О. В. Герасимова, Rolling simplexes and their commensurability. II (лемма о директрисе и фокусе),
Фундамент. и прикл. матем., 2014, том 19, выпуск 1, 13–19

Rolling simplexes and their commensurability. II (лемма о директрисе и фокусе)

О. В. ГЕРАСИМОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ynona.olga@gmail.com

УДК 512.543.7+512.544.33+512.815.8+517.984.5+514.84

Ключевые слова: роллинг, центрально-квадратичная динамика, директриса, фокус.

Аннотация

Обсуждается и обосновывается закон центрально-квадратичной динамики

$$(x,y,z)'' = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)+\delta)^2}(x-a,y-b,z-c),$$

выражающий фокусировки плоской волны в точке (a,b,c).

Abstract

O. V. Gerasimova, Rolling simplexes and their commensurability. II (a lemma on the directrix and focus), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 1, pp. 13—19.

The law of central-square dynamics

$$(x,y,z)'' = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)+\delta)^2}(x-a,y-b,z-c),$$

expressing the focusing of a plane wave at the point (a,b,c) is discussed and justified.

1. Лемма о директрисе и фокусе

Пусть на аффинной действительной (комплексной) плоскости квадратичная кривая задана уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Проведём из точки $A \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, y_0)$ этой кривой прямую, проходящую через начало координат $O \stackrel{\text{def}}{=} (0,0)$. Пусть $A' \stackrel{\text{def}}{=} (x_0', y_0')$ — вторая точка прямой AO, лежащая на квадратичной кривой. Хорошо известно [2], что пересечение касательных, проведённых к ней из точек A и A', лежит на прямой

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Будем называть эту прямую директрисой нашей кривой относительно фокуса $O = (0,0)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 1, с. 13—19.

Лемма о директрисе и фокусе. *Для любых действительных* α, β, δ, k *бесконечно дифференцируемые решения* $x(t)$, $y(t)$ $(x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)\neq 0)$ *уравнения*

$$(x'',y'')=-\frac{4\pi^2k}{(\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta)^3}\cdot(x-a,y-b)\quad (a,b\in\mathbb{R}) \tag{1}$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a,b), *а директриса определяется уравнением*

$$\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta=0.$$

Доказательство. Рассмотрим тензор $H=(g_{ij})_{i,j=1,2,3}$, составленный из следующих элементов:

$$g_{1,1}=-\frac{1}{(xy'-x'y)^2}\times$$
$$\times\left(4\pi^2k\frac{1}{(\alpha x+\beta y+\delta)^2}(y-b)^2+2\alpha\big((x-a)y'-x'(y-b)\big)y'+\delta(y')^2\right),$$
$$g_{1,2}=g_{2,1}=\frac{1}{(xy'-x'y)^2}\times$$
$$\times\left(4\pi^2k\frac{1}{(\alpha x+\beta y+\delta)^2}(x-a)(y-b)+(\alpha x'-\beta y')\big((x-a)y'-x'(y-b)\big)+\delta x'y'\right),$$
$$g_{2,2}=-\frac{1}{(xy'-x'y)^2}\times$$
$$\times\left(4\pi^2k\frac{1}{(\alpha x+\beta y+\delta)^2}(x-a)^2-2\beta\big((x-a)y'-x'(y-b)\big)x'+\delta(x')^2\right),$$
$$g_{1,3}=g_{3,1}=\alpha,\quad g_{2,3}=g_{3,2}=\beta,\quad g_{3,3}=\delta.$$

Непосредственная проверка показывает, что

1) для любого f элемента матрицы H выполняется $f'=0$, то есть он является первым интегралом системы дифференциальных уравнений (1);
2) выполняется равенство
$$g_{1,1}x^2+2g_{1,2}xy+g_{2,2}y^2+2g_{1,3}x+2g_{2,3}y+g_{3,3}=0;$$
3) $\det H=4\pi^2k/\sigma^2$, где $\sigma=xy'-x'y$.

Таким образом, при начальных условиях x_0, y_0, x'_0, y'_0 движение происходит по кривой второго порядка, определённой матрицей $H(x_0,y_0,x'_0,y'_0)$, специализированной в начальных условиях. □

Замечание. Особо отметим, что, умножив (1) скалярно на вектор (α,β), получим дифференциальное уравнение на $r\stackrel{\mathrm{def}}{=}\alpha x+\beta y+\delta$ вида

$$r''=-\frac{4\pi^2k}{r^3}(r-\varepsilon),$$

где $\varepsilon\stackrel{\mathrm{def}}{=}\alpha a+\beta b+\delta$.

Непосредственным следствием этого утверждения является утверждение о достаточности необходимого условия Н. Никчёмного (см. [2, теорема 3.8.2]).

Теорема. *Пусть аналитические функции $x(t)$, $y(t)$ над $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ таковы, что*
$$\dim_K\bigl(K\cdot x(t)+K\cdot y(t)\bigr)=2$$
и они являются решением системы уравнений
$$xy''-x''y=0,$$
$$\begin{pmatrix} x' & y' & \left(\left(\frac{x'y''-x''y'}{xy'-x'y}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' \\ x'' & y'' & \left(\left(\frac{x'y''-x''y'}{xy'-x'y}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)'' \\ x''' & y''' & \left(\left(\frac{x'y''-x''y'}{xy'-x'y}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)''' \end{pmatrix}=0.$$
Тогда кривая $x(t)$, $y(t)$ содержится в невырожденной кривой второго порядка.

Доказательство. Из первого уравнения следует, что
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=-w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
где
$$w=\frac{x'y''-x''y'}{xy'-x'y}.$$
Обозначим
$$\alpha=\frac{y'(w^{-1/3})''-y''(w^{-1/3})'}{\sigma_{12}},\quad \beta=\frac{x''(w^{-1/3})'-x'(w^{-1/3})''}{\sigma_{12}}.$$
Из второго равенства получаем по основному свойству определителя Вронского, что
$$(w^{-1/3})'=\alpha x'+\beta y'.$$
Значит,
$$\delta\overset{\text{def}}{=}w^{-1/3}-\alpha x-\beta y$$
является константой. Тогда
$$w^{-1/3}=\alpha x+\beta y+\delta.$$
Поэтому
$$x''(t)=-\frac{1}{(\alpha x(t)+\beta y(t)+\delta)^3}x(t),\quad y''(t)=-\frac{1}{(\alpha x(t)+\beta y(t)+\delta)^3}y(t).$$
По условию $\sigma\overset{\text{def}}{=}xy'-x'y\neq 0$. Утверждение теоремы вытекает из явного вида элементов матрицы H и свойства 2) из леммы о фокусе и директрисе. $\square$

Теперь рассмотрим примеры центральных полей, динамика которых квадратична (см. [2, п. 1]).

2. Гармонический осциллятор

Рассмотрим дифференциальную алгебру, определяющую движение гармонического осциллятора, заданную двумя образующими x, y и определяющими соотношениями
$$(x'', y'') = -h\big(x(t), y(t)\big) \quad (h \in K).$$
Заметим, что данная система уравнений является частным случаем леммы о моменте при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 1$. Соответственно, траектория движения является квадратичной кривой, заданной матрицей H_h, состоящей из следующих элементов, определённых в начальных условиях задачи Коши x_0, y_0, x'_0, y'_0:
$$g_{1,1} = -\frac{1}{(xy' - x'y)^2}(hy^2 + (y')^2), \quad g_{1,2} = g_{2,1} = \frac{1}{(xy' - x'y)^2}(hxy + x'y'),$$
$$g_{2,2} = -\frac{1}{(xy' - x'y)^2}(hx^2 + (x')^2), \quad g_{1,3} = g_{3,1} = 0, \quad g_{2,3} = g_{3,2} = 0, \quad g_{3,3} = 1.$$

3. Первые интегралы для полей кулонова типа

Дифференциальная алгебра E, отвечающая полям кулонова типа, задается тремя образующими x, y, r и тремя определяющими соотношениями
$$r^3x'' = -4\pi^2kx, \quad r^3y'' = -4\pi^2ky, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$
где $k \in K = \mathbb{R}$. Дважды продифференцировав последнее уравнение, получим
$$rr'' + (r')^2 = xx'' + yy'' + \big((x')^2 + (y')^2\big).$$
Умножив равенство на r^4 и воспользовавшись первыми двумя соотношениями, обнаружим, что
$$r\left(r^3r'' + 4\pi^2k\left(r - \frac{\sigma^2}{4\pi^2k}\right)\right) = 0,$$
где $\sigma = xy' - x'y$. Имеется две возможности.

1. $r = 0$ и $(x + iy)(x - iy) = 0$, но этот случай не физический.

2. $r^3r'' = -4\pi^2k\big(r - \sigma^2/(4\pi^2k)\big)$. Таким образом, в локализованной по r алгебре $E[r^{-1}]$ выполняются соотношения
$$x'' = -\frac{4\pi^2k}{r^3}x, \quad y'' = -\frac{4\pi^2k}{r^3}y, \quad r'' = -\frac{4\pi^2k}{r^3}\left(r - \frac{\sigma^2}{4\pi^2k}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Пусть
$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{4\pi^2k}.$$
Положим
$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{yr' - (r - \delta)y'}{\sigma}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(r - \delta)x' - rx}{\sigma}.$$

Тогда непосредственной проверкой обнаруживаем, что α, β, δ являются первыми интегралами, значит, движение происходит в плоскости $\alpha x + \beta y = r - \delta$. Для задачи Коши с заданными начальными условиями x_0, y_0, r_0, x'_0, y'_0, r'_0 движение происходит по кривой второго порядка, определённой уравнением $x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = 0$, специализированным в начальных условиях.

4. Модифицированные поля кулонова типа

Рассмотрим модификацию кулонова поля, задающуюся системой уравнений

$$(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{r^3}(x, y),$$

где $r^2 = m_{1,1}x^2 + 2m_{1,2}xy + m_{2,2}y^2$. Аналогично предыдущему определим

$$\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{yr' - (r-\delta)y'}{\sigma}, \quad \beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{(r-\delta)x' - r'x}{\sigma},$$

где

$$\delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sigma^2}{4\pi^2 k} \det \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{1,2} & m_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Тогда решение $x(t)$, $y(t)$ лежит на квадратичной кривой, заданной следующей матрицей, специализированной для начальных условий задачи Коши x_0, y_0, r_0, x'_0, y'_0, r'_0:

$$H_{MK} = \left.\begin{pmatrix} m_{1,1} - \alpha & m_{1,2} - \alpha\beta & \alpha\delta \\ m_{1,2} - \alpha\beta & m_{2,2} - \beta & \beta\delta \\ \alpha\delta & \beta\delta & -\delta^2 \end{pmatrix}\right|_{x=x_0,\ y=y_0,\ r=r_0,\ x'=x'_0,\ y'=y'_0,\ r=r'_0}.$$

Замечание. Если

$$\det \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{1,2} & m_{2,2} \end{pmatrix} = 0,$$

то уравнение принимает вид

$$(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\pm(\alpha x + \beta y))^3}(x, y),$$

где $m_{1,1}x^2 + 2m_{1,2}xy + m_{2,2}y^2 = (\alpha x + \beta y)^2$.

5. Расширение Н. Никчёмного алгебры Декарта—Уоттона

Определённая в [2] алгебра D задаётся образующими x, y, w и определяющими соотношениями

$$x'' = -wx, \quad y'' = -wy, \quad 9w^2 w''' = (45w''w'w - 40(w')^3 - 9w'w^3).$$

Рассмотрим алгебру, получающуюся присоединением к алгебре Декарта—Уоттона D ещё одного элемента d (а также единичного элемента), связанного соотношением $wd^3 = 1$. Отметим, что в полученной алгебре элементы d и w обратимы. Из ключевого уравнения центрально-квадратичной динамики получаем, что

$$d^3 d''' + 3d^2 d' d'' + d' = 0.$$

Следовательно, локализация по элементу d алгебры G, заданной тремя образующими x, y, d и определяющими соотношениями

$$d^3 x'' = -x, \quad d^3 y'' = -y, \quad d^3 d''' + 3d^2 d' d'' + d' = 0, \tag{2}$$

изоморфна локализации алгебры Декарта—Уоттона D по элементу w.

Рассмотрим тензор H_G, составленный из следующих элементов алгебры $G[d^{-1}]$:

$$\begin{aligned}
&g_{3,3} \stackrel{\text{def}}{=} -(xy' - x'y)^2 (d^2 d'' + 1) d,\\
&g_{3,2} = g_{2,3} \stackrel{\text{def}}{=} -(xy' - x'y)(d^3 d'' x' + d' x),\\
&g_{3,1} = g_{1,3} \stackrel{\text{def}}{=} -(xy' - x'y)(d^3 d'' y' + d' y),\\
&g_{2,2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{d^2}(x^2 - 2d^2 d' x x' + (x')^2 (1 - d^2 d'') d^3),\\
&g_{1,1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{d^2}(y^2 - 2d^2 d' y y' + (y')^2 (1 - d^2 d'') d^3),\\
&g_{2,1} = g_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{d^2}(xy - \frac{4}{3} d^2 d' (xy' + x'y) + x'y'(1 - d^2 d'') d^3).
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой выясняем, что

1) $g_{1,1} x^2 + 2g_{1,2} xy + g_{2,2} y^2 + 2g_{1,3} x + 2g_{2,3} y + g_{3,3} = 0$;
2) $(g_{i,j})' = 0$, т. е. $g_{i,j}$ являются «первыми интегралами» (константами) дифференциальной алгебры $G[d^{-1}]$;
3) $\det H_G = -\sigma^4$.

Тогда в локализованной алгебре $G[d^{-1}]$ решение этой системы дифференциальных уравнений лежит на квадратичной кривой, задающейся матрицей H_G, специализированной для начальных условий x_0, y_0, d_0, x_0', y_0', d_0', d_0''. Более того, множитель $d^3 d'' + d = \delta$ является первым интегралом для третьего уравнения системы (2).

Таким образом, локализация $G[d^{-1}]$ вкладывается в локализацию $\tilde{G}[d^{-1}]$, где дифференциальная алгебра $\tilde{G}$ задаётся образующими x, y, d, δ и определяющими соотношениями

$$x'' = -\frac{1}{d^3} x, \quad y'' = -\frac{1}{d^3} y, \quad d'' = -\frac{1}{d^3}(d - \delta), \quad \delta' = 0.$$

6. Универсум Гука

Рассматриваемая система уравнений имеет вид

$$s_0' = 0, \quad (x'', y'', s'') = -\frac{1}{\tau_S^2}\frac{1}{s^3(t)}(x, y, s - s_0),$$

где $\tau_S \overset{\text{def}}{=} 4\pi^2 k_S/c^3 \in K$.

Аналогично полям кулонова типа определим

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{ys' - (s - s_0)y'}{\sigma}, \quad \beta \overset{\text{def}}{=} \frac{(s - s_0)x' - s'x}{\sigma},$$

где, как принято, $\sigma = xy' - x'y$. Тогда $\alpha x + \beta y - s + s_0 = 0$, и мы получаем знакомую систему уравнений

$$(x'', y'') = -\frac{1}{\tau_s^2}\frac{1}{(\alpha x + \beta y + s_0)^3}(x, y).$$

Тогда элементы матрицы H_H, задающей квадратичную кривую, на которой лежат решения соответствующих дифференциальных уравнений $\big(x(t), y(t)\big)$, имеют вид

$$\begin{aligned}
g_{1,1} &= -\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\tau_S^2 s^2}y^2 + 2(ys' - y's)y' + 3s_0(y')^2\right),\\
g_{1,2} = g_{2,1} &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\tau_S^2 s^2}xy + (xy' + xy')s' + (2s - 3s_0)x'y'\right),\\
g_{2,2} &= -\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\tau_S^2 s^2}x^2 - 2(sx' - s'x)x' + 3s_0(x')^2\right),\\
g_{1,3} = g_{3,1} &= \frac{ys' - (s - s_0)y'}{\sigma}, \quad g_{2,3} = g_{3,2} = \frac{(s - s_0)x' - s'x}{\sigma}, \quad g_{3,3} = s_0.
\end{aligned}$$

Литература

[1] Герасимова О. В. Rolling simplexes and their commensurability. I (аксиома и критерий несжимаемости и лемма о моменте) // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 2. — С. 87—95.

[2] Размыслов Ю. П. Разъяснение к «Rolling simplexes and their commensurability» (уравнения поля по Тихо Браге) // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 193—215.