Т. А. Суслина, Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в ограниченной области в случае постоянной магнитной проницаемости, *Алгебра и анализ*, 2018, том 30, выпуск 3, 169–209

Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №3

Светлой памяти Михаила Захаровича Соломяка

УСРЕДНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

© Т. А. СУСЛИНА

В ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ класса $C^{1,1}$ рассматривается стационарная система Максвелла при условиях идеальной проводимости на границе. Предполагается, что магнитная проницаемость задана постоянной положительной (3×3)-матрицей μ_0, а диэлектрическая проницаемость имеет вид $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\eta(\mathbf{x})$ — вещественная (3×3)-матрица-функция, периодическая относительно некоторой решетки, ограниченная и положительно определенная. Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Считается, что уравнение, содержащее ротор магнитной напряженности, однородно, а правая часть $\mathbf{r}$ второго уравнения — соленоидальная вектор-функция класса L_2. Известно, что при $\varepsilon \to 0$ решения системы Максвелла — электрическая напряженность $\mathbf{u}_\varepsilon$, электрическая индукция $\mathbf{w}_\varepsilon$, магнитная напряженность $\mathbf{v}_\varepsilon$ и магнитная индукция $\mathbf{z}_\varepsilon$ слабо сходятся в L_2 к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$ (решениям усредненной системы Максвелла с эффективными коэффициентами). Мы усиливаем классические результаты. Показано, что поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ сходятся к $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$ соответственно по норме в L_2, причем погрешности оцениваются через $C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2}$. Для полей $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ получены также аппроксимации по энергетической норме с точностью $C\sqrt{\varepsilon}\|\mathbf{r}\|_{L_2}$. Для $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{w}_\varepsilon$ найдены аппроксимации по норме в L_2 с погрешностями $C\sqrt{\varepsilon}\|\mathbf{r}\|_{L_2}$.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов. Литература по теории усреднения

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, оператор Максвелла, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект № 17-11-01069).

обширна; мы ограничимся упоминанием монографий [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO].

0.1. Операторные оценки погрешности. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

В серии статей [BSu1, BSu2, BSu3] Бирмана и Суслиной был предложен и развит теоретико-операторный подход к теории усреднения. Изучался широкий класс матричных сильно эллиптических операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{0.1}$$

Здесь матрица-функция $g(\mathbf{x})$ ограничена, положительно определена и периодична относительно решетки Γ, а $b(\mathbf{D})$ — матричный оператор первого порядка вида $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, причем его символ имеет максимальный ранг. Простейший пример оператора (0.1) — это скалярный эллиптический оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} \text{ (оператор акустики)}.$$

Оператор упругости также допускает запись в виде (0.1). В электродинамике возникает вспомогательный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = \operatorname{rot} a^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{rot} - \nabla \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{div}$, который можно записать в форме (0.1).

В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной матрицей*. Справедлива оценка погрешности

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В [BSu3] была найдена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon)$ — так называемый *корректор*. Он содержит быстро осциллирующий множитель, а потому зависит от ε; при этом

$$\|\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2 \to H^1} = O(\varepsilon^{-1}).$$

Оценки (0.2), (0.3) точны по порядку. Результаты такого типа получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Другой подход к операторным оценкам погрешности — модифицированный метод первого приближения или метод сдвига — был предложен Жиковым. В работах [Zh, ZhPas1] этим методом оценки (0.2), (0.3) были установлены для операторов акустики и упругости. Дальнейшие результаты обсуждаются в недавнем обзоре [ZhPas2].

Операторные оценки погрешности изучались также и для краевых задач в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей; см. [ZhPas1, ZhPas2, Gr1, Gr2, KeLiS, PSu, Su3, Su4, Su5]. Пусть $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ — операторы в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, заданные выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условиях Дирихле либо Неймана на границе. Пусть A_D^0 и A_N^0 — соответствующие эффективные операторы. Справедливы оценки

$$\|(A_{\flat,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_\flat^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon, \tag{0.4}$$

$$\|(A_{\flat,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_\flat^0+I)^{-1}-\varepsilon K_\flat(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{0.5}$$

Здесь $\flat = D, N$, а $K_\flat(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. Оценка (0.4) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$ (такой же, как для задачи в $\mathbb{R}^d$). Порядок оценки (0.5) хуже по сравнению с (0.3); это объясняется влиянием границы области.

В [ZhPas1] с помощью метода сдвига для операторов акустики и упругости была получена оценка (0.5) и аналог оценки (0.4), но с погрешностью $O(\sqrt{\varepsilon})$. Аналогичные результаты независимо были установлены Гризо [Gr1, Gr2] для оператора акустики с помощью метода анфолдинга. Оценка точного порядка (0.4) впервые была получена в [Gr2]. Случай матричных эллиптических операторов изучался в [KeLiS] (где рассматривались равномерно эллиптические операторы при некоторых условиях регулярности коэффициентов) и в работах [PSu, Su3, Su4, Su5] (где были получены оценки (0.4), (0.5) для описанного выше класса сильно эллиптических операторов).

0.2. Усреднение системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$. Обсудим теперь задачу об усреднении стационарной системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$.

Предположим, что диэлектрическая и магнитная проницаемости заданы матрицами-функциями $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu^\varepsilon(\mathbf{x})$, где $\eta(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ ограничены, положительно определены и периодичны относительно решетки Γ. Через $J(\mathbb{R}^3)$ обозначим подпространство вектор-функций $\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, для которых $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$ (в смысле распределений). Через $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим напряженности электрического и магнитного полей; $\mathbf{w}_\varepsilon = \eta^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mu^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon$ — векторы электрической и магнитной индукций. Оператор Максвелла $\mathcal{M}_\varepsilon$ мы записываем в терминах индукций, считая поля $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ соленоидальными. Тогда оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ действует в пространстве $J(\mathbb{R}^3) \oplus J(\mathbb{R}^3)$

и задается выражением

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1} \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на естественной области определения. Оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ самосопряжен, если рассматривать $J(\mathbb{R}^3) \oplus J(\mathbb{R}^3)$ как подпространство в весовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; (\eta^\varepsilon)^{-1}) \oplus L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; (\mu^\varepsilon)^{-1})$. Точка $\lambda = i$ является регулярной точкой для оператора $\mathcal{M}_\varepsilon$.

Обсудим задачу о поведении резольвенты $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$ при малом ε. Иначе говоря, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ системы Максвелла

$$(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{r} \in J(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \tag{0.6}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$.

Усредненный оператор Максвелла $\mathcal{M}^0$ имеет коэффициенты η^0, μ^0; хорошо известно, что эффективные матрицы η^0 и μ^0 — такие же, как для скалярных эллиптических операторов $-\mathrm{div}\,\eta^\varepsilon\nabla$ и $-\mathrm{div}\,\mu^\varepsilon\nabla$. Пусть $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ — решение усредненной системы Максвелла

$$(\mathcal{M}^0 - iI)\begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix},$$

и $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = (\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0$. Из классических результатов (см., например, [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO]) известно, что при $\varepsilon \to 0$ вектор-функции $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ *слабо сходятся* в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$.

Операторные оценки погрешности для системы Максвелла (0.6) изучались в работах [BSu1, глава 7], [BSu2, §14], [BSu3, §22], [Su1, BSu4] и [Su2]. В [BSu1, BSu2, BSu3] рассматривался случай $\mu = \mathbf{1}$ и были получены аппроксимации не для всех физических полей; в [Su1] рассматривался общий случай, но аппроксимации были найдены не для всех полей; в [BSu4] задача была полностью решена в случае постоянной магнитной проницаемости; наконец, в [Su2] задача была полностью решена в общем случае. Метод состоял в редукции к задаче усреднения для вспомогательного уравнения второго порядка. Решение системы (0.6) можно записать в виде $\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, где $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})$ — решение системы при $\mathbf{r} = 0$, а $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$ — решение системы при $\mathbf{q} = 0$. Рассмотрим для примера $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$. Первое уравнение $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ подставим во второе и придем к следующей задаче для поля $\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$:

$$\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = 0.$$

После замены $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ и снятия условия соленоидальности, получаем, что $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ является решением эллиптического уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}_\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{r}, \tag{0.7}$$

где

$$\mathcal{L}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2} - (\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}. \tag{0.8}$$

При этом поле $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ выражается через производные решения:

$$\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}.$$

В случае постоянного μ оператор (0.8) относится к классу операторов (0.1), что позволяет применить к уравнению (0.7) общие результаты работ [BSu1, BSu2, BSu3]. В случае переменного μ это уже не так, однако удается воспользоваться результатами абстрактной схемы из [BSu1, BSu2, BSu3] для изучения оператора (0.8); это было проделано в [Su1, Su2]. Итогом этих рассмотрений явилась аппроксимация резольвенты $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$. В отличие от резольвенты оператора (0.1) эта резольвента не имеет предела по операторной норме, но для нее можно указать аппроксимацию через сумму резольвенты $(\mathcal{M}^0 - iI)^{-1}$ и некоторого корректора нулевого порядка (слабо сходящегося к нулю); оценка погрешности имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. В терминах решений это влечет аппроксимации для всех физических полей по норме в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ с оценками погрешностей порядка $O(\varepsilon)$. К примеру, выпишем результат для $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\varepsilon(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}).$$

Здесь поправка $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ интерпретируется как корректор нулевого порядка; она выражается через $\mathbf{u}_0$, решение некоторой “поправочной” системы Максвелла и некоторый быстро осциллирующий множитель. При этом слабый предел поправки $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ равен нулю.

0.3. Постановка задачи. Основные результаты. В настоящей работе изучается усреднение стационарной системы Максвелла в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ с границей класса $C^{1,1}$. Мы опираемся на общую теорию оператора Максвелла в произвольных областях, развитую в работах [BS1, BS2] Бирмана и Соломяка.

Предположим, что магнитная проницаемость задана постоянной положительной матрицей μ_0, а диэлектрическая проницаемость — быстро осциллирующей матрицей $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$. На границе ставятся условия идеальной проводимости. Для физических полей используются те же обозначения, что и выше в п. 0.2. Оператор Максвелла M_ε, записанный в терминах индукций, действует в пространстве $J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O})$, где $J(\mathcal{O})$ и $J_0(\mathcal{O})$

— соленоидальные подпространства в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, определенные ниже в (5.1), (5.2). Оператор M_ε задается выражением

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1} \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на естественной области определения, учитывающей краевые условия (см. (5.4) ниже). Оператор M_ε самосопряжен, если рассматривать $J(\mathcal{O})\oplus J_0(\mathcal{O})$ как подпространство в весовом пространстве

$$L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\eta^\varepsilon)^{-1}) \oplus L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;\mu_0^{-1}).$$

Мы изучаем резольвенту $(M_\varepsilon - iI)^{-1}$. Иными словами, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ системы Максвелла

$$(M_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}\in J(\mathcal{O}),\ \mathbf{r}\in J_0(\mathcal{O}), \tag{0.9}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$.

Пусть M^0 — усредненный оператор Максвелла с коэффициентами η^0, μ_0. Усредненная система Максвелла имеет вид

$$(M^0 - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix}.$$

Положим $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_0$. Как и в случае задачи в $\mathbb{R}^3$, классические результаты (см. [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO]) дают слабую сходимость в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ вектор-функций $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$.

Мы усиливаем классические результаты в случае $\mathbf{q} = 0$. Опишем наши основные результаты. При $\mathbf{q} = 0$ поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ сходятся по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ к $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$, причем имеют место оценки погрешностей точного порядка:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Помимо этого, мы находим аппроксимации для $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$:

$$\big\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}\big\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\big\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0 - \varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon^{(1)}\big\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь корректоры $\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}$ и $\mathbf{z}_\varepsilon^{(1)}$ содержат быстро осциллирующие множители, их нормы в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$. Наконец, мы получаем аппроксимации для полей $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{w}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$:

$$\big\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\big\|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\varepsilon^{(1)}\big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Поправки $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ и $\mathbf{w}_\varepsilon^{(1)}$ могут быть интерпретированы как корректоры нулевого порядка, их слабый предел равен нулю.

Случай системы (0.9) при $\mathbf{r} = 0$ сложнее и не рассматривается в настоящей работе.

0.4. Метод. Как и в случае задачи в $\mathbb{R}^3$, метод исследования основан на редукции к изучению вспомогательного оператора L_ε второго порядка. Сначала мы изучаем усреднение этого оператора, а потом уже извлекаем результаты для системы Максвелла.

Оператор L_ε действует в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ и формально задается выражением

$$L_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\nu^\varepsilon(\mathbf{x})\operatorname{div}\mu_0^{1/2} \tag{0.10}$$

при граничных условиях

$$(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}))_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{0.11}$$

Строгое определение оператора L_ε дается через квадратичную форму. Для применения к системе Максвелла было бы достаточно считать $\nu(\mathbf{x}) = 1$, но для большей общности мы изучаем оператор (0.10) с переменным коэффициентом $\nu^\varepsilon(\mathbf{x})$. Оператор L_ε допускает запись в факторизованном виде $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, однако прямая ссылка на результаты работ [PSu, Su3, Su4] невозможна, поскольку в этих работах изучались случаи краевых условий Дирихле либо Неймана, а в рассматриваемом сейчас случае краевые условия (0.11) имеют смешанный тип. Поэтому нам необходимо установить аналоги оценок (0.4), (0.5) для резольвенты оператора L_ε.

Метод получения таких оценок основан на рассмотрении ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^3$, использовании готовых результатов в $\mathbb{R}^3$, введении поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ типа пограничного слоя и на тщательном анализе этой поправки. Существенную роль играют использование сглаживания по Стеклову (первоначально заимствованное из [Zh, ZhPas1]), оценки в ε-окрестности границы и соображения двойственности.

0.5. План статьи. Работа содержит пять параграфов. В §1 рассматривается модельный оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$; построен эффективный оператор и приведены известные результаты об аппроксимации резольвенты $(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1}$. В §2 вводится модельный оператор L_ε в

$L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, описывается эффективный оператор и приводятся вспомогательные утверждения (об оценках в ε-окрестности границы). В §3 сформулированы основные результаты об аппроксимации резольвенты $(L_\varepsilon + I)^{-1}$ и проведены первые два этапа доказательств: рассмотрена ассоциированная задача в $\mathbb{R}^3$, введена поправка $\mathbf{s}_\varepsilon$ типа пограничного слоя, доказательство основных теорем сведено к получению оценок норм поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ в пространствах $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ и $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. В §4 получены требуемые оценки норм поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ и завершено доказательство теорем из §3. §5 посвящен усреднению стационарной системы Максвелла при $\mathbf{q} = 0$. Проведена редукция задачи к вопросу о поведении резольвенты оператора L_ε. Получен итоговый результат об аппроксимации решений системы Максвелла (теорема 5.3).

0.6. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\,\cdot\,\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\,\cdot\,\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Символы $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и $|\,\cdot\,|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(n\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как линейного оператора в $\mathbb{C}^n$. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, D_2, D_3)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками).

0.7. Более общей задаче об усреднении стационарной системы Максвелла в ограниченной области в случае, когда обе проницаемости заданы быстро осциллирующими периодическими матрицами-функциями, автор планирует посвятить отдельную статью. Задача (0.9) при $\mathbf{r} = 0$ (оставшаяся не рассмотренной в настоящей работе) окажется частным случаем этой общей задачи.

Автор выражает благодарность Н. Д. Филонову за консультацию по поводу свойств оператора Максвелла и полезные замечания.

§1. Модельный оператор второго порядка в $\mathbb{R}^3$

1.1. Решетка. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, т.е.,

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{a} = z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + z_3\mathbf{a}_3, \ z_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Через $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ обозначим элементарную ячейку решетки Γ:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + t_3\mathbf{a}_3, \ -1/2 < t_j < 1/2 \right\}.$$

Для Γ-периодических функций $f(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^3$ будем пользоваться обозначением $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Для квадратных периодических матриц-функций $f(\mathbf{x})$ обозначаем

$$\overline{f} := |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{f} := \Big(|\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega f(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \Big)^{-1}.$$

При определении $\overline{f}$ считается, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, а при определении $\underline{f}$ предполагается, что матрица $f(\mathbf{x})$ неособая и $f^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^3$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^n)$.

1.2. Сглаживание по Стеклову. Нам понадобится оператор $S_\varepsilon^{(k)}$, $\varepsilon > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k), \tag{1.1}$$

называемый *сглаживающим оператором по Стеклову.* Мы опускаем индекс k и пишем просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^\sigma(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ и любом мультииндексе α, таком что $|\alpha| \leqslant \sigma$. Заметим, что

$$\| S_\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Нам понадобятся следующие свойства оператора S_ε (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] и [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ *выполнено*

$$\| S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon r_1 \| \mathbf{D}\mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$.

Предложение 1.2. *Пусть f — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^3$, причем $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $[f^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $f^\varepsilon(\mathbf{x})$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^3)$ и справедлива оценка*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3. Определение оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Пусть μ_0 — симметричная положительная (3×3)-матрица с вещественными элементами. Пусть симметричная (3×3)-матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ с вещественными элементами и вещественная функция $\nu(\mathbf{x})$ периодичны относительно решетки Γ, причем

$$\eta, \eta^{-1} \in L_\infty, \quad \eta(\mathbf{x}) > 0; \quad \nu, \nu^{-1} \in L_\infty, \quad \nu(\mathbf{x}) > 0. \tag{1.3}$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\nu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}. \tag{1.4}$$

Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ принадлежит классу операторов, представимых в факторизованном виде (0.1), т.е., $\mathcal{L}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Этот класс изучался в работах [BSu1, BSu2, BSu3]. В нашем случае $g(\mathbf{x})$ — (4×4)-матрица-функция, а $b(\mathbf{D})$ — (4×3)-матричный дифференциальный оператор первого порядка. А именно,

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} -i\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} \\ -i\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{x})^{-1} & 0 \\ 0 & \nu(\mathbf{x})\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует, что матрица $g(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена. Очевидно,

$$\|g\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}; \|\nu\|_{L_\infty}\right\}, \quad \|g^{-1}\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\eta\|_{L_\infty}; \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}\right\}.$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ можно записать в виде $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^3 b_j D_j$, где b_j — постоянные матрицы. Символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^3 b_j\xi_j$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет вид

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} r(\boldsymbol{\xi})\mu_0^{-1/2} \\ \boldsymbol{\xi}^t\mu_0^{1/2}\end{pmatrix}, \quad r(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^t = \begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{pmatrix}.$$

Выполнено условие

$$\mathrm{rank}\, b(\boldsymbol{\xi}) = 3, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.6}$$

Это условие равносильно оценкам

$$\alpha_0\mathbf{1}_3 \leqslant b(\boldsymbol{\xi})^* b(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \alpha_1\mathbf{1}_3, \quad |\boldsymbol{\xi}| = 1, \tag{1.7}$$

с положительными постоянными α_0, α_1. Легко убедиться в справедливости этих оценок с постоянными

$$\alpha_0 = \min\left\{|\mu_0|^{-1}; |\mu_0^{-1}|^{-1}\right\}, \quad \alpha_1 = |\mu_0| + |\mu_0^{-1}|.$$

Строгое определение оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] &:= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\rangle \, d\mathbf{x} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\langle (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}), \operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\rangle + \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) |\operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})|^2 \Big) \, d\mathbf{x}, \\ &\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3). \end{aligned}$$

При наших предположениях справедливы двусторонние оценки

$$\begin{gathered} c_1 \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{l}_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] \leqslant c_2 \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3), \\ c_1 = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_2 = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{l}_\varepsilon$ замкнута и неотрицательна. Порожденный ею самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ мы и обозначаем через $\mathcal{L}_\varepsilon$.

1.4. Эффективный оператор $\mathcal{L}^0$. В соответствии с общими правилами строится *эффективный оператор*

$$\mathcal{L}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{1.9}$$

где g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной.* Она определяется через решение вспомогательной задачи на ячейке Ω. Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — (3×4)-матрица, являющаяся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}) = 0, \quad \int\limits_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.10}$$

Тогда

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}). \tag{1.11}$$

Отметим сразу, что легко проверяется оценка

$$\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda |\Omega|^{1/2}, \tag{1.12}$$

где постоянная $\mathfrak{C}_\Lambda$ зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметров решетки Γ.

Эффективный оператор для $\mathcal{L}_\varepsilon$ был построен в [BSu1, глава 7] в случае $\mu_0 = \mathbf{1}$ и в [BSu4] в общем случае. Для полноты изложения мы повторяем соответствующие построения.

Найдем матрицу $\Lambda(\mathbf{x})$. Пусть $\mathbf{e}_j$, $j = 1,2,3,4$, — стандартные орты в $\mathbb{C}^4$ и $\widetilde{\mathbf{e}}_j$, $j = 1,2,3$, — стандартные орты в $\mathbb{C}^3$. Вектору $\mathbf{C} = \sum_{j=1}^4 C_j\mathbf{e}_j \in \mathbb{C}^4$ сопоставим вектор $\widetilde{\mathbf{C}} = \sum_{j=1}^3 C_j\widetilde{\mathbf{e}}_j \in \mathbb{C}^3$. Вектор-функция $\mathbf{v} = \Lambda\mathbf{C} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ является решением уравнения $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}) = 0$, которое сейчас принимает вид

$$\mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta(\mathbf{x}))^{-1}\left(\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}) + i\widetilde{\mathbf{C}}\right) - \mu_0^{1/2}\nabla\nu(\mathbf{x})\left(\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4\right) = 0.$$

Иначе говоря, $\mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega \left\langle(\eta(\mathbf{x}))^{-1}(\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}) + i\widetilde{\mathbf{C}}), \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{z})\right\rangle d\mathbf{x} \\ &\quad + \int\limits_\Omega \nu(\mathbf{x})\left(\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4\right)\overline{\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{z})}\,d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{z} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Используя разложение $\mu_0^{-1/2}\mathbf{z} = \mathbf{f} + \nabla h$, где $\mathbf{f} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\mathrm{div}\,(\mu_0\mathbf{f}) = 0$ (разложение Вейля), запишем тождество (1.13) при $\mathbf{z} = \mu_0^{1/2}\mathbf{f}$. Тогда второе слагаемое в (1.13) обратится в ноль. Учитывая, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{f} = \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{z})$, приходим к тождеству

$$\int\limits_\Omega \left\langle(\eta(\mathbf{x}))^{-1}\big(\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}) + i\widetilde{\mathbf{C}}\big),\ \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{z})\right\rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3). \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что

$$(\eta(\mathbf{x}))^{-1}\big(\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}(\mathbf{x})) + i\widetilde{\mathbf{C}}\big) = i\big(\nabla\Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{c}\big)$$

при некоторых $\Phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^3$. Следовательно,

$$\mathrm{rot}\,\big(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}(\mathbf{x})\big) + i\widetilde{\mathbf{C}} = i\eta(\mathbf{x})\big(\nabla\Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{c}\big). \tag{1.15}$$

Из (1.15) вытекает, что

$$\int\limits_\Omega \big\langle\eta(\mathbf{x})\big(\nabla\Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{c}\big), \nabla F(\mathbf{x})\big\rangle\,d\mathbf{x} = 0, \quad F \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Таким образом, $\Phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ есть решение уравнения

$$\mathrm{div}\,\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{c}) = 0. \tag{1.16}$$

Вспоминая определение эффективной матрицы η^0 для оператора $-\mathrm{div}\,\eta(\mathbf{x})\nabla$, имеем

$$\eta^0\mathbf{c} = |\Omega|^{-1}\int\limits_\Omega \eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{c})\,d\mathbf{x}. \tag{1.17}$$

Интегрируя (1.15) и учитывая (1.17), находим

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \eta^0\mathbf{c}. \tag{1.18}$$

С другой стороны, из (1.13) и (1.14) вытекает тождество

$$\int\limits_\Omega \nu(\mathbf{x})\Big(\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4\Big)\overline{\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{z})}\,d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{z}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3).$$

Это означает, что найдется такая постоянная $\alpha\in\mathbb{C}$, что

$$\nu(\mathbf{x})\left(\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4\right) = i\alpha. \tag{1.19}$$

Домножая (1.19) на $\nu(\mathbf{x})^{-1}$ и интегрируя, получаем $C_4|\Omega| = \alpha\int_\Omega \nu(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}$. Тем самым,

$$\alpha = \underline{\nu}C_4. \tag{1.20}$$

Подставляя $\mathbf{C} = \mathbf{e}_j$, найдем столбцы $\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$. Из (1.15), (1.18), (1.19) и (1.20) видно, что при $j=1,2,3$ столбец $\mathbf{v}_j\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ — это периодическое решение задачи

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}_j(\mathbf{x})) = i\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) - i\widetilde{\mathbf{e}}_j,\\ \mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}_j(\mathbf{x})) = 0, \quad \int\limits_\Omega \mathbf{v}_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.\end{gathered} \tag{1.21}$$

Здесь $\mathbf{c}_j = (\eta^0)^{-1}\widetilde{\mathbf{e}}_j$, а $\Phi_j\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ — решение уравнения (1.16) при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_j$. Решение задачи (1.21) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = i\mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,\mathbf{p}_j(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{p}_j\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{p}_j(\mathbf{x})) = \eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) - \widetilde{\mathbf{e}}_j,\\ \mathrm{div}\,\mathbf{p}_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \int\limits_\Omega \mathbf{p}_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.\end{gathered} \tag{1.22}$$

При $\mathbf{C} = \mathbf{e}_4$ из (1.15), (1.18), (1.19) и (1.20) видно, что $\mathbf{v}_4 \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ — это периодическое решение задачи

$$\operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}_4(\mathbf{x})) = 0, \quad \operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}_4(\mathbf{x})) = i\left(\underline{\nu}\nu(\mathbf{x})^{-1} - 1\right), \quad \int\limits_{\Omega} \mathbf{v}_4(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{v}_4(\mathbf{x}) = i\mu_0^{1/2}\nabla\rho(\mathbf{x})$, где $\rho(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div}(\mu_0\nabla\rho(\mathbf{x})) = 1 - \underline{\nu}\nu(\mathbf{x})^{-1}. \tag{1.23}$$

Таким образом, матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\Lambda(\mathbf{x}) = i\begin{pmatrix}\mu_0^{-1/2}\Psi(\mathbf{x}) & \mu_0^{1/2}\nabla\rho(\mathbf{x})\end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

где $\Psi(\mathbf{x})$ — (3×3)-матрица со столбцами $\operatorname{rot}\mathbf{p}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$ представляется в виде

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\eta(\mathbf{x})^{-1}(\operatorname{rot}(\mu_0^{-1}\Psi(\mathbf{x})) + \mathbf{1}_3) & 0\\ 0 & \nu(\mathbf{x})(\operatorname{div}(\mu_0\nabla\rho(\mathbf{x})) + 1)\end{pmatrix}.$$

С учетом (1.22) и (1.23),

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\Sigma(\mathbf{x}) + (\eta^0)^{-1} & 0\\ 0 & \underline{\nu}\end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

где $\Sigma(\mathbf{x})$ — (3×3)-матрица со столбцами $\nabla\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Отсюда согласно (1.11) получаем

$$g^0 = \begin{pmatrix}(\eta^0)^{-1} & 0\\ 0 & \underline{\nu}\end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Таким образом, эффективный оператор (1.9) задается дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}^0 = \mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\underline{\nu}\operatorname{div}\mu_0^{1/2} \tag{1.27}$$

на области $H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$.

Отметим известные оценки для норм эффективных коэффициентов:

$$\begin{aligned} |\eta^0| &\leqslant \|\eta\|_{L_\infty}, \quad |(\eta^0)^{-1}| \leqslant \|\eta^{-1}\|_{L_\infty},\\ |\underline{\nu}| &\leqslant \|\nu\|_{L_\infty}, \quad |(\underline{\nu})^{-1}| \leqslant \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Символ эффективного оператора задается выражением

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \mu_0^{-1/2}r(\boldsymbol{\xi})^t(\eta^0)^{-1}r(\boldsymbol{\xi})\mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2}\boldsymbol{\xi}\underline{\nu}\boldsymbol{\xi}^t\mu_0^{1/2}.$$

С учетом (1.28) символ $a(\boldsymbol{\xi})$ подчинен оценкам

$$c_1|\boldsymbol{\xi}|^2\mathbf{1} \leqslant a(\boldsymbol{\xi}) \leqslant c_2|\boldsymbol{\xi}|^2\mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^3. \tag{1.29}$$

Здесь постоянные c_1 и c_2 — те же, что в (1.8).

1.5. Свойства эффективной матрицы η^0. Свойства функций Φ_j. Для эффективной матрицы η^0 выполнены оценки

$$\underline{\eta} \leqslant \eta^0 \leqslant \overline{\eta}, \tag{1.30}$$

известные как вилка Фойгта–Рейсса. См., например, [BSu1, глава 3, теорема 1.5]. Выделим случаи, когда одно из неравенств в (1.30) превращается в равенство; см., например, [BSu1, глава 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.3. 1) *Равенство $\eta^0 = \overline{\eta}$ равносильно соленоидальности столбцов $\boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x})$ матрицы $\eta(\mathbf{x})$: $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, 3$.*
2) *Равенство $\eta^0 = \underline{\eta}$ равносильно потенциальности столбцов $\boldsymbol{\kappa}_j(\mathbf{x})$ матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$: $\boldsymbol{\kappa}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_j^0 + \nabla f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, при некоторых $\mathbf{c}_j^0 \in \mathbb{C}^3$ и $f_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.*

Замечание 1.4. 1) Если $\eta^0 = \overline{\eta}$, то $\Phi_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, 3$, и $\Sigma(\mathbf{x}) = 0$. Согласно (1.25), в этом случае выполнено $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$.
2) Если $\eta^0 = \underline{\eta}$, то $\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) = \widetilde{\mathbf{e}}_j$, $j = 1, 2, 3$; см. [BSu2, Замечание 3.5]. В этом случае $\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, 3$, то есть $\Psi(\mathbf{x}) = 0$. Если, кроме того, $\nu(\mathbf{x}) = \mathrm{Const}$, то $\mathbf{v}_4(\mathbf{x}) = 0$. Следовательно, в этом случае $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$.

Ниже нам понадобятся некоторые свойства функций Φ_j, $j = 1, 2, 3$.

Замечание 1.5. Столбцы матрицы $\Sigma(\mathbf{x})$ — это вектор-функции $\nabla\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, где Φ_j — периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) = 0, \quad \int\limits_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \tag{1.31}$$

при $\mathbf{c}_j = (\eta^0)^{-1}\widetilde{\mathbf{e}}_j$. Согласно [LaUr, глава 3, теорема 13.1] решение этой задачи ограничено: $\Phi_j \in L_\infty$, причем норма $\|\Phi_j\|_{L_\infty}$ контролируется через $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ.

Следующее утверждение проверено в [PSu, следствие 2.4].

Предложение 1.6. *Для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |(\nabla\Phi_j)^\varepsilon|^2 |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \beta_2 \varepsilon^2 \|\Phi_j\|^2_{L_\infty} \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

где постоянные β_1, β_2 зависят только от $\|\eta\|_{L_\infty}$ и $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$.

1.6. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Применяя теорему 2.1 из [BSu1, глава 4] к оператору (1.4), получаем следующий результат.

Теорема 1.7. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (1.4)*. Пусть эффективный оператор $\mathcal{L}^0$ определен в* (1.27)*. При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1\varepsilon.$$

Постоянная C_1 зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Аппроксимация резольвенты по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, была получена в [BSu3, теорема 10.6]; аппроксимация содержала корректор, включающий сглаживающий оператор иного типа, чем S_ε. В [PSu, теорема 3.3] было показано, что можно перейти к сглаживанию по Стеклову. Сформулируем результат из [PSu] в применении к оператору (1.4). Введем *корректор*

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}. \tag{1.32}$$

Здесь S_ε — оператор сглаживания по Стеклову, определенный в (1.1), а матрица Λ — периодическое решение задачи (1.10). Оператор

$$b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}$$

непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$. В силу предложения 1.2 и включения $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ оператор $\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon$ непрерывно переводит $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Поэтому корректор (1.32) непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. С учетом (1.5) и (1.24) получаем

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \left(\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon S_\varepsilon \operatorname{rot}\mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon S_\varepsilon \operatorname{div}\mu_0^{1/2}\right)(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}. \tag{1.33}$$

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.7*. Пусть корректор $\mathcal{K}_\varepsilon$ определен в* (1.33)*. При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2\varepsilon.$$

Постоянная C_2 зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Из теоремы 1.8 несложно выводится аппроксимация для “потока”

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1};$$

см. [Su4, теорема 1.8]. Справедлива оценка

$$\left\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \check{C}_3\varepsilon, \tag{1.34}$$

где $\check{C}_3$ зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ. С учетом (1.5) и (1.25) имеем

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} = -i \begin{pmatrix} (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} \\ \nu^\varepsilon \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

$$\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} = -i \begin{pmatrix} ((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon) S_\varepsilon \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \\ \underline{\nu} S_\varepsilon \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Покажем, что в оценке (1.34) можно заменить S_ε тождественным оператором; это приведет лишь к изменению константы в оценке.

Лемма 1.9. *При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\|\widetilde{g}^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C'\varepsilon. \tag{1.37}$$

Постоянная C' зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Доказательство. В силу (1.36) левая часть в (1.37) оценивается через

$$\begin{aligned} &\left\|g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &+ \left\|\Sigma^\varepsilon (S_\varepsilon - I)\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Применяя предложение 1.1, оценим первый член в (1.38):

$$\begin{aligned} &\left\|g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \left\|\mathbf{D} b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Вспоминая, что Σ^ε — матрица со столбцами $(\nabla\Phi_j)^\varepsilon$, $j = 1, 2, 3$, оценим второй член в (1.38). Используя предложение 1.6, а затем предложение 1.1 и неравенство (1.2), имеем:

$$\begin{aligned} &\left\|(\nabla\Phi_j)^\varepsilon (S_\varepsilon - I)\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \sqrt{\beta_1}\left\|(S_\varepsilon - I)\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \sqrt{\beta_2}\varepsilon\|\Phi_j\|_{L_\infty}\left\|(S_\varepsilon - I)\mathbf{D}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \varepsilon(\sqrt{\beta_1} r_1 + 2\sqrt{\beta_2}\|\Phi_j\|_{L_\infty})\left\|\mathbf{D} b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Из (1.7) и (1.29) вытекает оценка

$$\|\mathbf{D} b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi} b(\boldsymbol{\xi})(a(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{1})^{-1}| \leqslant \alpha_1^{1/2} c_1^{-1}. \tag{1.41}$$

В итоге неравенства (1.39)–(1.41) вместе с замечанием 1.5 влекут искомую оценку (1.37). $\square$

Теперь из (1.34)–(1.37) вытекает следующий результат.

Теорема 1.10. *При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\varepsilon.$$

Иначе говоря,

$$\left\| (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - \left((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon\right) \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\varepsilon,$$

$$\left\| \nu^\varepsilon \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - \underline{\nu} \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\varepsilon.$$

Постоянная C_3 зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Выделим частные случаи. Учитывая предложение 1.3 и замечание 1.4, из теорем 1.8 и 1.10 выводим следующий результат.

Предложение 1.11. 1) *Пусть $\eta^0 = \overline{\eta}$, т.е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны. Тогда при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\varepsilon.$$

2) *Пусть $\eta^0 = \underline{\eta}$, т.е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ потенциальны. Пусть, кроме того, $\nu(\mathbf{x}) = \mathrm{Const}$. Тогда корректор* (1.33) *обращается в нуль и при $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\left\| (\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2\varepsilon.$$

§2. Модельный оператор второго порядка в ограниченной области

2.1. Определение оператора L_ε. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Через $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ обозначим единичный вектор внешней нормали к $\partial\mathcal{O}$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}$. Проекцию на нормаль трехмерной вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на границе области обозначаем через

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle,$$

а касательную составляющую через

$$\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}) := \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_n(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}).$$

Пусть коэффициенты μ_0, η, ν удовлетворяют условиям пункта 1.3. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] &:= \int_{\mathcal{O}} \left\langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\right\rangle d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{O}} \Big(\big\langle (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}), \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\big\rangle \\ &\qquad + \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) \big|\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})\big|^2 \Big)\, d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

заданную на области определения

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, l_\varepsilon = \big\{ \boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) :\ \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}) \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \\ \mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}) \in L_2(\mathcal{O}),\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \big\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Априорно условия из (2.2) на вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ (в том числе и краевое условие) понимаются в обобщенном смысле; см. [BS1, BS2], а также определение 5.1 ниже. За счет условия гладкости границы ($\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$) множество (2.2) совпадает с

$$\mathrm{Dom}\, l_\varepsilon = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) :\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \right\}.$$

А тогда уже краевое условие может быть понято в смысле теоремы о следах. В наших предположениях форма (2.1) коэрцитивна. Справедливы двусторонние оценки

$$\mathfrak{c}_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{Dom}\, l_\varepsilon. \tag{2.3}$$

Постоянная $\mathfrak{c}_1$ зависит от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$, а $\mathfrak{c}_2$ зависит от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Указанные свойства были установлены в [BS1, теорема 2.3] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^2$ и в [F, теорема 2.6] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^{3/2+\delta}$, $\delta > 0$.

Таким образом, форма (2.1) замкнута и неотрицательна. Порожденный ею самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ мы обозначаем через L_ε. Формально L_ε задается дифференциальным выражением

$$L_\varepsilon = \mu_0^{-1/2} \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}$$

при краевых условиях

$$(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \big((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Второе условие является “естественным” и не отражается в области определения квадратичной формы l_ε.

Замечание 2.1. В [Su4] при изучении общих операторов вида
$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$$
с условием Неймана на границе накладывалось условие максимальности ранга символа $b(\boldsymbol{\xi})$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n$. Оно гарантировало коэрцитивность квадратичной формы оператора на классе $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В нашем случае это условие не выполнено, хотя при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ ранг матрицы $b(\boldsymbol{\xi})$ максимален; см. (1.6). Подчеркнем, что для формы l_ε коэрцитивность имеет место при учете краевого условия $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$.

Наша цель — найти аппроксимацию при малом ε обобщенного решения задачи
$$\begin{aligned}
&\mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,\big(\eta^\varepsilon(\mathbf{x})\big)^{-1}\mathrm{rot}\,\big(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x})\big)\\
&\qquad - \mu_0^{1/2}\nabla\nu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathrm{div}\,\big(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x})\big) + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O};\\
&(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \big((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$
Здесь $\mathbf{F}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Решение понимается в слабом смысле: $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$, и выполнено тождество
$$l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta}]+(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}=(\mathbf{F},\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\zeta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}}=0. \tag{2.5}$$
Тогда $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = (L_\varepsilon + I)^{-1}\mathbf{F}$. Тем самым, нас интересует поведение резольвенты $(L_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε.

2.2. Эффективный оператор L^0. Пусть матрица η^0 определена согласно (1.16), (1.17). Напомним, что $\underline{\nu}$ — это среднее гармоническое коэффициента $\nu(\mathbf{x})$. Пусть g^0 — матрица (1.26). Эффективный оператор L^0 — это самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, порожденный квадратичной формой
$$\begin{aligned}
l^0[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] &:= \int_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\rangle\,d\mathbf{x}\\
&= \int_{\mathcal{O}} \Big(\langle(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}), \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\rangle + \underline{\nu}|\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})|^2\Big)\,d\mathbf{x},\\
&\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$
С учетом (1.28) форма (2.6) подчинена оценкам
$$\begin{aligned}
&\mathfrak{c}_1\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant l^0[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})},\\
&\qquad\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

с теми же константами, что и в (2.3).

За счет гладкости границы справедливо *свойство повышения гладкости*: оператор L^0 задается дифференциальным выражением

$$L^0 = \mu_0^{-1/2} \mathrm{rot}\, (\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \underline{\nu} \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2}$$

на области определения

$$\mathrm{Dom}\, L^0 = \big\{ \boldsymbol{\varphi} \in H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3),\ (\mu_0^{1/2} \boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ \big((\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\, (\mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi})\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \big\}.$$

При этом

$$\|(L^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}, \tag{2.8}$$

где постоянная $\widehat{c}$ зависит от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Замечание 2.2. При условии $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ (и достаточно гладких коэффициентах) подобное свойство повышения гладкости решений задачи Дирихле либо Неймана для сильно эллиптических уравнений второго порядка можно найти, например, в книге [McL, глава 4]. Доказательство основано на методе разностных отношений и существенно опирается на условие коэрцитивности квадратичной формы. В нашем случае коэффициенты оператора L^0 постоянны и выполнено условие коэрцитивности (2.7), хотя граничные условия имеют смешанный тип. Нетрудно тем же методом установить свойство повышения гладкости и для оператора L^0.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_0$ — решение “усредненной” задачи

$$\begin{gathered} \mu_0^{-1/2} \mathrm{rot}\, (\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\, \big(\mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x})\big) \\ - \mu_0^{1/2} \nabla \underline{\nu} \mathrm{div}\, \big(\mu_0^{1/2} \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x})\big) + \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \\ (\mu_0^{1/2} \boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \big((\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\, (\mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0)\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Иными словами, функция $\boldsymbol{\varphi}_0 \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ удовлетворяет краевому условию $(\mu_0^{1/2} \boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ и тождеству

$$\begin{gathered} l^0[\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\zeta}] + (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2} \boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Тогда $\boldsymbol{\varphi}_0 = (L^0 + I)^{-1} \mathbf{F}$. Оценка (2.8) означает, что $\boldsymbol{\varphi}_0 \in H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ и

$$\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.11}$$

2.3. Оценки в окрестности границы. Положим

$$(\partial\mathcal{O})_\varepsilon := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Выберем числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in (0,1]$, подчиненные следующему условию.

Условие 2.3. *Число $\varepsilon_0 \in (0,1]$ таково, что полоску $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ можно покрыть конечным числом открытых множеств, допускающих диффеоморфизмы класса $C^{0,1}$, распрямляющие границу $\partial\mathcal{O}$. Пусть*

$$\varepsilon_1 := \varepsilon_0(1 + r_1)^{-1}, \quad \text{где} \quad 2r_1 = \operatorname{diam}\Omega.$$

Ясно, что ε_1 зависит лишь от области $\mathcal{O}$ и параметров решетки Γ. Заметим, что условие 2.3 гарантируется лишь липшицевостью границы. Мы наложили более сильное ограничение $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$, чтобы обеспечить оценку (2.8).

Следующие утверждения были проверены в [PSu, § 5]; лемма 2.5 аналогична лемме 2.6 из [ZhPas1].

Лемма 2.4. *Предположим, что выполнено условие* 2.3. *Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Положим $B_\varepsilon := \mathcal{O} \cap (\partial\mathcal{O})_\varepsilon$.*
1) *Для любой функции $u \in H^1(\mathcal{O})$ выполнено*

$$\int\limits_{B_\varepsilon} |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \|u\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) *Для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ выполнено*

$$\int\limits_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

Постоянная β зависит только от области $\mathcal{O}$.

Лемма 2.5. *Предположим, что выполнено условие* 2.3. *Пусть $h(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^3$, причем $h \in L_2(\Omega)$. Пусть S_ε — оператор* (1.1). *Обозначим $\beta_* := \beta(1 + r_1)$, где $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |h^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1} \|h\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

§3. Результаты для модельного уравнения второго порядка в ограниченной области

3.1. Аппроксимация резольвенты оператора L_ε. Сформулируем наши основные результаты об аппроксимации решения задачи (2.4). Для удобства дальнейших ссылок назовем следующий набор параметров “данными задачи”:

$$\begin{aligned}&|\mu_0|,\ |\mu_0^{-1}|,\ \|\eta\|_{L_\infty},\ \|\eta^{-1}\|_{L_\infty},\ \|\nu\|_{L_\infty},\ \|\nu^{-1}\|_{L_\infty};\\ &\text{параметры решетки } \Gamma;\ \text{область } \mathcal{O}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ — решение задачи* (2.4) *и $\boldsymbol{\varphi}_0$ — решение усредненной задачи* (2.9) *при $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Пусть число ε_1 выбрано согласно условию* 2.3. *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.2}$$

В операторных терминах,

$$\left\|(L_\varepsilon + I)^{-1} - (L^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon.$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Для аппроксимации решения в классе $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ нужно ввести корректор. Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) \to H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3), \quad s = 0,1,2.$$

Такой оператор существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см., например, [St]). Обозначим

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^s(\mathcal{O}) \to H^s(\mathbb{R}^3)} =: C_\mathcal{O}^{(s)}, \quad s = 0,1,2. \tag{3.3}$$

Постоянные $C_\mathcal{O}^{(s)}$ зависят только от области $\mathcal{O}$. Далее, через $[\Lambda^\varepsilon]$ обозначим оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, а через $R_\mathcal{O}$ — оператор сужения функций в $\mathbb{R}^3$ на область $\mathcal{O}$. Пусть S_ε — оператор сглаживания по Стеклову; см. (1.1). Введем корректор

$$K_\varepsilon := R_\mathcal{O}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (L^0 + I)^{-1}.$$

Оператор

$$b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (L^0 + I)^{-1}$$

непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$. Как уже отмечалось, оператор $[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Следовательно, корректор K_ε непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Используя (1.5) и (1.24), запишем корректор в виде

$$K_\varepsilon = R_\mathcal{O}\left(\mu_0^{-1/2} \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2} (\nabla\rho)^\varepsilon S_\varepsilon \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2}\right) P_\mathcal{O} (L^0 + I)^{-1}. \tag{3.4}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_0$ — решение задачи (2.9). Положим $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 := P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\varphi}_0$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon(\mathbf{x}) &:= \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0)(\mathbf{x}) \\ &\qquad + \varepsilon\mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, \\ \boldsymbol{\psi}_\varepsilon &:= \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда

$$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 = (L^0+I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_\varepsilon \mathbf{F}. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть функция* $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ *определена в* (3.5). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.7}$$

В операторных терминах,

$$\|(L_\varepsilon+I)^{-1} - (L^0+I)^{-1} - \varepsilon K_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Положим*

$$\mathbf{u}_\varepsilon := (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \quad \mathbf{u}_0 := (\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0.$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Sigma^\varepsilon \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \|\nu^\varepsilon \mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) - \underline{\nu}\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Постоянная $\mathcal{C}_3$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Выделим специальные случаи. В силу предложения 1.3 и замечания 1.4 из теорем 3.2 и 3.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.4. 1) *Пусть* $\eta^0=\overline{\eta}$, *т.е. столбцы матрицы* $\eta(\mathbf{x})$ *соленоидальны. Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) *Пусть* $\eta^0=\underline{\eta}$, *т.е. столбцы матрицы* $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ *потенциальны. Пусть, кроме того,* $\nu(\mathbf{x})=\mathrm{Const}$. *Тогда корректор* (3.4) *обращается в нуль и при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

3.2. Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, $\|(L^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 1$, а потому $\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$. В силу (2.11), (3.3) справедливы оценки

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(0)} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.9}$$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.10}$$

Положим

$$\widetilde{\mathbf{F}} := \mathcal{L}^0 \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0. \tag{3.11}$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$. В силу (1.29), (3.9) и (3.10)

$$\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c_2 \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_4 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.12}$$

где $\mathcal{C}_4 = c_2 \widehat{c} C_{\mathcal{O}}^{(2)} + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$. Отметим также неравенство, непосредственно вытекающее из (3.11) и (3.12):

$$\mathfrak{l}^0[\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0] \leqslant \|\widetilde{\mathbf{F}}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_4^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.13}$$

Пусть $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ — обобщенное решение уравнения в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon + \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}},$$

т.е., $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon = (\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} \widetilde{\mathbf{F}}$. Применим теоремы 1.7, 1.8 и 1.10. Учитывая также (3.12), приходим к оценкам

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1 \mathcal{C}_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.14}$$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2 \mathcal{C}_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.15}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3 \mathcal{C}_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.16}$$

3.3. Второй этап доказательства. Введение поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$. Введем "поправку" $\mathbf{s}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ как функцию, удовлетворяющую следующим тождеству и краевому условию:

$$\begin{gathered}
(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{s}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathbf{s}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\
= (\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\mathbf{F}, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \\
\forall \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \\
(\mu_0^{1/2}\mathbf{s}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon(\mu_0^{1/2}\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}}.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Покажем, что учет поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$, называемой "поправкой типа пограничного слоя", позволяет получить приближение решения $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ по H^1-норме с погрешностью точного порядка $O(\varepsilon)$.

Теорема 3.5. *При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon + \mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.18}$$

Постоянная $\mathcal{C}_5$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. Обозначим $\mathbf{V}_\varepsilon := \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon + \mathbf{s}_\varepsilon$. Тогда с учетом (2.5), (3.6), (3.17) и краевых условий $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$, $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ выполнено $\mathbf{V}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $(\mu_0^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$,

$$\begin{aligned} &l_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}] + (\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\qquad = (\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\boldsymbol{\varphi}_0 - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &\qquad \forall \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Первое слагаемое справа запишем в виде

$$(\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В силу (1.8), (3.15) и (3.16) оно оценивается через

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + \left(\mathfrak{l}_\varepsilon[\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon]\right)^{1/2} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}])^{1/2} \leqslant \mathcal{C}_5' \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}])^{1/2}. \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_5' = \mathcal{C}_4 \left(\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} C_3 + \sqrt{c_2} C_2\right)$. Второе слагаемое в правой части (3.19) запишем в виде $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 - \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}$. Оно не превосходит величины $\mathcal{C}_5'' \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ ввиду (3.14) и (3.15); здесь $\mathcal{C}_5'' = \mathcal{C}_4(C_1 + C_2)$. В итоге получаем, что правая часть тождества (3.19) не превосходит $\check{\mathcal{C}}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}] + \|\boldsymbol{\zeta}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\right)^{1/2}$, где $\check{\mathcal{C}}_5^2 = (\mathcal{C}_5')^2 + (\mathcal{C}_5'')^2$.

Подставляя $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ в (3.19) и используя полученную оценку, приходим к неравенству

$$\left(l_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] + \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\right)^{1/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с нижней оценкой (2.3) это влечет искомое неравенство (3.18) с постоянной $\mathcal{C}_5 = \check{\mathcal{C}}_5 \mathfrak{c}_1^{-1/2}$. □

Выводы. 1) Из (3.18) следует, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{3.20}$$

Поэтому для доказательства теоремы 3.2 нужно надлежащим образом оценить норму $\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$.

2) Из (3.6) и (3.18) видно, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.21}$$

В силу предложения 1.2 и оценок (1.12), (3.13) имеем

$$\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda \mathcal{C}_4 \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.22}$$

Вместе с (3.21) это влечет

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.23}$$

где $\mathcal{C}_6 = \mathcal{C}_5 + \mathfrak{C}_\Lambda \mathcal{C}_4 \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$. Следовательно, для доказательства теоремы 3.1 надо оценить норму $\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ надлежащим образом.

§4. Оценки поправки. Доказательство теорем 3.1–3.3

Сначала мы оценим H^1-норму поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ и докажем теорему 3.2, а также теорему 3.3. Затем, используя уже доказанную теорему 3.2 и соображения двойственности, оценим L_2-норму поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ и докажем теорему 3.1.

4.1. Оценка поправки в $H^1(\mathcal{O})$. Доказательство теоремы 3.2. Перепишем тождество (3.17), учитывая (2.10):

$$\begin{gathered}(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{s}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathbf{s}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ = ((\widetilde{g}^\varepsilon - g^0) b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} =: \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}], \\ \forall \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Согласно (1.5), (1.25) и (1.26) имеем

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = (\Sigma^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ справедлива оценка*

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_7 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}])^{1/2}, \quad \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{4.3}$$

Постоянная $\mathcal{C}_7$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. Напомним, что $\Sigma(\mathbf{x})$ — это матрица со столбцами $\nabla\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Следовательно, матрица $\Sigma^\varepsilon(\mathbf{x})$ имеет столбцы $(\nabla\Phi_j)^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\nabla\Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Обозначим координаты вектор-функции $\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0$ через $[\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0]_j$, $j = 1,2,3$. Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma^\varepsilon \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 &= \varepsilon \sum_{j=1}^3 (\nabla\Phi_j^\varepsilon)[\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0]_j \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^3 \left(\nabla \left(\Phi_j^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0]_j \right) - \Phi_j^\varepsilon \nabla [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0]_j \right).\end{aligned}$$

Вместе с (4.2) это влечет

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{4.4}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] := \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \left(\nabla \left(\Phi_j^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right), \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta} \right)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}] := -\varepsilon \sum_{j=1}^{3} (\Phi_j^\varepsilon \nabla [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j, \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.6}$$

В силу (2.11) и ограниченности функций Φ_j (см. замечание 1.5) член (4.6) допускает оценку

$$|\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_7' \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}])^{1/2}, \tag{4.7}$$

где постоянная $\mathcal{C}_7'$ зависит только от данных задачи (3.1). Мы учли очевидное неравенство

$$\|\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\eta\|_{L_\infty}^{1/2} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}])^{1/2}. \tag{4.8}$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Фиксируем срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^3$ такую, что

$$\begin{gathered} \theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3); \quad \operatorname{supp} \theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon; \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1; \\ \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}; \quad \varepsilon |\nabla \theta_\varepsilon| \leqslant \kappa = \mathrm{Const}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Положим

$$\mathbf{f}_{j,\varepsilon} := \varepsilon \nabla \left(\theta_\varepsilon \Phi_j^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right), \quad j = 1, 2, 3, \tag{4.10}$$

и представим член (4.5) в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] = \sum_{j=1}^{3} (\mathbf{f}_{j,\varepsilon}, \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.11}$$

Мы учли тождество

$$\left(\nabla \left((1 - \theta_\varepsilon) \Phi_j^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right), \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta} \right)_{L_2(\mathcal{O})} = 0,$$

которое проверяется интегрированием по частям с учетом соотношения $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ (при проверке достаточно считать $\boldsymbol{\zeta} \in H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$).

Остается оценить член (4.11). С учетом (4.9), (4.10) и замечания 1.5 имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{f}_{j,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \kappa \|\Phi_j\|_{L_\infty} \|[\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(B_\varepsilon)} \\ &+ \|\theta_\varepsilon (\nabla \Phi_j)^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon \|\Phi_j\|_{L_\infty} \|\nabla [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Первое слагаемое в (4.12) оценивается через $C\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ благодаря лемме 2.4 и оценке (2.11). Третье слагаемое в (4.12) не превосходит $C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$

в силу (2.11). Для оценки второго слагаемого в (4.12) применим предложение 1.6 и (4.9):

$$
\begin{aligned}
&\|\theta_\varepsilon(\nabla\Phi_j)^\varepsilon[\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \|\theta_\varepsilon(\nabla\Phi_j)^\varepsilon[\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\leqslant \sqrt{\beta_1}\|[\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}+\sqrt{\beta_2}\varepsilon\|\Phi_j\|_{L_\infty}\|\nabla\Big(\theta_\varepsilon[\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\Big)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\leqslant \Big(\sqrt{\beta_1}+\sqrt{\beta_2}\|\Phi_j\|_{L_\infty}\kappa\Big)\|[\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}\\
&\qquad+\sqrt{\beta_2}\varepsilon\|\Phi_j\|_{L_\infty}\|\nabla[\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

Первый член справа не превосходит $C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ в силу леммы 2.4 и оценки (3.10). Второе слагаемое оценивается через $C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ за счет (3.10). В итоге мы приходим к оценке

$$
\sum_{j=1}^{3}\|\mathbf{f}_{j,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_7''\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.13}
$$

где постоянная $\mathcal{C}_7''$ зависит только от данных задачи (3.1). Следовательно, с учетом (4.8) член (4.11) допускает оценку

$$
|\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}]|\leqslant \mathcal{C}_7''\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}(l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}])^{1/2}. \tag{4.14}
$$

Теперь из (4.4), (4.7) и (4.14) вытекает искомое неравенство (4.3). □

В $\mathbb{R}^3$ введем функцию

$$
\boldsymbol{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}):=\varepsilon\theta_\varepsilon(\mathbf{x})\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})\left(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\right)(\mathbf{x}). \tag{4.15}
$$

Лемма 4.2. *Пусть функция $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ определена в* (4.15). *При $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ справедлива оценка*

$$
\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_8\Big(\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\Big), \tag{4.16}
$$

где постоянная $\mathcal{C}_8$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. В силу (3.17), (4.1) и (4.9) функция $\mathbf{s}_\varepsilon-\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ удовлетворяет краевому условию

$$
\big(\mu_0^{1/2}(\mathbf{s}_\varepsilon-\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\big)_n|_{\partial\mathcal{O}}=0
$$

и тождеству

$$
\begin{aligned}
l_\varepsilon[\mathbf{s}_\varepsilon-\boldsymbol{\phi}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta}]+(\mathbf{s}_\varepsilon-\boldsymbol{\phi}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}&=\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]-\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}],\\
\boldsymbol{\zeta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}}&=0,
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

где

$$\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] := (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.18}$$

С учетом (1.8) имеем

$$|\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \sqrt{c_2}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}(l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}])^{1/2} + \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.19}$$

Подставляя $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ в (4.17) и используя (4.3) и (4.19), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} l_\varepsilon[\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon] &+ \|\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant 2\mathcal{C}_7^2\varepsilon\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + 2c_2\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

С учетом нижней оценки (2.3) отсюда получаем

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathcal{C}}_8\big(\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\big),$$

где постоянная $\check{\mathcal{C}}_8$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Это влечет (4.16). $\square$

Лемма 4.3. *Пусть число ε_1 подчинено условию 2.3. Пусть функция $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ определена в* (4.15). *При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнены оценки*

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_9\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.20}$$

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_{10}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.21}$$

где постоянные $\mathcal{C}_9$ и $\mathcal{C}_{10}$ зависят лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. Оценка (4.20) вытекает из (3.22) и (4.9).

Рассмотрим производные

$$\begin{aligned} D_j\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = \varepsilon(D_j\theta_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 &+ \theta_\varepsilon(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\ &+ \varepsilon\theta_\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Норма первого слагаемого справа оценивается с помощью (4.9) и леммы 2.5:

$$\begin{aligned} \varepsilon\|(D_j\theta_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant \kappa\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \\ &\leqslant \kappa\mathfrak{C}_\Lambda\sqrt{\beta_*}\varepsilon^{1/2}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \mathcal{C}'_{10}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}'_{10} = \kappa\mathfrak{C}_\Lambda\sqrt{\beta_*\alpha_1}\widehat{c}C^{(2)}_{\mathcal{O}}$. Мы учли (1.7), (1.12) и (3.10). Аналогично, из леммы 2.5, (1.7), (1.12) и (3.10) вытекает оценка нормы второго слагаемого в (4.22):

$$\|\theta_\varepsilon(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}''_{10}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где
$$\mathcal{C}_{10}'' = \mathfrak{C}_\Lambda \sqrt{\beta_* \alpha_1}\, \widehat{c}\, C_{\mathcal{O}}^{(2)}.$$
Норма третьего слагаемого в (4.22) оценивается на основании предложения 1.2, (1.7), (1.12) и (3.10):
$$\varepsilon \|\theta_\varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_{10}''' \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
где
$$\mathcal{C}_{10}''' = \mathfrak{C}_\Lambda \sqrt{\alpha_1}\, \widehat{c}\, C_{\mathcal{O}}^{(2)}.$$
В итоге приходим к оценке
$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \check{\mathcal{C}}_{10} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
где постоянная $\check{\mathcal{C}}_{10}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Вместе с (4.20) это влечет (4.21). □

Из лемм 4.2 и 4.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.4. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*
$$\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{11} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.23}$$
где постоянная $\mathcal{C}_{11}$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Завершение доказательства теоремы 3.2. Из (3.20) и (4.23) вытекает искомая оценка (3.7) с постоянной $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_{11}$. □

4.2. Доказательство теоремы 3.3. Из (3.7) следует оценка
$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.24}$$
где постоянная $\mathcal{C}_{12}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Согласно (3.6) имеем
$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon &= g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 + \varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0) \\ &= g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^3 g^\varepsilon b_j \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\ &= \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^3 g^\varepsilon b_j \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0. \end{aligned}$$

Норма третьего слагаемого справа оценивается через $C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ в силу предложения 1.2, (1.12) и (3.10). Второе слагаемое справа можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\
&= -i\begin{pmatrix} \left(\Sigma^\varepsilon + (\eta^0)^{-1} - (\eta^\varepsilon)^{-1}\right)(S_\varepsilon - I)\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\ (\underline{\nu} - \nu^\varepsilon)(S_\varepsilon - I)\operatorname{div}\mu_0^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Аналогично доказательству леммы 1.9, используя предложение 1.1 и предложение 1.6, нетрудно проверить оценку

$$\|g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}'_{12}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где постоянная $\mathcal{C}'_{12}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). В итоге получаем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathcal{C}}_{12}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.25}$$

где постоянная $\check{\mathcal{C}}_{12}$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Из (4.24) и (4.25) вытекает требуемая оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_{12} + \check{\mathcal{C}}_{12})\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

равносильная паре неравенств (3.8). $\square$

4.3. Оценка поправки в $L_2(\mathcal{O})$. Завершение доказательства теоремы 3.1.

Лемма 4.5. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{13}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.26}$$

где постоянная $\mathcal{C}_{13}$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Доказательство. Пусть $\mathbf{G} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Положим $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon := (L_\varepsilon + I)^{-1}\mathbf{G}$. Подставим в тождество (4.17) функцию $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$. Тогда левая часть тождества запишется в виде $(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})}$. Следовательно,

$$(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon] - \mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon]. \tag{4.27}$$

В силу (4.4), (4.7), (4.18), (4.20) и (4.27) с учетом очевидной оценки

$$l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon] + \|\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{G}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}$$

имеем

$$
\begin{aligned}
|(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})}| &\leqslant (\mathcal{C}'_7 + \mathcal{C}_9)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + |\mathcal{I}^{(1)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon]| + |(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}|.
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Поскольку функции $\mathbf{f}_{j,\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ сосредоточены в ε-окрестности границы $\partial\mathcal{O}$ (см. (4.9), (4.10) и (4.15)), из (4.11), (4.13) и (4.21) получаем

$$|\mathcal{I}^{(1)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon]| + |(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \mathcal{C}'_{13}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|_{L_2(B_\varepsilon)}, \tag{4.29}$$

где постоянная $\mathcal{C}'_{13}$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Применим уже доказанную теорему 3.2. Аппроксимируем функцию $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$ через

$$\boldsymbol{\zeta}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0,$$

где

$$\boldsymbol{\zeta}_0 = (L^0 + I)^{-1} \mathbf{G} \quad \text{и} \quad \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0 = P_{\mathcal{O}} \boldsymbol{\zeta}_0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|_{L_2(B_\varepsilon)} \leqslant \|\mathbf{D}(\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon - \boldsymbol{\zeta}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_0\|_{L_2(B_\varepsilon)} \\ + \varepsilon \|\mathbf{D}(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0)\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Первое слагаемое справа оценивается через $\mathcal{C}_2 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ в силу теоремы 3.2. Второе слагаемое оценивается через $\sqrt{\beta}\widehat{c}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ благодаря лемме 2.4 и оценке (2.8). Оценим третье слагаемое:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \|\mathbf{D}(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0)\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \\ &\leqslant \|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} + \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon \mathbf{D} b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \sqrt{\beta_*}\mathfrak{C}_\Lambda \varepsilon^{1/2} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^3)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \mathfrak{C}_\Lambda \varepsilon \|\mathbf{D} b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Мы использовали здесь лемму 2.5, предложение 1.2 и оценку (1.12). Учитывая также аналог оценки (3.10) для $\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0$, убеждаемся, что третье слагаемое в (4.30) не превосходит $\mathcal{C}''_{13}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}$, где $\mathcal{C}''_{13}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). В итоге приходим к неравенству

$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|_{L_2(B_\varepsilon)} \leqslant (\mathcal{C}_2 + \sqrt{\beta}\widehat{c} + \mathcal{C}''_{13}) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{4.31}$$

Соотношения (4.28), (4.29) и (4.31) влекут

$$|(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \check{\mathcal{C}}_{13} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \mathbf{G} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3),$$

где постоянная $\check{\mathcal{C}}_{13}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Следовательно,

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathcal{C}}_{13} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с оценкой (4.20) это влечет (4.26). $\square$

Завершение доказательства теоремы 3.1. Из (3.23) и (4.26) вытекает искомая оценка (3.2) с постоянной $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_{13}$. $\square$

§5. Стационарная система Максвелла

5.1. Функциональные классы. Как и прежде, предполагаем, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Напомним следующие определения; см. [BS1, BS2].

Определение 5.1. Пусть $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. Если $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O})$, то равенство $\mathbf{u}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ по определению означает, что

$$(\mathbf{u}, \nabla\omega)_{L_2(\mathcal{O})} = -(\operatorname{div} \mathbf{u}, \omega)_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \omega \in H^1(\mathcal{O}).$$

Определение 5.2. Пусть $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. Если $\operatorname{rot} \mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$, то равенство $\mathbf{u}_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ по определению означает, что

$$(\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : \ \operatorname{rot} \mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3).$$

Пусть матрица μ_0 и матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям пункта 1.3. Помимо обычного пространства $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ нам понадобятся весовые пространства L_2 вектор-функций: пространство

$$L_2(\mathcal{O}; (\eta^\varepsilon)^{-1}) = L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3; (\eta^\varepsilon)^{-1})$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{L_2(\mathcal{O}; (\eta^\varepsilon)^{-1})} = \int_{\mathcal{O}} \langle (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x}$$

и аналогичное пространство

$$L_2(\mathcal{O}; \mu_0^{-1}) = L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3; \mu_0^{-1})$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{L_2(\mathcal{O}; \mu_0^{-1})} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mu_0^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x}.$$

Введем два подпространства соленоидальных вектор-функций в L_2:

$$J(\mathcal{O}) := \bigl\{ \mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : \ \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{u}, \nabla\omega \rangle \, d\mathbf{x} = 0, \ \forall \omega \in H^1_0(\mathcal{O}) \bigr\}, \tag{5.1}$$

$$J_0(\mathcal{O}) := \bigl\{ \mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) : \ \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{u}, \nabla\omega \rangle \, d\mathbf{x} = 0, \ \forall \omega \in H^1(\mathcal{O}) \bigr\}. \tag{5.2}$$

Подпространство (5.1) состоит из всех функций $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$, для которых $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в смысле распределений. Подпространство (5.2) образуют функции $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ такие, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{u}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ (в смысле определения 5.1).

5.2. Постановка задачи. Мы изучаем электромагнитный резонатор, заполняющий область $\mathcal{O}$. Считаем, что магнитная проницаемость задается постоянной матрицей μ_0, а диэлектрическая проницаемость — матрицей $\eta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Напряженности электрического и магнитного полей обозначаются через $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$ соответственно. Векторы электрической и магнитной индукций связаны с полями $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ соотношениями $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu_0\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Оператор M_ε, записанный в терминах индукций, действует в пространстве $J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O})$, рассматриваемом как подпространство в

$$L_2\big(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\eta^\varepsilon)^{-1}\big) \oplus L_2\big(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;\mu_0^{-1}\big),$$

и задается выражением

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\operatorname{rot}\mu_0^{-1} \\ -i\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

на области определения

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} M_\varepsilon =& \big\{(\mathbf{w},\mathbf{z}) \in J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O}) :\ \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \\ & \operatorname{rot}\mu_0^{-1}\mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0\big\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь краевое условие для $\mathbf{w}$ понимается в смысле определения 5.2.

Оператор M_ε самосопряжен; см. [BS1, BS2]. Точка $\lambda = i$ является регулярной точкой оператора M_ε. *Наша цель* — изучить поведение резольвенты $(M_\varepsilon - iI)^{-1}$. Иными словами, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ уравнения

$$(M_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} \in J(\mathcal{O}),\ \mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O}), \tag{5.5}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$. В подробной записи система Максвелла (5.5) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{c} i\operatorname{rot}\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon - i\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{q}, \\ -i\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon - i\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{r}, \\ \operatorname{div}\mathbf{w}_\varepsilon = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Пусть η^0 — эффективная матрица, определенная в (1.16), (1.17). Пусть M^0 — эффективный оператор Максвелла с коэффициентами η^0 и μ_0 (определенный аналогично (5.3) и (5.4)). Рассмотрим усредненное уравнение

$$(M^0 - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

и определим поля $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_0$. В подробной записи (5.7) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{c} i\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0 - i\mathbf{w}_0 = \mathbf{q}, \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0 - i\mathbf{z}_0 = \mathbf{r}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_0 = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_0 = 0, \\ ((\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right. \tag{5.8}$$

Классические результаты (см. [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO]) показывают, что при $\varepsilon \to 0$ *имеет место слабая сходимость в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ *полей* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *к соответствующим усредненным полям* $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{z}_0$.

5.3. Случай $\mathbf{q} = 0$. Редукция задачи к модельному уравнению второго порядка. При $\mathbf{q} = 0$ система (5.6) принимает вид

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{w}_\varepsilon = \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon, \\ \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{z}_\varepsilon = i\mathbf{r}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_\varepsilon = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right. \tag{5.9}$$

Из (5.9) следует, что $\mathbf{z}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon + \mathbf{z}_\varepsilon = i\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right.$$

Тогда функция $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon := \mu_0^{-1/2}\mathbf{z}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\left\{\begin{array}{c} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = 0, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right. \tag{5.10}$$

Очевидно, решение задачи (5.10) одновременно является и решением задачи

$$\left\{\begin{array}{c} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \mu_0^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right. \tag{5.11}$$

(Отметим, что уравнение $\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = 0$ окажется выполненным автоматически за счет условия $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$.) Задача (5.11) совпадает с (2.4) при $\nu = 1$ и $\mathbf{F} = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}$.

Пусть L_ε — оператор, введенный в пункте 2.1, с коэффициентами μ_0, η^ε и $\nu = 1$. Мы убедились, что решение $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ задачи (5.10) можно записать в виде $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i(L_\varepsilon + I)^{-1}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{r})$.

Аналогичным образом, при $\mathbf{q}=0$ эффективная система (5.8) запишется в виде

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{w}_0 = \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0, \\ \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0 + \mathbf{z}_0 = i\mathbf{r}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_0 = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_0 = 0, \\ ((\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right. \tag{5.12}$$

Тогда $\mathbf{z}_0$ является решением задачи

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_0 = i\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{z}_0 = 0, \\ (\mathbf{z}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, функция $\boldsymbol{\varphi}_0 := \mu_0^{-1/2}\mathbf{z}_0$ является решением задачи

$$\left\{\begin{array}{c} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 = 0, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right. \tag{5.13}$$

Ясно, что решение задачи (5.13) одновременно является и решением задачи

$$\left\{\begin{array}{c} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 - \mu_0^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array}\right. \tag{5.14}$$

(Уравнение $\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ выполнено автоматически за счет условия $\mathbf{r}\in J_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$.) Задача (5.14) совпадает с (2.9) при $\underline{\nu}=1$ и $\mathbf{F}=i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}$.

Пусть L^0 — эффективный оператор, определенный в пункте 2.2, с коэффициентами μ_0, η^0 и $\underline{\nu}=1$. Тогда решение $\boldsymbol{\varphi}_0$ задачи (5.13) запишется в виде $\boldsymbol{\varphi}_0 = i(L^0+I)^{-1}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{r})$.

5.4. Результаты для системы Максвелла. Применяя теорему 3.1 и используя соотношения

$$\mathbf{z}_\varepsilon = \mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \quad \mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \quad \mathbf{z}_0 = \mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{F} = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r},$$

при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ получаем оценки

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mu_0|^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1|\mu_0|^{1/2}|\mu_0^{-1}|^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.15}$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mu_0^{-1}|^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1|\mu_0^{-1}|\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.16}$$

Применим теперь теорему 3.2. Поскольку при $\nu=1$ решение уравнения (1.23) равно нулю: $\rho(\mathbf{x})=0$, то функция (3.6) принимает вид

$$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}_0 + \varepsilon\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon S_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0.$$

Обозначим $\widetilde{\mathbf{w}}_0 = \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0$. Ясно, что $\widetilde{\mathbf{w}}_0$ является продолжением функции $\mathbf{w}_0 = \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0$. Из (3.7) следует, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0 - \varepsilon \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 |\mu_0|^{1/2} |\mu_0^{-1}|^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.17}$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon \mu_0^{-1} \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 |\mu_0^{-1}| \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.18}$$

Далее, в силу первого уравнения в (5.9) имеем:

$$\mathbf{w}_\varepsilon = \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,$$

а тогда

$$\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon.$$

Аналогично,

$$\mathbf{w}_0 = \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0.$$

Применяя теорему 3.3, убеждаемся, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Sigma^\varepsilon \mathbf{w}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3 |\mu_0^{-1}|^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.19}$$

Вспоминая, что $\Sigma(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla \Phi_j$, $j = 1, 2, 3$, где $\Phi_j(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи (1.31), представим эту матрицу в виде $\Sigma(\mathbf{x}) = \Xi(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1}$, где $\Xi(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla Y_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, а $Y_j(\mathbf{x})$ — Г-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})(\nabla Y_j(\mathbf{x}) + \widetilde{\mathbf{e}}_j) = 0, \qquad \int_\Omega Y_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.20}$$

Учитывая, что $(\eta^0)^{-1} \mathbf{w}_0 = \mathbf{u}_0$, перепишем (5.19) в виде

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Xi^\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3 |\mu_0^{-1}|^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.21}$$

С учетом соотношений $\mathbf{w}_\varepsilon = \eta^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_0 = \eta^0 \mathbf{u}_0$ из (5.21) выводим

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_0 - \Upsilon^\varepsilon \mathbf{w}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3 |\mu_0^{-1}|^{1/2} \|\eta\|_{L_\infty} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.22}$$

где $\Upsilon(\mathbf{x}) = \widetilde{\eta}(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1}$, $\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x})(\Xi(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$.

Соотношения (5.15)–(5.18), (5.21) и (5.22) влекут следующий итоговый результат об усреднении решений системы Максвелла в случае $\mathbf{q} = 0$.

Теорема 5.3. *Предположим, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Предположим, что μ_0 — положительная матрица с вещественными элементами, а $\eta(\mathbf{x})$ — Г-периодическая матрица-функция с вещественными элементами такая, что $\eta(\mathbf{x}) > 0$ и $\eta, \eta^{-1} \in L_\infty$. Пусть $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ — решение системы (5.9) при $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. Пусть*

$\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$. *Пусть* $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ — *решение усредненной системы* (5.12), *в которой эффективная матрица* η^0 *определена согласно* (1.16) *и* (1.17). *Пусть* $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$ *и* $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_0$. *Предположим, что число* ε_1 *подчинено условию* 2.3. *Тогда справедливо следующее.*

1) *При* $\varepsilon \to 0$ *поля* $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *сходятся к* $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{z}_0$ *соответственно по норме в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. *Более того, при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_2\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) *Пусть* S_ε — *сглаживающий оператор по Стеклову, определенный в* (1.1). *Пусть* $\Psi(\mathbf{x})$ — *матрица со столбцами* $\operatorname{rot}\mathbf{p}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, *где* $\mathbf{p}_j$ — Γ-*периодическое решение задачи* (1.22). *Пусть* $\widetilde{\mathbf{w}}_0(\mathbf{x})$ — *построенное выше продолжение функции* $\mathbf{w}_0(\mathbf{x})$ *на* $\mathbb{R}^3$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *для полей* $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *справедливы аппроксимации по норме в пространстве* $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ *с оценками погрешностей*:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_3\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.23}$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0 - \varepsilon\Psi^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_4\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.24}$$

3) *Пусть* $\Xi(\mathbf{x})$ — *матрица со столбцами* $\nabla Y_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, *где* Y_j — Γ-*периодическое решение задачи* (5.20). *Пусть* $\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x})(\Xi(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$, $\Upsilon(\mathbf{x}) := \widetilde{\eta}(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *для полей* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ *справедливы аппроксимации по норме в пространстве* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ *с оценками погрешностей*:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Xi^\varepsilon\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.25}$$
$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_0 - \Upsilon^\varepsilon\mathbf{w}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_6\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.26}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{C}_5$, $\mathfrak{C}_6$ *зависят лишь от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Замечание 5.4. 1) Мы видим, что симметрии в результатах для магнитных полей $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ и электрических полей $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ нет. Магнитные поля сходятся по норме в L_2, причем погрешность имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, и допускают аппроксимации по норме в H^1 с погрешностями порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Электрические поля удается лишь аппроксимировать по норме в L_2 с погрешностями порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Это объясняется отсутствием симметрии в самой постановке задачи: мы предположили, что $\mathbf{q} = 0$ в правой части системы (5.5). По этой причине поле $\mathbf{z}_\varepsilon$ оказалось решением вспомогательного уравнения второго порядка, а поле $\mathbf{w}_\varepsilon$ выразилось через производные этого решения.

2) Отметим, что средние значения периодических матриц-функций $\Xi(\mathbf{x})$ и $\Upsilon(\mathbf{x})$ равны нулю, а потому в силу свойства среднего значения слабый L_2-предел поправок $\Xi^\varepsilon \mathbf{u}_0$ и $\Upsilon^\varepsilon \mathbf{w}_0$ равен нулю. Тогда из (5.25), (5.26) вытекает, что поля $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{w}_\varepsilon$ слабо сходятся в L_2 к $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{w}_0$ соответственно, что согласуется с классическими результатами. Поправки $\Xi^\varepsilon \mathbf{u}_0$ и $\Upsilon^\varepsilon \mathbf{w}_0$ можно интерпретировать как корректоры нулевого порядка.

3) Аналогичным образом, слабый H^1-предел поправок $\varepsilon \mu_0^{-1} \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0$ и $\varepsilon \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0$ из (5.23), (5.24) равен нулю. Следовательно, поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ слабо сходятся в H^1 к $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$ соответственно.

Выделим теперь специальные случаи. С помощью предложения 1.3 и замечания 1.4 из теоремы 5.3 выводим следующее утверждение.

Предложение 5.5. 1) *Пусть $\eta^0 = \overline{\eta}$, т.е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) *Пусть $\eta^0 = \underline{\eta}$, т.е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ потенциальны. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнены оценки*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_3 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_4 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publ. Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BS1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях*, Успехи мат. наук **42** (1987), №6, 61–76.

[BS2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях*, Алгебра и анализ **1** (1989), №1, 96–110.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости*, Функц. анал. и его прил. **41** (2007), №2, 3–23.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), №3, 305–308.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[ZhPas2] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук **71** (2016), №3, 27–122.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[LaUr] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), №6, 139–177.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ **16** (2004), №5, 162–244.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла с учетом корректора*, Алгебра и анализ **19** (2007), №3, 183–235.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems*: L_2-*operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.

[Su4] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), №4, 87–166.

[F] Филонов Н. Д., *Главные особенности магнитной составляющей поля в резонаторах с границей заданного класса гладкости*, Алгебра и анализ **9** (1997), №2, 241–255.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: t.suslina@spbu.ru

Поступило 28 февраля, 2018 г.