам понадобятся еще неравенства из теории интерполяции линейных операторов. Они задают порядок K-функционала для пары $(L^p(\mathbb{R}^n), W_p^1(\mathbb{R}^n))$, где $W_p^1(-\mathbb{R}^n)$ - пространство Соболева (определение K-функционала и сведения по теории интерполяции можно найти в [I] , [5] , [I0]). Известно (см. [5] , стр.258), что при $1 \leq p < \infty$ справедливы неравенства

$$c_p'\{\omega_p(t,f) + \min(1,t)\|f\|_p\} \leq K(t,f,L^p,W_p^1) \leq c_p''\{\omega_p(t,f) + \min(1,t)\|f\|_p\} . \tag{6}$$

Наконец заметим, что через c ниже будут обозначаться некоторые положительные постоянные, возможно разные.

2. Обобщение на многомерный случай теорем Титчмарша и Харди-Литтлвуда

Пространство $Lip(1,1)$ на $\mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{Lip}(1,1) \overset{def}{=} \{ f : \|f\|_{\mathrm{Lip}(1,1)} = \|f\|_1 + \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(t,f) < \infty \}.$$

Теорема Титчмарша утверждает, что в случае $n=1$ из

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = O(h), \quad h \to 0$$

следует, что $f \equiv const$ п.в. на $[a,b]$ (см. [5]). Аналогичная теорема справедлива и в случае $n>1$.

ТЕОРЕМА 2.I. Если для какого-нибудь шара B, $B \subset \mathbb{R}^n$ и $f \in L^1$ имеем

$$\int_B |f(x+h) - f(x)|\,dx = O(|h|), \quad |h| \to 0,$$

то $f \equiv const$ п.в. на B .

Мы не приводим доказательства теоремы 2.I, ввиду полной аналогии с теоремой Титчмарша.

Харди и Литтлвудом было доказано, что в случае $n=1$ для того, чтобы было справедливо утверждение

$$\omega_1(t,f) = O(t), \quad t \to 0+,$$

необходимо и достаточно, чтобы функция f совпадала почти всюду с функцией ограниченной вариации (или, что эквивалентно, обобщенная производная f была бы ограниченной борелевской мерой) (см. [5]).

Ниже доказывается многомерный аналог этой теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Имеет место равенство

$$L^1 \cap BV = \mathrm{Lip}(1,1),$$

и для $f \in L^1$ справедливы оценки

$$c_1 \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(t,f) \le \|f\|_{BV} \le c_2 \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(t,f). \tag{7}$$

Из теоремы 2.2, используя (5), выводим такое

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu_n E < \infty$. Тогда

$$c_1 \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(t,f) \le per\, E \le c_2 \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(t,f). \quad \bullet$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть $f \in \mathrm{Lip}(1,1)$. Тогда из (6) при $p=1$ вытекает существование для любого $t>0$ разложения

$$f = f_t^{(1)} + f_t^{(2)}, \quad f_t^{(1)} \in L^1, \quad f_t^{(2)} \in W_1^1,$$

такого, что

$$\| f_t^{(1)} \|_1 + t \| f_t^{(2)} \|_{W_1^1} \leq c\{ \omega_1(t, f) + t \| f \|_1 \} .$$

Отсюда выводим, что

$$\| f - f_t^{(2)} \|_1 = \| f_t^{(1)} \|_1 \to 0, \ t \to 0; \| f_t^{(2)} \|_{W_1^1} \leq c \| f \|_{Lip(1,1)} ,$$

а из возможности такой аппроксимации следует, что $f \in BV$ (норма в BV полунепрерывна снизу) и что

$$\| f \|_{BV} \leq c \| f \|_{Lip(1,1)} \tag{8}$$

Обратно, если $f \in L^1 \cap BV$, то существуют $f_n \in W_1^1$, $n \geq 1$, такие, что $\| f_n \|_{W_1^1} \to \| f \| + \| f \|_{BV}$, $\| f - f_n \|_1 \to 0, n \to \infty$ (сглаживаем f). Из (6) следует неравенство

$$\omega_1(t, f) + \min(1, t) \| f \|_1 \leq c(\| f - f_n \|_1 + t \| f_n \|_{W_1^1}) . \tag{9}$$

Переходя в (9) к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$t^{-1} \omega_1(t, f) + t^{-1} \min(1, t) \| f \|_1 \leq c(\| f \|_1 + \| f \|_{BV}) .$$

Отсюда следует неравенство

$$\| f \|_{Lip(1,1)} \leq c(\| f \|_1 + \| f \|_{BV}) . \tag{10}$$

Теперь неравенство (7) получается из неравенств (8) и (10) из соображений однородности.

3. Мультипликаторы в случае предельной гладкости

Из теоремы Титчмарша и следствия 2.3 следует, что пространство $B_{p\infty}^{1/p}$ является предельным пространством в шкале пространств Бесова, содержащим нетривиальные характеристические функции.

Мы доказываем утверждение, содержащее теорему А.

ТЕОРЕМА 3.1. Для измеримого множества E из $\mathbb{R}^n$ следующие утверждения эквивалентны:

1) $\chi_E \in M(B_{p1}^{1/p} \to B_{p\infty}^{1/p})$ для какого-нибудь $p, 1 < p < \infty$;

2) $\chi_E \in M(B_{p1}^{1/p} \to B_{p\infty}^{1/p})$ для всех

3) $\chi_E \in M(Lip(1,1) \to Lip(1,1))$;

4) $\chi_E \in M(L^1 \cap BV \to L^1 \cap BV)$;

5) $\mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{F}^* E \cap B(x,r)) \leq c r^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < 1$;

6) $\operatorname{per}(E \cap B(x,r)) \leq c r^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < 1$;

7) $\operatorname{per}(E \cap A) \leq c(\mu_n A + \operatorname{per} A)$ для любого измеримого A, $A \subset \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 5)$\Longrightarrow$4) следует из [3], § I.2, где доказано, что если ν – некоторая мера на $\mathbb{R}^n$, то для справедливости неравенства

$$\int |u| \, d\nu \leq c \|u\|_{W_1^1}, \quad u \in C_0^\infty \tag{II}$$

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие $\nu(B(x,r)) \leq c r^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < 1$. Если записать (II) для меры $\nu A = \mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{F}^* E \cap A)$, то при помощи подходящей аппроксимации можно получить неравенство

$$\mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{F}^* E \cap A) \leq c(\mu_n A + \operatorname{per} A).$$

Далее, из того, что $\operatorname{per}(E \cap A) \leq \operatorname{per} A + \mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{F}^* E \cap A)$, следует 7), а из 7) при помощи (4) получаем 4).

Итак при доказательстве 5)$\Longrightarrow$4) было доказано, что 5)$\Longrightarrow$7), 7)$\Longrightarrow$4).

Несложно установить, что 7)$\Longrightarrow$6), 6)$\Longrightarrow$5), 2)$\Longrightarrow$I). Эквивалентность условий 3) и 4) следует из теоремы 2.2.

Докажем, что I)$\Longrightarrow$6). Предположим, что $\chi_E \in M(B_{p1}^{1/p} \to B_{p\infty}^{1/p})$. Для любых x, r, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < 4$ несложно построить функцию $\varphi_{x,r}$ такую, что a) $\varphi_{x,r} \in C_0^\infty$; в) $\varphi_{x,r}(y) = 1$ при $y \in B(x,r)$; c) $0 \leq \varphi_{x,r} \leq 1$; d) $\varphi_{x,r}(y) = 0$ при $y \in \mathbb{R}^n \setminus B(x,2r)$; e) $\|\varphi_{x,r}\|_{B_{p1}^{1/p}} \leq c r^{\frac{n-1}{p}}$ с постоянной c, не зависящей от x и r (достаточно построить такую функцию для $x=0$, $r=1$, а затем применить растяжение и сдвиг).

При помощи следствия 2.3 получаем оценку

$$\operatorname{per}(E \cap B(x, \tfrac{r}{4})) \leq c \sup_t t^{-1} \omega_1(t, \chi_{E \cap B(x,\frac{r}{4})}) \leq c \sup_{t < \frac{r}{4}} + c \sup_{t > \frac{r}{4}} = S_1 + S_2. \tag{I2}$$

Оценим S_1. Для этого используем условие I) теоремы и свойства функций $\varphi_{x,r}$. Получим оценку

$$S_1^{1/p} = c \sup_{t<r/4} t^{1/p} \sup_{|h|<t} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_E(u+h)\chi_{B(x,\frac{r}{4})}(x+h) - \chi_E(u)\chi_{B(x,\frac{r}{4})}(u) \right|^p du \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq c \sup_{t<\frac{r}{4}} t^{-1/p} \sup_{|h|<t} \left\{ \int_{B(x,\frac{r}{4})} |\chi_E(u+h) - \chi_E(u)|^p du \right\}^{1/p} - c \sup_t t^{-1/p} \sup_{|h|<t} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{B(x,\frac{r}{4})}(u+h) - \right.$$

$$\left. - \chi_{B(x,\frac{r}{4})}(u)|^p du \right\}^{1/p} \leq c \sup_{t<\frac{r}{4}} t^{-1/p} \sup_{|h|<t} \left\{ \int_{B(x,\frac{r}{4})} |\chi_E(u+h)\varphi_{x,r}(u+h) - \chi_E(u)\varphi_{x,r}(u)|^p du \right\}^{1/p} +$$

$$+ cr^{\frac{n-1}{p}} \leq c\left(\|\chi_E \varphi\|_{B^{1/p}_{p\infty}} + r^{\frac{n-1}{p}} \right) \leq c\left(\|\varphi\|_{B^{1/p}_{pr}} + r^{\frac{n-1}{p}} \right) \leq cr^{\frac{n-1}{p}} .$$

Итак, нами получена оценка

$$S_1 \leq cr^{n-1} . \tag{I3}$$

Оценим S_2. Имеем

$$S_2 \leq cr^{-1} \mu_n B\left(x, \frac{r}{4}\right) = cr^{n-1} . \tag{I4}$$

Согласно (I2),(I3) и (I4), справедливо неравенство

$$per(E \cap B(x, \tfrac{r}{4})) \leq cr^{n-1}, \quad 0<r<4, \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Отсюда следует, что I)$\Longrightarrow$6).

Осталось доказать, что 7) влечет 2). Это – самый сложный момент доказательства теоремы. Нам понадобятся две леммы. Первая дает оценку сверху для нормы пространства Бесова через меру и периметр сечений в духе теоремы Кронрода-Федерера-Флеминга-Ришела, а вторая – некоторую оценку снизу. Для простоты обе леммы формулируются и доказываются в случае, когда $f \geq 0$, хотя они верны и для функций произвольного знака.

ЛЕММА 3.2. а) При $1 \leq p < \infty$, $0 < s < \frac{1}{p}$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{B^s_{pp}} \leq c\|f\|_p + c\left\{ \int_0^\infty y^{p-1} \mu_n\{x : f(x) > y\}^{1-ps} per\{x : f(x) > y\}^{ps} dy \right\}^{1/p} . \tag{I5}$$

с постоянной c, зависящей только от p и s.

в) При $1 \leq p < \infty$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq c\|f\|_p + c\left\{\int_0^\infty y^{p-1} \operatorname{per}\{x : f(x) > y\}\, dy\right\}^{1/p} \qquad (16)$$

с постоянной c, зависящей только от p.

ЛЕММА 3.3. а) При $1 \leq p < \infty$, $0 < s < 1/p$ справедливо неравенство

$$\left\{\int_0^\infty y^{p-1} \mu_n\{x : f(x) > y\}^{1-ps} \operatorname{per}\{x : f(x) > y\}^{ps} dy\right\}^{1/p} \leq c\|f\|_p^{1-s}\|f\|^s_{W^1_p} \qquad (17)$$

с постоянной c, зависящей только от p и s.

в) При $1 \leq p < \infty$ справедливо неравенство

$$\left\{\int_0^\infty y^{p-1} \operatorname{per}\{x : f(x) > y\}\, dy\right\}^{1/p} \leq c\|f\|_p^{1-1/p}\|f\|^{1/p}_{W^1_p} \qquad (18)$$

с постоянной c, зависящей только от p.

Неравенства (15) и (17) приводятся ввиду их самостоятельного интереса и ниже использоваться не будут. Неравенство (15) было ранее доказано автором в [8], но более сложно, чем в настоящей работе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Несложно доказать, что

$$|f(x+h) - f(x)|^p \leq p\int_0^\infty y^{p-1} \left|\chi_{\{x : f(x) > y\}}(x+h) - \chi_{\{x : f(x) > y\}}(x)\right| dy,$$

$$\omega_p(t, f) \leq \left\{p\int_0^\infty y^{p-1} \omega_1(t, \chi_{\{x : f(x) > y\}})\, dy\right\}^{1/p}.$$

Отсюда и из (3) следует, что при $0 < s < 1/p$

$$\|f\|_{B^s_{pp}} \leq c\left\{\int_0^\infty y^{p-1} \|\chi_{\{x : f(x) > y\}}\|_{B^{ps}_{11}}\, dy\right\}^{1/p}. \qquad (19)$$

Аналогично доказывается, что

$$\|f\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq c\left\{\int_0^\infty y^{p-1} \|\chi_{\{x : f(x) > y\}}\|_{\mathrm{Lip}(1,1)}\, dy\right\}^{1/p}. \qquad (20)$$

Из следствия 2.3 выводим, что

$$\|\chi_{\{x : f(x) > y\}}\|_{B^{ps}_{11}} \leq c\left(\mu_n\{x : f(x) > y\} + \mu_n\{x : f(x) > y\}^{1-ps} \operatorname{per}\{x : f(x) > y\}^{ps}\right).$$

Последнее неравенство в совокупности с (I9) дает (I5), а следствие 2.3 в совокупности с (20) дает (I6). ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Заметим, что если $f \in W_p^1$, то $f^+ \in W_p^1$, $f^- \in W_p^1$ и $\|f^+\|_{W_p^1} + \|f^-\|_{W_p^1} \leq \|f\|_{W_p^1}$, где $f^+(x) = max(f(x), 0)$, $f^-(x) = max(-f(x), 0)$ (каждую функцию из W_p^1 можно изменить на множестве меры нуль так, что для почти всех сечений вдоль координатных осей полученная функция будет локально абсолютно непрерывной и обобщенная производная будет совпадать с обычной производной, существующей почти всюду. Справедливо и аналогичное обратное утверждение [4]. Ясно, что указанное выше свойство обобщенной производной сохраняется при переходе от f к f^+ и f^-). Следовательно, предположение $f \geq 0$ не ограничивает общности в лемме 3.3.

Неравенство (I8) при помощи (4) можно переписать так: $\|f^p\|_{BV}^{1/p} \leq c\|f\|_p^{1-1/p}\|f\|_{W_p^1}^{1/p}$, а последнее следует из неравенства Гельдера.

Для того, чтобы доказать (I7), применим неравенство Гельдера к левой части (I7) и используем (I8). Получим, что

$$\int_0^\infty y^{p-1}\mu_n\{x: f(x)>y\}^{1-p\delta} per\{x: f(x)>y\}^{p\delta} dy \leq \left\{\int_0^\infty y^{p-1}\mu_n\{x: f(x)>y\} dy\right\}^{1-p\delta} \times$$

$$\times \left\{\int_0^\infty y^{p-1} per\{x: f(x)>y\} dy\right\}^{p\delta} \leq c\|f\|_p^{p(1-p\delta)}\|f\|_p^{(p-1)p\delta}\|f\|_{W_p^1}^{p\delta} =$$

$$= c\|f\|_p^{p(1-\delta)}\|f\|_{W_p^1}^{p\delta}. \quad ●$$

Вернемся к доказательству теоремы 3.I. Напомним, что осталось доказать только 7)$\Longrightarrow$2). Предположим, что имеет место 7), и пусть f принадлежит $B_{p1}^{1/p}$ для какого-нибудь p, $1<p<\infty$. Для функций φ_k, $k \geq 1$, и Ψ, определенных при помощи (2), справедливы неравенства (см.лемму 6.2.I в [I])

$$\|f * \Psi\|_{W_p^1} \leq c\|f * \Psi\|_p, \tag{2I}$$

$$\|f * \varphi_k\|_{W_p^1} \leq c\, 2^k \|f * \varphi_k\|_p, \quad k \geq 1. \tag{22}$$

Из (I6),(I8) и (2I) для множества E, удовлетворяющего условию 7) теоремы 3.I выводим, что

$$\|\chi_E Re(f*\Psi)\|_{B_{p\infty}^{1/p}}^p \leq c\left\{\|\chi_E Re(f*\Psi)\|_p^p + \int_{-\infty}^\infty y^{p-1} per\{x: \chi_E(x) Re(f*\Psi)(x)>y\} dy\right\} \leq$$

$$\leq c\Big\{\|\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_p^p + \int_{-0}^{\infty} y^{p-1}\big[\mu_n\{x:\mathrm{Re}(f*\Psi)(x)>y\} + \mathrm{per}\{x:\mathrm{Re}(f*\Psi)(x)>y\}\big]dy +$$

$$+\int_0^{\infty} y^{p-1}\big[\mu_n\{x:\mathrm{Re}(f*\Psi)(x)<-y\} + \mathrm{per}\{x:\mathrm{Re}(f*\Psi)(x)<-y\}\big]dy\Big\} \leq$$

$$\leq c\Big\{\|\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_p^p + \|\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_p^{p-1}\,\|\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_{W_p^1}\Big\} \leq c\,\|\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_p^p .$$

Итак, мы доказали, что

$$\|\chi_E\,\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq c\,\|\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_p .$$

Аналогично при помощи (22) доказывается, что

$$\|\chi_E\,\mathrm{Re}(f*\varphi_k)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq c\,2^{k/p}\|\mathrm{Re}(f*\varphi_k)\|_p,\ k\geq 1;\ \|\chi_E\,\mathrm{Im}(f*\Psi)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq$$

$$\leq c\,\|\mathrm{Im}(f*\Psi)\|_p;\ \|\chi_E\,\mathrm{Im}(f*\varphi_k)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq c\,2^{k/p}\|\mathrm{Im}(f*\varphi_k)\|_p,\quad k\geq 1 .$$

Складывая четыре последних неравенства, получаем, что

$$\|\chi_E f\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq \|\chi_E\,\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} + \sum_{k\geq 1}\|\chi_E\,\mathrm{Re}(f*\varphi_k)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} +$$

$$+\|\chi_E\,\mathrm{Im}(f*\Psi)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} + \sum_{k\geq 1}\|\chi_E\,\mathrm{Im}(f*\varphi_k)\|_{B^{1/p}_{p\infty}} \leq c\Big\{\|\mathrm{Re}(f*\Psi)\|_p +$$

$$+\sum_{k\geq 1}2^{k/p}\|\mathrm{Re}(f*\varphi_k)\|_p + \|\mathrm{Im}(f*\Psi)\|_p + \sum_{k\geq 1}2^{k/p}\|\mathrm{Im}(f*\varphi_k)\|_p\Big\} \leq$$

$$\leq c\Big\{\|f*\Psi\|_p + \sum_{k\geq 1}2^{k/p}\|f*\varphi_k\|_p\Big\} \leq c\,\|f\|_{B^{1/p}_{p1}} . \quad \bullet$$

4. <u>Характеристическая функция полупространства не является мультипликатором в $B^{1/p}_{p\infty}$, $1<p<\infty$.</u>

Напомним, что полупространством в $\mathbb{R}^n$ называется множество $\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1,\dots,x_n) : x_1 \geq 0\}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Функция $\chi_{\mathbb{R}^n_+}$ не принадлежит множеству $M(B^{1/p}_{pq} \to B^{1/p}_{p\infty})$, $1<p<\infty$, $1<q\leq\infty$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $n=1$. Тогда из справедливости утверждения $\chi_E \in M(B^{1/p}_{pq} \to B^{1/p}_{p\infty})$ для каких-нибудь p,q, $1<p<\infty$,

$1<q\leq\infty$, следует что $\mu_1 E=0$ или $\mu_1(\mathbb{R}^1\setminus E)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Определим на $\mathbb{R}^1$ функцию

$$g(x)=\begin{cases}\log\log\dfrac{e}{|x|} & , \ |x|\leq 1 ,\\ 0 & , \ |x|>1 ,\end{cases}$$

где $\log$ обозначает натуральный логарифм, а e – его основание.

Докажем, что $g\in B^{1/p}_{pq}$, $1<p<\infty$, $1<q\leq\infty$. Пусть число h таково, что $0<h<1/2$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1}|g(x-h)-g(x)|^p dx=\int\limits_{1-h}^{-1}-\int\limits_{-1}^{-2h}-\int\limits_{-2h}^{h}-\int\limits_{h}^{1-h}-\int\limits_{1-h}^{1}=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5 . \quad (23)$$

Пусть $x\in(-1,-2h)$. По теореме Лагранжа

$$|g(x+h)-g(x)|=h|g'(\xi)|=h|\xi|^{-1}\log^{-1}\frac{e}{|\xi|}\leq 2h|x|^{-1}\log^{-1}\frac{e}{|x|} , \quad (24)$$

(в цепочке неравенств (24) $\xi\in(x,x+h)$, и использовано то, что $|x|-h<|\xi|<|x|$, $2^{-1}|x|<|\xi|<|x|$) .

Аналогично, при $x\in(h,1-h)$ имеем

$$|g(x+h)-g(x)|=h|g'(\xi)|=h\xi^{-1}\log^{-1}\frac{e}{\xi}\leq hx^{-1}\log\frac{e}{2x} . \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует, что

$$I_2+I_4\leq ch^p\Big(\int\limits_{-1}^{-2h}|x|^{-p}\log^{-p}\frac{e}{|x|}dx+\int\limits_{h}^{1-h}x^{-p}\log^{-p}\frac{e}{2x}dx\Big)\leq ch^p\Big(\int\limits_{2h}^{1}x^{-p}\log^{-p}\frac{e}{x}dx+$$

$$+\int\limits_{h}^{1-h}x^{-p}\log^{-p}\frac{e}{2x}dx\Big)\leq ch^p\int\limits_{2h}^{2-2h}x^{-p}\log^{-p}\frac{e}{x}dx\leq ch\log^{-p}\frac{1}{h} \text{ при малых } h. \quad (26)$$

Для оценки I_3 применим неравенство $\log(1+x)\leq x$. Имеем

$$I_3\leq c\int\limits_{-h}^{h}|g(u)-g(2h)|^p du\leq c\int\limits_{0}^{h}|g(u)-g(2h)|^p du=c\int\limits_{0}^{h}\log^p\frac{\log\frac{e}{u}}{\log\frac{e}{2h}}du\leq$$

$$\leq c\int\limits_{0}^{h}\log^p\frac{2h}{u}\log^{-p}\frac{e}{2h}du\leq ch\log^{-p}\frac{1}{h} \quad \text{при малых } h. \quad (27)$$

Наконец, вновь используя неравенство $\log(1+x)\leq x$, получаем

$$I_1 + I_5 \le c\int_{1-h}^{1} |g(x)|^p dx = c\int_{1-h}^{1} \left[\log\log\frac{e}{x}\right]^p dx \le c\left[\log\log\frac{e}{1-h}\right]^p h \le$$

$$\le c\left(\log\frac{e}{1-h} - 1\right)^p h \le ch\log^p\frac{1}{1-h} \le ch^{p+1}(1-h)^{-p} \le ch^{p+1} \qquad (28)$$

при малых h.

Из (23),(26),(27) и (28) получаем, что

$$\omega_p(t, g) \le ct^{1/p}\log^{-1}\frac{1}{t}, \quad 0<t<t_0,$$

а отсюда следует, что

$$g \in B^{1/p}_{pq}, \quad 1<p<\infty, \ 1<q\le\infty.$$

Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ функция $g^{(\varepsilon)}(x) = g(\varepsilon^{-1}x)$ принадлежит $B^{1/p}_{pq}$, $1<p<\infty$, $1<q\le\infty$, и что $\operatorname{supp} g^{(\varepsilon)} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Пусть теперь $\chi_E \in M(B^{1/p}_{pq} \to B^{1/p}_{p\infty})$. Тогда $\chi_E \in M(B^{1/p}_{p1} \to B^{1/p}_{p\infty})$ и по теореме 3.I для любого конечного интервала Δ множество $\Delta \cap E$ имеет конечный периметр. Отсюда следует что $\chi_{\Delta\cap E}$ совпадает почти всюду с функцией ограниченной вариации (теорема Харди-Литтлвуда, § 2). Значит, если E - нетривиальное множество, то существует $x_0 \in \mathbb{R}^1$ и $\varepsilon > 0$, такие, что один из интервалов $(x_0-\varepsilon, x_0)$, $(x_0, x_0+\varepsilon)$ почти весь принадлежит E, а другой - $\mathbb{R}^1 \setminus E$.

Предположим для определенности, что $(x_0, x_0+\varepsilon) \subset E$, $(x_0-\varepsilon, x_0) \subset \mathbb{R}^1 \setminus E$. Рассмотрим функцию

$$g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x) = g^{(\varepsilon)}(x - x_0), \ x \in \mathbb{R}^1.$$

Ясно, что

$$g^{(\varepsilon)}_{x_0} \in B^{1/p}_{pq}, \ 1<p<\infty, \ 1<q\le\infty. \qquad (29)$$

С другой стороны,

$$\chi_E(x)\, g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x) = \chi_{(x_0, x_0+\varepsilon)}(x)\, g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x), \ x \in \mathbb{R}^1.$$

При $-\varepsilon < h < 0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^1} |\chi_E(x+h) g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x+h) - \chi_E(x) g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x)|^p dx \ge \int_{x_0}^{x_0+|h|} |\chi_{(x_0, x_0+\varepsilon)}(x+h) g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x+h) -$$

$$-\chi_{(x_0,x_0+\varepsilon)}(x)g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x)\Big|^p dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+|h|} \Big|g^{(\varepsilon)}_{x_0}(x)\Big|^p dx \geq \Big[\log\log\frac{e}{\varepsilon|h|}\Big]^p h . \tag{30}$$

Из (30) следует, что

$$\chi_E\, g^{(\varepsilon)}_{x_0} \notin B^{1/p}_{p\infty} . \tag{31}$$

Поскольку (29) и (31) противоречат тому, что $\chi_E \in M(B^{1/p}_{pq} \to B^{1/p}_{p\infty})$, получаем, что E тривиально. ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Рассмотрим такую функцию на $\mathbb{R}^n$

$$h(x) = h(x_1,\dots,x_n) = g(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n) ,$$

где g – функция, построенная при доказательстве теоремы 4.2, а φ_i, $2 \leq i \leq n$, – какие-нибудь функции, принадлежащие всем $B^{1/p}_{pq}$, $1<p<\infty$, $1<q\leq\infty$. Несложно доказать, рассматривая модули непрерывности вдоль координатных осей, что

$$h \in B^{1/p}_{pq} , \quad 1<p<\infty , \quad 1<q\leq\infty .$$

С другой стороны, как следует из рассуждений в доказательстве теоремы 4.2,

$$\chi_{\mathbb{R}^n_+}\, h \notin B^{1/p}_{p\infty} .$$

Значит, $\chi_{\mathbb{R}^n_+} \notin M(B^{1/p}_{pq} \to B^{1/p}_{p\infty})$. ●

Литература

1. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. М., 1980.
2. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. Л., 1980.
3. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Теория мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций. – УМН, 1983, 38, № 3, 23–86.
4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
5. Butzer P.L., Berens H. Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.

6. D a v i d G. L'intégrale de Cauchy sur les courbes rectifiables. - Prépublication Orsay. 1982, 05, N 527.
7. F l e m i n g W.H., R i s h e l R.W. An integral formula for total gradient variation. - Arch.Math., 1960, 11, N 3, 218-222.
8. G u l i s a s h v i l i A.B. Estimates for the Pettis integral in interpolation spaces with some applications. - Banach space theory and its applications, Proc.1st Romanian-GDR seminar. Bucharest 1981. Lect.Notes Math.1983, N 991.
9. S t r i c h a r t z R.S. Multipliers on fractional Sobolev spaces. - J.Math.Mech., 1967, 16, 1031-1060.
10. Т р и б е л ь Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М., 1980.
11. T r i e b e l H. Theory of Function Spaces. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1983.
12. T r i s c a r i D. Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima. - Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa, sci.Fiz. e Math., 1963, Ser.III, XVII, N 4, 349-371.

A.B.Gulisashvili. Multipliers on Besov spaces.

Summary

It is proved that the characteristic function of a half-space $\mathbb{R}^n_+$ is not a multiplier for the pair $(B^{1/p}_{pq}, B^{1/p}_{p\infty})$, $1<p<\infty$, $1<q\leq\infty$. A necessary and sufficient condition is given for χ_E to belong to $M(B^{1/p}_{p1} \longrightarrow B^{1/p}_{p\infty})$.