Г. С. Аброськина, Б. С. Митягин, О последовательностях коэффициентов Фурье функций гёльдеровских классов,
Матем. заметки, 1969, том 6, выпуск 5, 567–572

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 567—572

УДК 517.5

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ГЁЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССОВ

Г. С. Аброськина, Б. С. Митягин

Доказывается следующая теорема. Пусть $\{\psi_k(t)\}$ — произвольная полная ортонормированная система на $[0,1]$ и $1/2 < \alpha < 1$. Тогда найдется такая $f(t) \in C_\beta$ при всех $\beta < \alpha$, что $\Sigma_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^p = \infty$, $p = 2/(1 + 2\alpha)$, где $c_k(f) = \int_1^0 f\psi_k\,dt$.

Библ. 6 назв.

Известная теорема Бернштейна — Саса ([1], стр. 387) утверждает, что если f — функция из класса Гёльдера C_α, $0 < \alpha \leqslant 1$, c_k — ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, то $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p < \infty$ при $p > 2/(1 + 2\alpha)$, но для $p = 2/(1 + 2\alpha)$ существует такая $f \in C_\alpha$, что $\sum |c_k|^p = \infty$. Одним из авторов было показано [2], что при $\alpha = 1/2$ вторая часть этого утверждения верна для любой полной ортонормированной системы на $[0, 1]$.

Основная цель настоящей заметки — перенести этот результат на все показатели $1/2 < \alpha < 1$. Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\{\psi_k\}$ — *произвольная полная ортонормированная система на* $[0, 1]$ *и* $1/2 < \alpha < 1$. *Тогда найдется такая* $f \in C_\beta$ *при всех* $\beta < \alpha$, *что* $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^p = \infty$, $p = 2/(1 + 2\alpha)$, *где*

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)\,\psi_k(t)\,dt.$$

Для доказательства этой теоремы потребуется результат для случая $\alpha = 1/2$ и интерполяционная теорема для линейных операторов, действующих из C_α в l_p, $0 < p < \infty$.

Напомним, что C_α — банахово пространство периодических комплекснозначных функций $u(x)$, $-\infty < x < +\infty$, с периодом 1, удовлетворяющих условию Гёльдера, с нормой

$$\|u\|_{C_\alpha} = \max\left(\sup_x |u(x)|, \sup_{x, y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}\right);$$

$l_{1/\beta}$ — пространство комплекснозначных последовательностей $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, для которых

$$\|\xi\|_{1/\beta} = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^{1/\beta}\right)^\beta < \infty.$$

ЛЕММА ([2], стр. 1047). *Для любой полной ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ на $[0, 1]$ существует такая функция $f \in C_{1/2}$, что*

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k(f)| = \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть линейный оператор A действует из C_{α_j} в l_{1/β_j} ($j = 0, 1$; $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$; $0 \leqslant \beta_j < \infty$) и*

$$\|Ax\|_{1/\beta_j} \leqslant M_j \|x\|_{C_{\alpha_j}}.$$

Тогда A действует из C_α в $l_{1/\beta}$, где $\alpha = (1 - \lambda)\alpha_0 + \lambda\alpha_1$, $\beta = (1 - \lambda)\beta_0 + \lambda\beta_1$, $0 < \lambda < 1$, причем

$$\|Ax\|_{1/\beta} \leqslant K M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda \|x\|_{C_\alpha}.$$

Сначала, опираясь на теорему 2, проведем

Доказательство теоремы 1. Пусть $E = \bigcap_{\beta < \alpha} C_\beta$ — метрическое пространство со счетной системой норм $\|\cdot\|_{\beta_n}$, $\beta_n \uparrow \alpha$. Если бы для любой $f \in E$ последовательность $\{c_k(f)\} \in l^p$, то оператор A, будучи замкнутым, был бы непрерывен, как оператор из E в l^p, и нашлось бы $\beta < \alpha$ такое, что A непрерывно действует из C_β в l^p. Кроме того, очевидно, что при любом $\delta > 0$ оператор A непрерывно действует из C^δ в l_2. Выберем $\delta = (p + 2\beta p - 2)/4(p - 1)$. Тогда по теореме 2 A действует из $C^{1/2}$ в l_1, что противоречит лемме.

Доказательство теоремы 2. Пусть C — пространство непрерывных периодических комплексно-значных функций на R^1 с периодом 1. X_α — класс таких действительных измеримых функций $g(t)$ по полупрямой $(0, \infty)$, что при фиксированном α, $0<\alpha<1$, величина $t^{-1+\alpha}g(t)$ ограничена. X_α является банаховой решеткой ([4], § 13.1) относительно нормы

$$\|g\|_{X_\alpha} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<\infty} |t^{-1+\alpha}g(t)|.$$

Через $X_\alpha(C)$ обозначим класс C-значных измеримых функций $f(t)$ на $(0, \infty)$ таких, что $\|f(t)\|_C \in X_\alpha$. С введением нормы

$$\|f\|_{X_\alpha(C)} = \|(\|f(t)\|_C)\|_{X_\alpha}$$

класс $X_\alpha(C)$ становится банаховым пространством ([4], § 13.6). Как доказано Кальдероном ([4], §§ 14.1, 14.2, 34.1, 2), пространство $C_{1-\alpha}$ изометрично изоморфно некоторому собственному подпространству $JC_{1-\alpha}$ в прямой сумме $X_\alpha(C) \oplus C$, причем существует единый проектор

$$P: X_\alpha(C) \oplus C \to JC_{1-\alpha}$$

такой, что

$$\sup_{0<\alpha_0<\alpha<\alpha_1<1} \|P\|_\alpha \leqslant K < \infty.$$

Из этого факта следует, что если шкала $X_\alpha(C)$ обладает интерполяционным свойством относительно $l_{1/\beta}$, то и $C_{1-\alpha}$ обладает тем же свойством (только с константой K).

По определению $X_\alpha(C)$ состоит из функций $f(t, x)$, $t \in (0, \infty)$, $x \in (-\infty, \infty)$, измеримых по t, непрерывных и периодических по x, для которых конечна

$$\|f\|_{X_\alpha(C)} = \operatorname*{ess\,sup}_t [t^{-1+\alpha} \sup_x |f(t, x)|] = \operatorname*{ess\,sup}_{t,x} |t^{1+\alpha} f(t, x)|,$$

т. е. $X_\alpha(C)$ — это просто L_∞ с весом $t^{-1+\alpha}$. Докажем, что $L_\infty(t^{-1+\alpha})$ обладает интерполяционным свойством относительно $l_{1/\beta}$.

Пусть линейный оператор A действует из $L_\infty(t^{-1+\alpha_j})$ в l_{1/β_j} соответственно $(0<\alpha_0<\alpha_1<1;\ 0 \leqslant \beta_j < \infty;\ j = 0, 1)$, и пусть

$$\|Af\|_{1/\beta_j} \leqslant N_j \|f\|_{L_\infty(t^{-1+\alpha_j})}.$$

Проверим, что тогда A действует из $L_\infty(t^{-1+\alpha})$ в $l_{1/\beta}$ и

$$\| Af \|_{1/\beta} \leqslant N_0^{1-\lambda} N_1^{\lambda} \| f \|_{L_\infty(t^{-1+\alpha})}.$$

Любую $f \in L_\infty(t^{-1+\alpha})$ можно представить в виде $f = f_0 + f_1$, где $f_j \in L_\infty(t^{-1+\alpha_j})$, положив

$$f_0(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t = 1, \\ f(t, x) & \text{при } 1 < t; \end{cases}$$

$$f_1(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{при } 0 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } 1 < t. \end{cases}$$

Тогда в силу линейности оператор A определен на $L_\infty(t^{-1+\alpha})$.

Очевидно, что если $f \in L_\infty(t^{-1+\alpha})$, то

$$\varphi(t, x) = t^{-1+\alpha} f(t, x) \in L_\infty.$$

Наоборот, каждой $\varphi \in L_\infty$ соответствует

$$f = t^{1-\alpha}\varphi \in L_\infty(t^{-1+\alpha}),$$

причем

$$\| \varphi \|_{L_\infty} = \| f \|_{L_\infty(t^{-1+\alpha})}.$$

Отсюда следует, что утверждения

$$\| Af \|_{1/\beta} \leqslant N \| f \|_{L_\infty(t^{-1+\alpha})}$$

и

$$\| A(t^{1-\alpha}\varphi) \|_{1/\beta} \leqslant N \| \varphi \|_{L_\infty}$$

эквиваленты.

Итак, дано, что

$$\| A(t^{1-\alpha_j}\varphi) \|_{1/\beta_j} \leqslant N_j \| \varphi \|_{L_\infty}.$$

Надо проверить, что

$$\| A(t^{1-\alpha}\varphi) \|_{1/\beta} \leqslant N_0^{1-\lambda} N_1^{\lambda} \| \varphi \|_{L_\infty}.$$

Пусть k — такое положительное число, что $k\beta_0 < 1$, $k\beta_i < 1$. Тогда $k\beta < 1$,

$$\| A(t^{1-\alpha}\varphi) \|_{1/\beta}^{k} = \| \, | A(t^{1-\alpha}\varphi) |^k \|_{1/k\beta} = \sup \sum_{l=1}^{n} | A(t^{1-\alpha}\varphi) |_l^k g_l,$$

где $| A(t^{1-\alpha}\varphi) |_l^k$ означает модуль l-й координаты элемента $A(t^{1-\alpha}\varphi)$ (sup берется по всем конечнозначным $g\{g_l\}_{l=1}^n$, $g_l\geqslant 0$ с $\|g\|_{1(/1-k\beta)}=1$). Обозначим

$$L=\sum_{l=1}^{n}|A(t^{1-\alpha}\varphi)|_l^k g_l.$$

Рассмотрим в полосе $0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1$ функцию

$$\Phi(z)=\sum_{l=1}^{n}|A(t^{1-\alpha}\varphi)|_l^k\, g_l^{(1-k\beta(z))/(1-k\beta)},$$

где $\alpha(z)=(1-z)\alpha_0+z\alpha_1,\quad \beta(z)=(1-z)\beta_0+z\beta_1$. Функция

$$F(z)=t^{1-\alpha(z)}\varphi=(t^{1-\alpha_0}\varphi)^{1-z}(t^{1-\alpha_1}\varphi)^z$$

аналитична в полосе $0<\operatorname{Re} z<1$ как функция со значениями в пространстве

$$L_\infty(t^{-1+\alpha_0})+L_\infty(t^{-1+\alpha_1})$$

(см. [4], § 1), равномерно ограничена, и ее производная равна функции

$$(t^{1-\alpha_0}\varphi)^{1-z}(t^{1-\alpha_1}\varphi)^z\ln t^{\alpha_0-\alpha_1}$$

(см. [5], стр. 595). Отсюда следует, что функция $A(F(z))$ аналитична и равномерно ограничена в пространстве $l_{1/\beta_0}+ l_{1/\beta_1}$. Но тогда $|A(F(z))|_l^k$ — логарифмически субгармоническая функция, и ее произведение на аналитическую функцию $g_l^{(1-k\beta(z))/(1-k\beta)}$ даст субгармоническую [6]. Значит, $\Phi(z)$ субгармонична и ограничена в полосе $0< \operatorname{Re} z< 1$.

Пусть $z=i\tau$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$|\Phi(i\tau)|=\left|\sum_{l=1}^{n}|A(t^{1-\alpha_0}t^{is}\varphi)|_l^k\, g_l^{(1-k\beta_0)/(1-k\beta)}g_l^{i\tau}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum|A(t^{1-\alpha_0}t^{is}\varphi)|_l^{1/\beta_0}\right)^{k\beta_0}\left(\sum g_l^{1/(1-k\beta)}\right)\leqslant N_0^k\|\varphi\|_{L_\infty}^k,$$

где r, s — некоторые действительные числа. Аналогично получаем, что

$$|\Phi(1+i\tau)|\leqslant N_1^k\ \|\varphi\|_{L\infty}^k.$$

В силу теоремы о трех прямых для субгармонических функций

$$L=\Phi(\lambda)\leqslant\sup_\tau|\Phi(i\tau)|^{1-\lambda}\sup_\tau|\Phi(1+i\tau)|^\lambda\leqslant$$

$$\leqslant(N_0^{1-\lambda}N_1^\lambda\|\varphi\|_{L_\infty})^k.$$

Отсюда следует, что

$$\| A\, (t^{1-\alpha}\varphi) \|_{1/\beta}^{k} \leqslant (N_0^{1-\lambda} N_1^{\lambda} \| \varphi \|_{L_\infty})^{k}.$$

Теорема 2 доказана.

Авторы искренне благодарны П. П. Забрейко и П. Л. Ульянову за полезные обсуждения и замечания.

Воронежский государственный
педагогический институт
Центральный экономико-
математический институт АН СССР

Поступило
17.XII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.
[2] Митягин Б. С., Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье, Докл. АН СССР, **157**, № 5 (1964), 1047—1050.
[3] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов., М., 1958.
[4] Кальдерон А. П., Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод, «Математика» (сб. переводов), 9, № 3 (1965), 56—129.
[5] Забрейко П. П., Об одной интерполяционной теореме для линейных операторов, Матем. заметки, **2**, № 6 (1967), 593—598.
[6] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937.