А. И. Зейфман, Я. А. Сатин, И. А. Ковалёв, Об одной нестационарной модели обслуживания с катастрофами и тяжелыми хвостами, *Информ. и её примен.*, 2021, том 15, выпуск 2, 20–25

DOI: 10.14357/19922264210203

ИНФОРМАТИКА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 20–25

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАТАСТРОФАМИ И ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ*

А. И. Зейфман[1], Я. А. Сатин[2], И. А. Ковалёв[3]

Аннотация: Рассматривается нестационарная система массового обслуживания с катастрофами, одним сервером и специальными групповыми поступлениями требований, причем интенсивности увеличивающихся групп требований могут убывать достаточно медленно. Рассмотрен процесс $X(t)$, описывающий число требований в такой системе, доказано существование предельного режима распределения вероятностей состояний и предельного среднего для $X(t)$, получены оценки скорости сходимости к предельному режиму и предельному среднему. Получены оценки аппроксимации с помощью усечений конечными процессами. В качестве примера рассмотрена простая модель нестационарной системы с достаточно медленной скоростью убывания интенсивностей поступления групп требований, когда размер группы растет.

Ключевые слова: нестационарная система массового обслуживания; счетные марковские цепи; предельные характеристики; скорость сходимости; аппроксимации

DOI: 10.14357/19922264210203

1 Введение

Первоначальное описание исходной модели и первые исследования проведены в [1], соответствующая нестационарная ситуация была впервые изучена в [2]. Аналогичная модель в случае наличия катастрофических сбоев системы введена и изучена в [3]. При этом число требований в соответствующей системе обслуживания описывается процессом $X(t)$ (см. далее). В указанных работах изучается случай, когда интенсивности поступления групп требований экспоненциально убывают при увеличении размера группы. В настоящей работе исследуется ситуация «тяжелых хвостов», когда эти интенсивности убывают со степенной скоростью.

2 Описание модели

Подробное описание модели приведено в [3], здесь же отметим, что рассматриваемый процесс $X(t)$ является неоднородной марковской цепью с непрерывным временем, счетным пространством состояний $\{0, 1, 2, \ldots\}$, а транспонированная матрица интенсивностей $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=0}^{\infty}$ имеет вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \mu(t)+\gamma(t) & \gamma(t) & \gamma(t) & \cdots \\ \lambda(t)b_1 & -(\lambda(t)B_2+\mu(t)+\gamma(t)) & \mu(t) & 0 & \cdots \\ \lambda(t)b_2 & \lambda(t)b_2 & -(\lambda(t)B_3+\mu(t)+\gamma(t)) & \mu(t) & \cdots \\ \lambda(t)b_3 & \lambda(t)b_3 & \lambda(t)b_3 & -(\lambda(t)B_4+\mu(t)+\gamma(t)) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda(t)$ — интенсивность поступления группы требований; $\mu(t)$ — интенсивность обслуживания одного требования; $\gamma(t)$ — интенсивность катастрофы (одномоментной потери всех требований в системе).

Далее, $\lambda(t)b_k$ — интенсивность поступления группы требований такой, что общее их число в системе оказывается равным k, т. е. если в системе уже есть $k-j$ требований, то это интенсивность одновременного поступления группы из j требований. При этом $B_k = \sum_{j=k}^{\infty} b_j$ при всех $k \geq 1$, а $B_1 = 1$. Все функции, определяющие интенсивности, предполагаются неотрицательными и локально ин-

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00020).

[1]Вологодский государственный университет; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Вологодский научный центр Российской академии наук, a_zeifman@mail.ru

[2]Вологодский государственный университет, yacovi@mail.ru

[3]Вологодский государственный университет, kovalev.iv96@yandex.ru

тегрируемыми на $[0,\infty)$. Кроме того, разумеется, предполагается выполненным условие

$$\sum_{k\ge1} B_k = \sum_{k\ge1} kb_k < \infty. \qquad (1)$$

3 Получение оценок для процесса $X(t)$

Обозначив через $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^{\mathrm{T}}$ вектор вероятностей состояний для процесса $X(t)$, получаем прямую систему Колмогорова

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{p}(t) = A(t)\mathbf{p}(t),$$

которую в рассматриваемой ситуации удобно преобразовать к виду:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{p}(t) = A^*(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{g}\,(t)\,,\ t\ge 0, \qquad (2)$$

где $\mathbf{g}\,(t) = (\gamma\,(t)\,, 0, 0, \dots)^{\mathrm{T}}$, а $A^*(t)$ — матрица с элементами $a^*_{ij}(t)$,

$$a^*_{ij}\,(t) = \begin{cases} a_{0j}\,(t) - \gamma\,(t) & \text{при } i = 0\,; \\ a_{ij}\,(t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее будем предполагать, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^\infty (\gamma(t) - \varepsilon\lambda(t))\,dt = \infty. \qquad (3)$$

Если, в частности, интенсивности постоянны, то (3) выполнено при положительном γ, а если 1-периодичны, то для выполнения (3) достаточно, чтобы $\int_0^1 \gamma(t)\,dt > 0$.

Как показано в [3], выполнение условия (3) гарантирует слабую эргодичность $X(t)$ в равномерной операторной топологии и оценку

$$\|\mathbf{p}^*\,(t) - \mathbf{p}^{**}\,(t)\| \le e^{-\int_0^t \gamma(u)\,du}\,\|\mathbf{p}^*\,(0) - \mathbf{p}^{**}\,(0)\| \le \\ \le 2e^{-\int_0^t \gamma(u)\,du},\ t\ge 0, \qquad (4)$$

справедливую при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*\,(0)$ и $\mathbf{p}^{**}\,(0)$.

Однако, как и в предыдущих работах, интерес представляет не само наличие предельного режима, а возможность его построения.

Для получения нужных свойств и оценок потребуются некоторые вспомогательные «взвешенные» нормы.

Положим $d_0 = 1$, и пусть $\{d_k\}$ — неубывающая последовательность, $k\ge 0$. Рассмотрим диагональную матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}\,(d_0, d_1, d_2, \dots)$.

Тогда из (2) получим уравнение:

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{\mathbf{p}}(t) = \tilde{A}^*(t)\tilde{\mathbf{p}}(t) + \tilde{\mathbf{g}}\,(t)\,, \qquad (5)$$

где $\tilde{\mathbf{p}}(t) = \Lambda\mathbf{p}(t)$; $\tilde{A}(t) = \Lambda A(t)\Lambda^{-1}$; $\tilde{\mathbf{g}}(t) = \Lambda\mathbf{g}(t)$.

Далее будем оценивать логарифмическую норму оператора $\tilde{A}(t)$. Если обозначить через $-\tilde{\alpha}_k(t)$ сумму всех элементов k-го столбца матрицы $\tilde{A}(t)$, то получим

$$\tilde{\alpha}_0(t) \ge \gamma(t) - \lambda(t)\sum_{j=1}^\infty\left(\frac{d_j}{d_0} - 1\right) := \beta(t);$$

$$\tilde{\alpha}_k(t) \ge \gamma(t) - \lambda(t)\sum_{j=k+1}^\infty\left(\frac{d_j}{d_k} - 1\right) \ge \tilde{\alpha}_0(t) = \beta(t), \\ k\ge 1\,.$$

Из условия (1) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что

$$\sum_{k\ge N}(k-1)\,b_k < \varepsilon.$$

Положим теперь $d_k = 1$, если $k < N$, и $d_k = k$ при $k\ge N$.

Тогда логарифмическая норма оператора $\tilde{A}(t)$ равна

$$-\beta^*(t) = \sup_i\left\{\tilde{a}_{ii}(t) + \sum_{j\ne i}\tilde{a}_{ji}(t)\right\} = -\beta(t) \le \\ \le -\left(\gamma(t) - \varepsilon\lambda(t)\right).$$

Следовательно, вместо (4) получаем

$$\|\tilde{\mathbf{p}}^*\,(t) - \tilde{\mathbf{p}}^{**}\,(t)\| \le e^{-\int_0^t \beta(u)\,du}\,\|\tilde{\mathbf{p}}^*\,(0) - \tilde{\mathbf{p}}^{**}\,(0)\|\,, \\ t\ge 0\,.$$

Далее, сравнивая соответствующие нормы и математические ожидания, получаем такое утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (3). *Тогда $X(t)$ слабо эргодичен, имеет предельное среднее и справедливы следующие оценки скорости сходимости*:

$$\|\mathbf{p}^*\,(t) - \mathbf{p}^{**}\,(t)\| \le e^{-\int_0^t \beta(u)\,du}\,\|\tilde{\mathbf{p}}^*\,(0) - \tilde{\mathbf{p}}^{**}\,(0)\|\,, \\ t\ge 0\,;$$

$$|E(t,k) - E(t,0)| \le kNe^{-\int_0^t \beta(u)\,du}, \qquad t\ge 0\,,$$

где $E(t, j)$ — математическое ожидание (среднее число требований) для $X(t)$ при условии, что $X(0) = j$.

Оценим теперь само предельное среднее. Дополнительно предположим выполнение условий

$$e^{\int_s^t \beta(u)\,du} \le Re^{-a(t-s)}, \ \ \gamma(t) \le \theta, \tag{6}$$

для всех $0 \le s \le t$ при некоторых положительных R, a и θ.

Обозначим через $\tilde{U}(t, s)$ оператор Коши уравнения (5). Тогда получим

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = \tilde{U}(t,0)\tilde{\mathbf{p}}(0) + \int\limits_0^t \tilde{U}(t,\tau)\tilde{\mathbf{g}}\,(\tau)\,d\tau,$$

откуда

$$\limsup_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{p}}(t) \le \limsup_{t\to\infty} \int\limits_0^t Re^{-a(t-\tau)}\theta\,d\tau \le \frac{R\theta}{a}\,.$$

Тогда имеем

Следствие 1. Пусть выполнены условия (1) и (6). Тогда при любом k справедлива следующая оценка:

$$\limsup_{t\to\infty} E(t, k) \le \frac{NR\theta}{a}\,.$$

4 Аппроксимация усечениями

В заключение рассмотрим вопрос о построении предельного режима и предельного среднего с помощью аппроксимации усеченными процессами. Получение не зависящих от времени оценок при таких аппроксимациях описано в 4, 5].

Аналогично этим работам, будем отождествлять конечные векторы и счетные векторы с теми же ненулевыми координатами. Рассмотрим «усеченную» матрицу (для краткости зависимость от t не записываем)

$$A_K^* = \begin{pmatrix} -\lambda B_1^* - \gamma & \mu & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \lambda b_1 & -(\lambda B_2^* + \mu + \gamma) & \mu & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda b_K & \lambda b_K & \dots & \dots & \dots & \dots & -(\lambda B_K^* + \mu + \gamma) \end{pmatrix},$$

где $B_k^* = \sum_{j=k}^K b_j$.

Запишем аналогичную (2) систему для усеченного процесса в виде:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{p}_K(t) = A^*(t)\mathbf{p}_K(t) + \mathbf{g}\,(t) + {} + (A_K^*(t) - A^*(t))\,\mathbf{p}_K(t), \ \ t \ge 0\,.$$

Тогда

$$\mathbf{p}_K(t) = U(t,0)\mathbf{p}(0) + \int\limits_0^t U(t,\tau)\mathbf{g}\,(\tau)\ d\tau + {} + \int\limits_0^t U(t,\tau)\,(A_K^*(\tau) - A^*(\tau))\,\mathbf{p}_K(\tau)\,d\tau = {} = \mathbf{p}(t) + \int\limits_0^t U(t,\tau)\,(A_K^*(\tau) - A^*(\tau))\,\mathbf{p}_K(\tau)\,d\tau,$$

где $U(t, s)$ — оператор Коши уравнения (2).

Следовательно, в любой норме справедлива оценка:

$$\|\mathbf{p}\,(t) - \mathbf{p}_K\,(t)\| \le {} \le \int\limits_0^t \|U(t,\tau)\|\|\,(A_K^*(\tau) - A^*(\tau))\,\mathbf{p}_K(\tau)\|\,d\tau. \tag{7}$$

Рассмотрим норму $\|\mathbf{x}\|_\Lambda = \|\Lambda\mathbf{x}\|$, тогда $\|\tilde{U}(t, s)\| = \|U(t, s)\|_\Lambda \le Re^{-a(t-s)}$.

Для оценки второго множителя под знаком интеграла в (7) отметим, что в левом верхнем квадрате матрицы $A_K^* - A^*$ (где оба индекса не превосходят K) ненулевыми являются только диагональные элементы, каждый из которых равен $-\lambda B_K$. Значит,

$$(A_K^*(\tau) - A^*(\tau))\,\mathbf{p}_K(\tau) = {} = -\lambda(\tau)B_K\,(p_0(\tau), \dots, p_K(\tau))^{\mathrm{T}}\,.$$

А тогда, предполагая, что $\lambda(t) \le \theta$ при всех t, получаем

$$\|\,(A_K^*(\tau) - A^*(\tau))\,\mathbf{p}_K(\tau)\| \le {} \le B_K\theta \sum_{k\le K} d_k p_k(\tau) \le B_K N\theta\,.$$

Тогда правая часть в (7) в Λ-норме не превосходит $B_K NR\theta/a$ и получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (6). *Тогда при* $X(0) = 0$ *справедливы следующие оценки*:

$$\|\mathbf{p}\,(t) - \mathbf{p}_K\,(t)\| \le \frac{B_K NR\theta}{a} \to 0 \text{ при } k \to \infty\,;$$

$$|E(t, 0) - E_K(t, 0)| \le \frac{B_K N^2 R\theta}{a} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

5 Численный пример

Рассмотрим описанную модель с интенсивностями $\gamma = 1$, $\lambda(t) = 1 + \sin 2\pi t$ и $\mu(t) = 1 + {} + \cos 2\pi t$, предполагая при этом, что $b_k = 4/((k(k + {} + 1)(k + 2)))$, т. е. убывание имеет степенной характер.

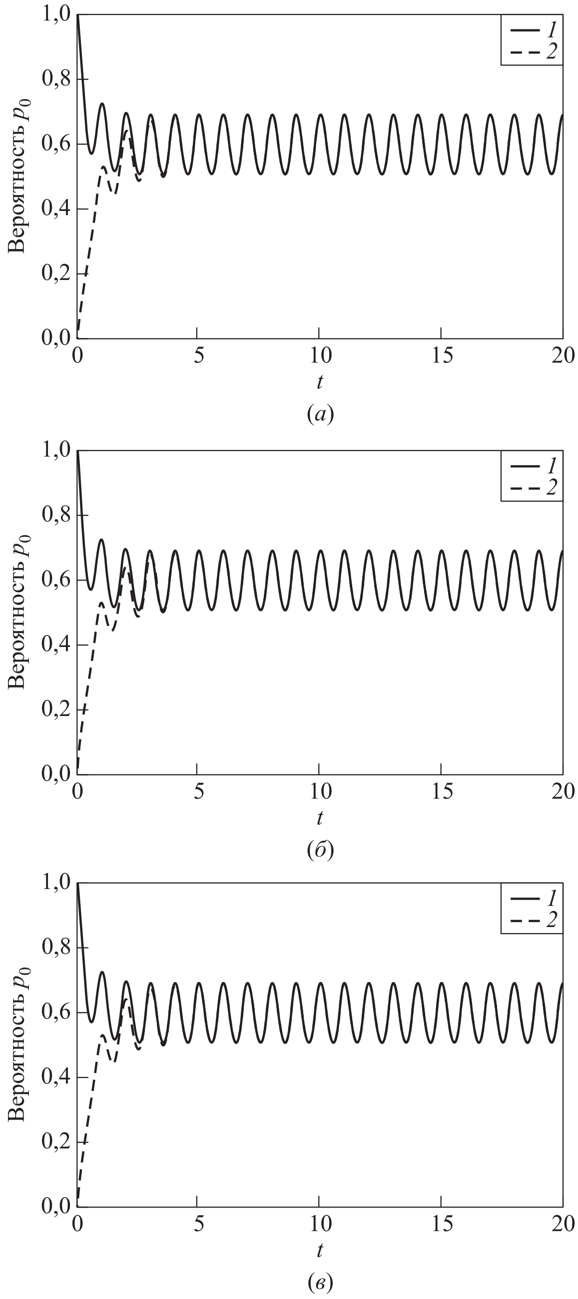

Рис. 1 Поведение вероятности $p_0(t)$ для усеченного процесса, интервал $[0, 20]$: (*а*) 100 состояний; (*б*) 200; (*в*) 300 состояний; *1* — $x(0) = 0$; *2* — $x(0) = 100$

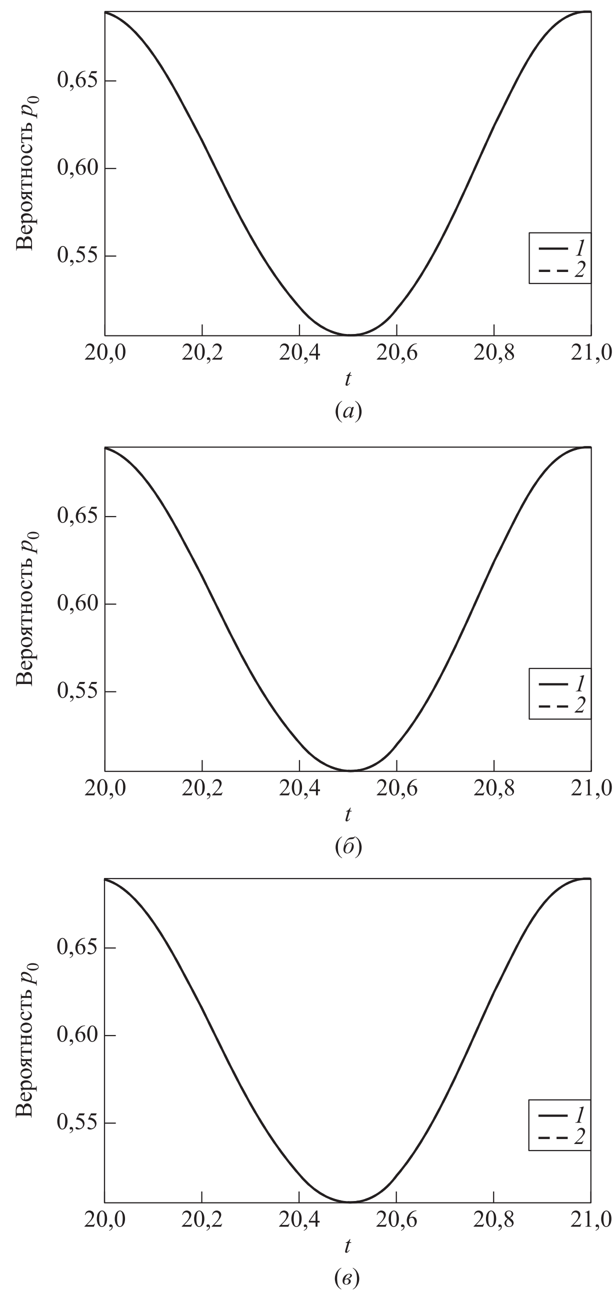

Рис. 2 Предельная вероятность $p_0(t)$ для усеченного процесса, интервал $[20, 21]$: (*а*) 100 состояний; (*б*) 200; (*в*) 300 состояний; *1* — $x(0) = 0$; *2* — $x(0) = 100$

На рис. 1–4 показано поведение вероятности отсутствия требований в системе $p_0(t)$ и среднего числа требований в системе $E(t, k)$ для усеченных процессов с числом состояний 100, 200 и 300.

Можно отметить, что погрешность вектора вероятностей состояний при усечениях, соответствующих $K = 100$ и 200, получается $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ и $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ соответственно, а для средних — $7{,}2 \cdot 10^{-2}$ и $7{,}2 \cdot 10^{-3}$ соответственно.

Литература

1. *Marin A., Rossi S.* A queueing model that works only on the biggest jobs // 16th European Computer Performance Engineering Workshop Revised Selected Papers / Eds. M. Gribaudo, M. Iacono, T. Phung-Duc, R. Razumchik. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2020. Vol. 12039. P. 118–132.
2. *Zeifman A. I., Razumchik R. V., Satin Y. A., Kovalev I. A.* Ergodicity bounds for the Markovian queue with time-

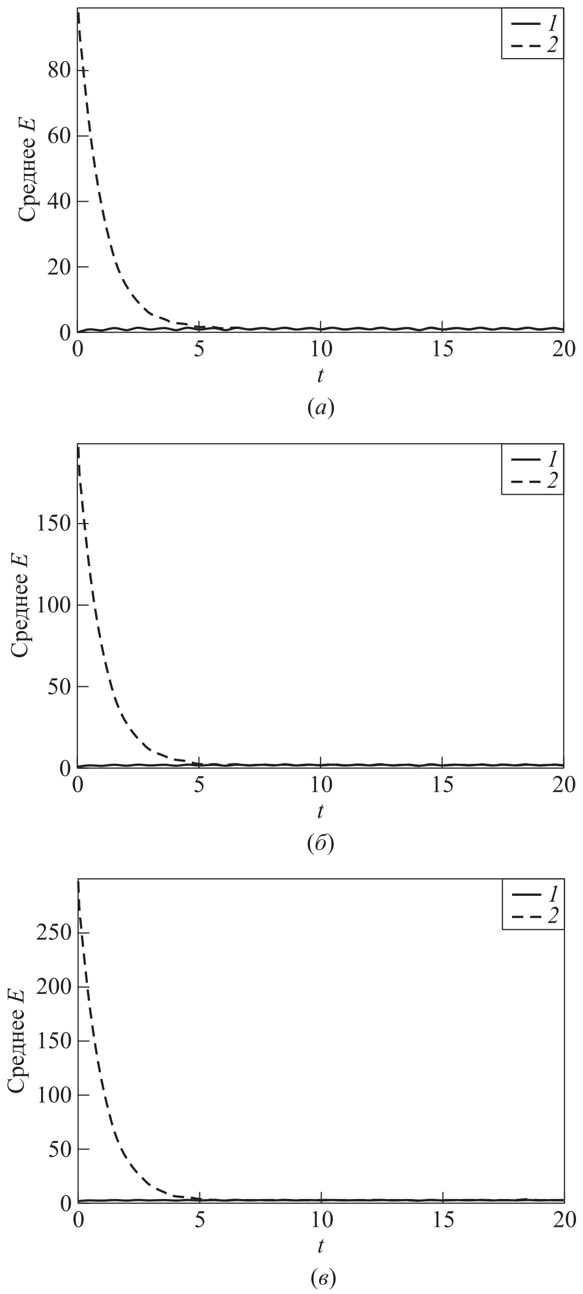

Рис. 3 Поведение среднего $E(t,k)$ для усеченного процесса, интервал $[0,20]$: (*а*) 100 состояний; (*б*) 200; (*в*) 300 состояний; *1* — $x(0)=0$; *2* — $x(0)=100$

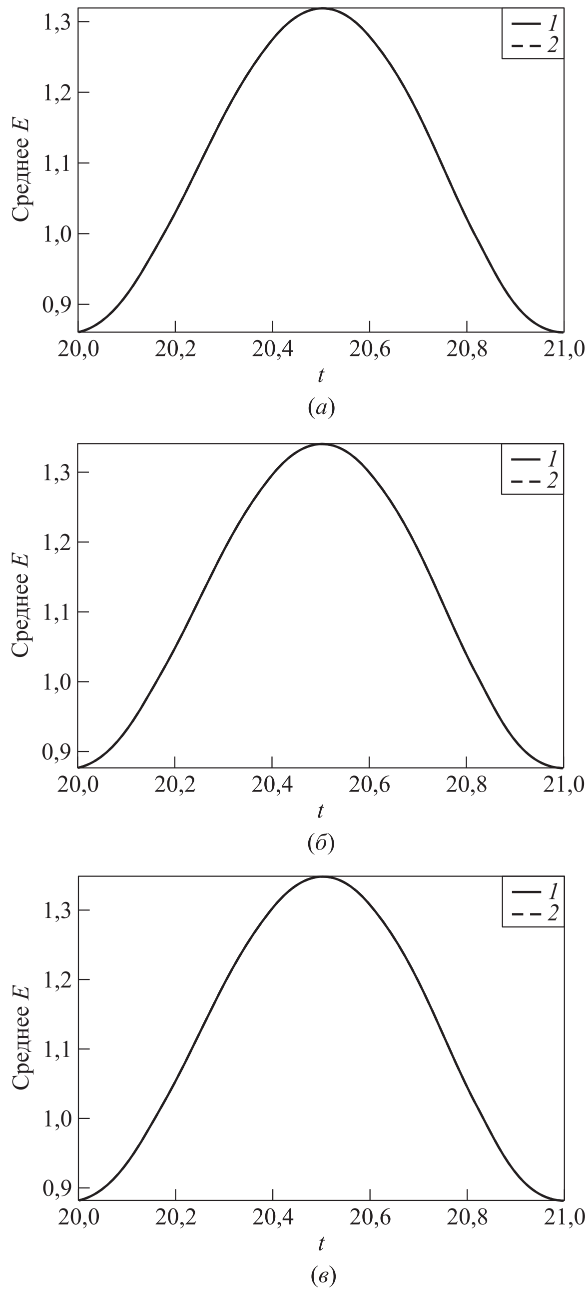

Рис. 4 Предельное среднее $E(t,k)$ для усеченного процесса, интервал $[20,21]$: (*а*) 100 состояний; (*б*) 200; (*в*) 300 состояний; *1* — $x(0)=0$; *2* — $x(0)=100$

varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy // Appl. Math. Comput., 2021. Vol. 395. Art. 125846.

3. *Zeifman A., Satin Y., Kovalev I., Razumchik R., Korolev V.* Facilitating numerical solutions of inhomogeneous continuous time Markov chains using ergodicity bounds obtained with logarithmic norm method // Mathematics, 2021. Vol. 9. Iss. 1. Art. 42. 20 p.

4. *Zeifman A., Satin Y., Korolev V., Shorgin S.* On truncations for weakly ergodic inhomogeneous birth and death processes // Int. J. Appl. Math. Comp., 2014. Vol. 24. No. 3. P. 503–518.

5. *Зейфман А. И., Коротышева А. В., Королев В. Ю., Сатин Я. А.* Оценки погрешности аппроксимаций неоднородных марковских цепей с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применения, 2016. Т. 61. № 3. С. 563–569.

Поступила в редакцию 07.03.2021

ON ONE NONSTATIONARY SERVICE MODEL WITH CATASTROPHES AND HEAVY TAILS

A. I. Zeifman[1,2,3], Ya. A. Satin[1], and I. A. Kovalev[1]

[1]Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation
[2]Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation
[3]Vologda Research Center of the Russian Academy of Sciences, 56A Gorky Str., Vologda 160014, Russian Federation

Abstract: The paper considers the nonstationary queuing system with catastrophes, one server, and special group arrivals of requests. The intensities of increasing groups of requests can decrease rather slowly. The process $X(t)$, which describes the number of requirements in such system, is considered, the existence of a limiting regime of the probability distribution of states and a limiting average for $X(t)$ is proved, and estimates of the rate of convergence to the limiting regime and the limiting average are obtained. Approximation estimates are obtained using truncations by finite processes. As an example, the authors consider a simple model of a nonstationary system with a rather slow rate of decrease in the arrival rates of customer groups when the group size grows.

Keywords: nonstationary queuing system; countable Markov chains; limiting characteristics; rate of convergence; approximation

DOI: 10.14357/19922264210203

Acknowledgments

This work was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 19-11-00020).

References

1. Marin, A., and S. Rossi. 2020. A queueing model that works only on the biggest jobs. *16th European Computer Performance Engineering Workshop Revised Selected Papers*. Eds. M. Gribaudo, M. Iacono, T. Phung-Duc, and R. Razumchik. Lecture notes in computer science ser. Springer. 12039:118–132.
2. Zeifman, A. I., R. V. Razumchik, Y. A. Satin, and I. A. Kovalev. 2021. Ergodicity bounds for the Markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy. *Appl. Math. Comput.* 395:125846. 11 p.
3. Zeifman, A., Y. Satin, I. Kovalev, R. Razumchik, and V. Korolev. 2021. Facilitating numerical solutions of inhomogeneous continuous time Markov chains using ergodicity bounds obtained with logarithmic norm method. *Mathematics* 9(1):42. 20 p.
4. Zeifman, A., Y. Satin, V. Korolev, and S. Shorgin. 2014. On truncations for weakly ergodic inhomogeneous birth and death processes. *Int. J. Appl. Math. Comp.* 24(3):503–518.
5. Zeifman, A. I., A. V. Korotysheva, V. Y. Korolev, and Ya. A. Satin. 2017. Truncation bounds for approximations of inhomogeneous continuous-time Markov chains. *Theor. Probab. Appl.* 61(3):513–520.

Received March 7, 2021

Contributors

Zeifman Alexander I. (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Head of Department, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; principal scientist, Vologda Research Center of the Russian Academy of Sciences, 56A Gorky Str., Vologda 160014, Russian Federation; a_zeifman@mail.ru

Satin Yacov A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; yacovi@mail.ru

Kovalev Ivan A. (b. 1996) — PhD student, Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; kovalev.iv96@yandex.ru