D. Z. Arov, Carathéodory theorem for matrix-valued functions and the maximal jump of spectral functions in extension problems,
Mat. Zametki, 1990, Volume 48, Issue 3, 3–11

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ТЕОРЕМА КАРАТЕОДОРИ ДЛЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ, МАКСИМАЛЬНЫЙ СКАЧОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОБЛЕМАХ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Д. З. Аров

§ 1. Постановка задач, формулировка результатов.

1. Пусть $\mathbf{C}_n$ и $\mathbf{R}_n$ — классы матриц-функций (сокращенно — м.-ф.) $f(z)$ порядка n, голоморфных соответственно в $D = \{z: |z| < 1\}$ и $\Pi = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, имеющих там $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$ (для $f \in \mathbf{C}_n$) и $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ (для $f \in \mathbf{R}_n$).

Матрицы-функции f из $\mathbf{C}_n$ представимы по формуле Рисса — Херглотца

$$f(z) = i\gamma_f + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\mu} + z}{e^{i\mu} - z}\, d\sigma_f(\mu)$$

$$\left(z \in D,\ \gamma_f^* = \gamma_f,\ d\sigma_f(\mu) \geqslant 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \| d\sigma_f(\mu) \| < \infty\right),$$

а м.-ф. f из $\mathbf{R}_n$ представимы по формуле Неванлинны

$$f(z) = \alpha_f + \beta_f z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\mu - z} - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right) d\sigma_f(\mu)$$

$$\Big(z \in \Pi,\ \alpha_f^* = \alpha_f,\ \ \beta_f \geqslant 0,\ \ d\sigma_1(\mu) \geqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\mu^2)^{-1} \| d\sigma_f(\mu) \| < \infty\Big).$$

Неубывающие м.-ф. n-го порядка $\sigma_f(\mu)$ называются спектральными для f ($\in \mathbf{C}_n, \mathbf{R}_n$). Будем считать их нормированными условием $\sigma_f(\mu - 0) = \sigma_f(\mu)$; при этом $\sigma_f(\mu)$ определяются по f с точностью до постоянного слагаемого по формуле Стилтьеса.

Пусть $E - D$ или Π; $\zeta_0 = e^{i\mu}$, если $E = D$, и $\zeta_0 = \mu$, если $E = \Pi$;

$$m_f(\zeta_0) \overset{\text{def}}{=} \sigma_f(\mu + 0) - \sigma_f(\mu), \quad \zeta_0 \in \partial E \quad (f \in \mathbf{C}_n, \mathbf{R}_n).$$

Через $\lim\limits_{z \to \zeta_0} \psi(z)$ будем обозначать предел $\psi(z)$, когда z ($\in E$) стремится к ζ_0 ($\in \partial E$) по нормали к ∂E (границе E) в точке ζ_0.

Известно [1], что

$$m_f(\zeta_0) = c \lim_{z \to \zeta_0} |z - \zeta_0| f(z), \text{ где } c = 1, -i \text{ при } f \in \mathbf{C}_n, \mathbf{R}_n$$

$$\left(m_f(\infty) = \beta_f = -i \lim_{x \to +\infty} x^{-1} f(ix),\ f \in \mathbf{R}_n\right).$$

2. Через $\mathbf{B}_{k \times l}$ обозначается класс голоморфных в E м.-ф. $\mathscr{E}(z)$ порядка $k \times l$ с $\mathscr{E}^*(z)\mathscr{E}(z) \leqslant I$ в E; $\mathbf{B}_k \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B}_{k \times k}$.

В широком круге задач гармонического анализа (тригонометрическая и степенная проблемы моментов, интерполяционная задача Неванлинны — Пика, задачи М. Г. Крейна продолжения с отрезка положительно-определенных и винтовых функций, задачи описания спектральных функций дифференциальных операторов и канонических дифференциальных систем и другие «проблемы продолжения») не только для скалярных функций, но и для матричнозначных, описание решений в так называемом вполне неопределенном случае сводится к рассмотрению семейства $\mathfrak{M} = \{f_{\mathscr{E}}\} \subset \mathbf{C}_n\ (\mathbf{R}_n)$ м.-ф., получаемых по формуле

$$f_{\mathscr{E}}(z) = [a_{11}(z)\mathscr{E}(z) + a_{12}(z)][a_{21}(z)\mathscr{E}(z) + a_{22}(z)]^{-1}, \quad \mathscr{E} \in \mathbf{B}_n, \tag{1}$$

где $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2$ — мероморфная в E м.-ф. порядка $2n$ с $\det A(z) \not\equiv 0$. Известно [2], что по $\mathfrak{M}$ рассматриваемая в формуле (1) м.-ф. $A(z)$ восстанавливается с точностью до скалярного мероморфного в E множителя $\rho(z)$ и постоянного правого J-унитарного множителя U $(U^*jU = J)$, где

$$J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix},$$

причем $\rho(z)$ можно выбрать так, чтобы полученная в итоге м.-ф. $A(z)$ была $(J, \mathscr{J})$-сжимающей в E $(A(z) \in \mathbf{B}_{j,\mathscr{J}})$, т. е. чтобы во всех точках голоморфности $A(z)$ в E имели $A^*(z)\mathscr{J}A(z) \leqslant J$ (или, что то же, $A(z)JA^*(z) \leqslant \mathscr{J}$), где $\mathscr{J} = \mathscr{J}_r$ при $\mathfrak{M} \subset \mathbf{C}_n$ и $\mathscr{J} = \mathscr{J}_i$ при $\mathfrak{M} \subset \mathbf{R}_n$,

$$\mathscr{J}_r = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{J}_i = \begin{pmatrix} 0 & -iI_n \\ iI_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2$ — произвольная м.-ф. класса $\mathbf{B}_{j,\mathscr{J}}$, то получаемое по формуле (1) семейство $\mathfrak{M} = \{f_{\mathscr{E}}\}$ содержится в $\mathbf{C}_n$ (при $\mathscr{J} = \mathscr{J}_r$) или в $\mathbf{R}_n$ (при $\mathscr{J} = \mathscr{J}_i$). Чаще вместо формулы (1) рассматривается формула, дающая то же семейство $\mathfrak{M} = \{f_{p,q}\}$,

$$f_{p,q}(z) = [b_{11}(z)p(z) + b_{12}(z)q(z)][b_{21}(z)p(z) + b_{22}(z)q(z)]^{-1}, \qquad [p, q] \in O_{\mathscr{J}}, \tag{2}$$

где $O_{\mathscr{J}}$ — класс мероморфных в E пар $\xi(z) = [p(z), q(z)]$ м.-ф. порядка n, невырожденных $(\operatorname{rang} \xi(z_0) = n$ при некотором $z_0 \in E)$ с $\xi(z)\mathscr{J}\xi^*(z) \leqslant 0$; $B(z) = [b_{jk}(z)]_1^2$ — мероморфная в E $\mathscr{J}$-сжимающая м.-ф. $(B(z) \in \mathbf{B}_{\mathscr{J}})$, т. е. $B^*(z)\mathscr{J}B(z) \leqslant \mathscr{J}$; в формуле (2) можно ограничиться парами $\xi = [I - \mathscr{E},\ I + \mathscr{E}]$ при $\mathfrak{M} \subset \mathbf{C}_n$ и $\xi = [i(I - \mathscr{E}),\ I + \mathscr{E}]$ при $\mathfrak{M} \subset \mathbf{R}_n$, где $\mathscr{E} \in \mathbf{B}_n$; при $\det q(z) \not\equiv 0$ вместо пар $[p, q]$ можно рассматривать пары $[\tau, I]$ с $\tau\ (= pq^{-1}) \in \mathbf{C}_n\ (\mathbf{R}_n)$, что и делают при $n = 1$. Матрицы-функции $A(z)\ (\in \mathbf{B}_{J,\mathscr{J}})$ и $B(z)\ (\in \mathbf{B}_{\mathscr{J}})$ выражаются одна через другую:

$$A(z) = B(z)\,U, \quad UJU^* = \mathscr{J},$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \text{ при } \mathscr{J} = \mathscr{J}_r$$

$$\text{и } U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -iI_n & iI_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \text{ при } \mathscr{J} = \mathscr{J}_i.$$

Теория м.-ф. класса $\mathbf{B}_{\mathscr{J}}$ (с произвольной матрицей $\mathscr{J}$, $\mathscr{J} = \mathscr{J}^* = \mathscr{J}^{-1}$) развита В. П. Потаповым [3]; им, его учениками и последователями рассмотрены применения этой теории к синтезу электрических цепей и к упомянутому выше кругу задач гармонического анализа [1, 4—6]. Матрицы-функции $B(z)$ из $\mathbf{B}_{\mathscr{J}}$ выражаются через соответствующие м.-ф. $\widetilde{S}(z)$ из $\mathbf{B}_{2n}$ преобразованием Потапова — Гинзбурга

$$B(z) = [P_- + P_+\widetilde{S}(z)]\,[P_+ + P_-\widetilde{S}(z)]^{-1}, \quad P_\pm \overset{\text{def}}{=} (^1/_2)\,[I \pm \mathscr{J}].$$

Поэтому из известной теоремы Фату следует, что для $A(z)$ из $\mathbf{B}_{J,\mathscr{J}}$ и $B(z)$ из $\mathbf{B}_{\mathscr{J}}$ существуют граничные значения $A(\zeta) = \lim\limits_{z\to\zeta} A(z)$ и $B(\zeta) = \lim\limits_{z\to\zeta} B(z)$ п. в. на ∂E. В упомянутых выше «проблемах продолжения» соответствующие м.-ф. $A(z)$ имеют $(J, \mathscr{J})$-унитарные граничные значения п. в. на ∂E, а $B(z)$ — $\mathscr{J}$-унитарные, т. е.

$$A^*(\zeta)\,\mathscr{J}A(\zeta) = J, \quad B^*(\zeta)\,\mathscr{J}B(\zeta) = \mathscr{J}, \quad \zeta \in \partial E \text{ п. в.}$$

3. Целью настоящей работы является нахождение для семейства $\mathfrak{M}$ м.-ф., получаемых по формуле (1) или (2), м.-ф. $f^э(z)$ с максимальным скачком спектральной функции, т. е. такой, что

$$f^э \in \mathfrak{M}, \quad m_f(\zeta_0) \leqslant m_{f^э}(\zeta_0) \quad \forall f \in \mathfrak{M}.$$

Полученные здесь теоремы 4а, 4б и 5 являются обобщением результатов о решениях с максимальным скачком спектральной функции для проблемы моментов (П. Л. Чебышев и А. А. Марков [7]), для струны (М. Г. Крейн [8]), для обобщенной проблемы моментов (А. Л. Сахнович [1]). Предварительно доказывается следующий аналог для м.-ф. класса $\mathbf{B}_{k\times l}$ известной теоремы Каратеодори [9] о функциях класса $\mathbf{B}_1$, отличный от имеющегося в статье [10].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $S \in \mathbf{B}_{k\times l}$, $S^*(z)\,S(z) < I\ (z \in E)$, $\zeta_0 \in \partial E$. *Тогда существует (конечный) предел*

$$M(\zeta_0) = \lim_{z\to\zeta_0} 2\,|z - \zeta_0|\,[I - S^*(z)\,S(z)]^{-1}. \tag{3}$$

Если при этом $S_0 = \lim_{z_n \to \zeta_0} S(z_n)$, *то*

$$\lim_{z \to \zeta_0} 2^{-1} \mid z - \zeta_0 \mid [I - S^*(z) S_0]^{-1} [I - S^*(z)] [I - S_0^* S(z)]^{-1} = \lim_{z \to \zeta_0} \mid z - \zeta_0 \mid [I - S_0^* S(z)]^{-1} = M(\zeta_0). \quad (4)$$

Доказательство этой теоремы ведется параллельно с доказательством следующего нужного нам утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $S \in \mathbf{B}_{k \times l}$, $S^*(z) S(z) < I$ $(z \in E)$, $\zeta_0 \in \partial E$. *Тогда при любой м.-ф.* $\mathscr{E}$ *из* $\mathbf{B}_{l \times k}$ *существует предел*

$$M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) = \lim_{z \to \zeta_0} \mid z - \zeta_0 \mid [I - \mathscr{E}(z) S(z)]^{-1}, \quad (5)$$

причем

$$M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) = M^{1/2}(\zeta_0) V_{\mathscr{E}}(\zeta_0) M^{1/2}(\zeta_0), \quad 0 \leqslant V_{\mathscr{E}}(\zeta_0) \leqslant I. \quad (6)$$

Здесь $M(\zeta_0)$ — *матрица, определенная в* (3), *так что*

$$M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) \leqslant M(\zeta_0) = M_{S_0^*}(\zeta_0),$$

и $\mathscr{E} \in \mathbf{B}_{l \times k}$, $S_0 = \lim_{z_n \to \zeta_0} S(z_n)$ — *произвольный частичный предел м.-ф.* $S(z)$ *при* $z \to \zeta_0$ *по нормали к* ∂E *в точке* ζ_0.

Из теоремы 1 вытекает аналогичная теорема для м.-ф. $B(z)$ из $\mathbf{B}_{\mathscr{J}}$ (и $A(z)$ из $\mathbf{B}_{J, \mathscr{J}}$).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $B(z) \in \mathbf{B}_{\mathscr{J}}$, $B^*(z) \mathscr{J} B(z) < \mathscr{J}$ $(z \in E)$, *и существует граничное значение* $B_0 = B(\zeta_0)$. *Тогда существуют*

$$N(\zeta_0) = \lim_{z \to \zeta_0} 2 \mid z - \zeta_0 \mid [\mathscr{J} - B^*(z) \mathscr{J} B(z)]^{-1},$$

$$N_{B_0^*}(\zeta_0) = \lim_{z \to \zeta_0} \mid z - \zeta_0 \mid [\mathscr{J} - B_0^* \mathscr{J} B(z)]^{-1},$$

причем $N_{B_0^*}(\zeta_0) = N(\zeta_0)$ *и*

$$\lim_{z \to \zeta_0} 2^{-1} \mid z - \zeta_0 \mid [\mathscr{J} - B^*(z) \mathscr{J} B_0]^{-1} [\mathscr{J} - B^*(z) \mathscr{J} B(z)] [\mathscr{J} - B_0^* \mathscr{J} B(z)]^{-1} = N(\zeta_0).$$

Из этой теоремы вытекает аналог теоремы Каратеодори для м.-ф. $B(z)$ класса $\mathbf{B}_{\mathscr{J}}$, полученный в работе [11], где по существу рассматривается случай, когда $N_{B_0^*}(\zeta_0) > 0$.

Если $A(z) = [a_{Jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_{J, \mathscr{J}}$, то

$$\chi(z) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{22}^{-1}(z)\, a_{21}(z) \in \mathbf{B}_n \quad (7)$$

и формула (1) определена при любой м.-ф. $\mathscr{E}$ из $\mathbf{B}_n$ тогда (и только тогда), когда

$$I - \chi^*(z) \chi(z) > 0 \quad (z \in E). \quad (8)$$

Последнее условие можно записать в виде

$$[a_{21}(z), \ a_{22}(z)] J [a_{21}(z), \ a_{22}(z)]^* < 0.$$

Точно так же, если $B(z) = [b_{jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_{\mathcal{J}}$, то формула (2) определена при всех парах $\xi = [p, q]$ из $O_{\mathcal{J}}$ тогда (и только тогда), когда

$$[b_{21}(z),\ b_{22}(z)]\,\mathcal{J}\,[b_{21}(z),\ b_{22}(z)]^* < 0. \tag{9}$$

Если $A(\zeta_0)$ является $(J, \mathcal{J})$-унитарной матрицей, то $\chi(\zeta_0)$ — унитарной.

Основной результат работы формулируется ниже в виде двух эквивалентных теорем.

ТЕОРЕМА 4а. *Пусть* $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_{J,\mathcal{J}}$, *существует* $(J, \mathcal{J})$-*унитарное граничное значение* $A(\zeta_0)$ *и для м.-ф.* $\chi(z)$, *определенной в* (7), *выполняется условие* (8). *Пусть* $\mathfrak{M} = \{f_{\mathscr{E}}\}$ — *семейство м.-ф., определяемых формулой* (1). *Тогда*:

1) *существует предел*

$$m(\zeta_0) = \lim_{z \to \zeta_0} 2\,|\,z - \zeta_0\,|\,[a_{22}(z)\,a_{22}^*(z) - a_{21}(z)\,a_{21}^*(z)]^{-1}; \tag{10}$$

2) $m_{f_{\mathscr{E}}}(\zeta_0) \leqslant m(\zeta_0)\quad \forall f_{\mathscr{E}} \in \mathfrak{M}$;

3) $m_{f_{\mathscr{E}}}(\zeta_0) = m(\zeta_0)$ *при* $\mathscr{E}(z) \equiv \chi^*(\zeta_0)$.

ТЕОРЕМА 4б. *Пусть* $B(z) = [b_{jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_{\mathcal{J}}$, *существует* $\mathcal{J}$-*унитарное граничное значение* $B(\zeta_0)$ *и выполняется условие* (9). *Пусть* $\mathfrak{M} = \{f_{p,q}\}$ — *семейство м.-ф., определяемых формулой* (2). *Тогда*:

1) *существует предел*

$$m(\zeta_0) = \lim_{z \to \zeta_0} 2\,|\,z - \zeta_0\,|\,\{[b_{21}(z), b_{22}(z)]\,(-\mathcal{J})\,[b_{21}(z), b_{22}(z)]^*\}^{-1};$$

2) $m_{f_{p,q}}(\zeta_0) \leqslant m(\zeta_0)\quad \forall f_{p,q} \in \mathfrak{M}$;

3) $m_{f_{p,q}}(\zeta_0) = m(\zeta_0)$ *при* $p(z) \equiv b_{22}^*(\zeta_0)$, $q(z) \equiv -b_{21}^*(\zeta_0)$.

При исследовании сингулярных задач (проблемы моментов и задача Неванлинны — Пика с бесконечным числом данных, задача описания спектральных функций сингулярного дифференциального оператора или канонической системы и другие) обычно предварительно рассматривают однопараметрическое семейство соответствующих «усеченных» задач, которым отвечают семейства $\mathfrak{M}_x$ $(x \in X)$, монотонно зависящие от параметра x, получаемые по формулам (1) или (2) при некоторых $A_x(z)$ $(\in \mathbf{B}_{J,\mathcal{J}})$ или $B_x(z)$ $(\in \mathbf{B}_{\mathcal{J}})$. При этом отвечающее сингулярной задаче семейство $\mathfrak{M}$ $(\subset \mathbf{C}_n, \mathbf{R}_n)$, вообще говоря, уже не получается по формуле (1) или (2), но является пересечением семейств $\mathfrak{M}_x$ $(x \in X)$. В связи с различного рода дискретно-континуальными проблемами продолжения представляет интерес в качестве X рассматривать не только числовые множества ($X = \mathbf{N}$, $X = [a; b) \subset \mathbf{R}$ и другие), но и произвольные упорядоченные множества, которые будем предполагать фильтрующими вправо и удовлетворяющими условию: существует возрастающая последовательность x_j $(\in X)$ такая, что $\forall x\ (\in X)\ \exists J\ (\in \mathrm{N})$: $x < x_J$. При этом, очевидно, $\mathfrak{M} = \bigcap_{x \in X} \mathfrak{M}_x = \bigcap_{J=1}^{\infty} \mathfrak{M}_{x_J}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $\mathfrak{M}_x$ $(x \in X)$ — *семейства м.-ф. из* $\mathbf{C}_n$ *или* $\mathbf{R}_n$, *получаемых по формулам вида* (1) ((2)) *такие, что* $\mathfrak{M}_{x''} \subset \mathfrak{M}_{x'}$, *если* $x' < x''$ *и пусть* $\mathfrak{M} = \bigcap_{x \in X} \mathfrak{M}_x$. *Пусть при фиксированном* ζ_0 $(\in \partial E)$ *определен максимальный скачок* $m(\zeta_0, x)$ *спектральных функций* $\sigma_f(\mu)$, *когда* f *пробегает* $\mathfrak{M}_x$. *Тогда существует предел* $m(\zeta_0) = \lim\limits_{x \in X} m(\zeta_0, x)$ *и* $m(\zeta_0)$ — *максимальный скачок* $\sigma_f(\mu)$, *когда* f *пробегает* $\mathfrak{M}$. *Иначе говоря, существует м.-ф.* $f^э$ *из* $\mathfrak{M}$ *такая, что*

$$m_f(\zeta_0) \leqslant m_{f^э}(\zeta_0) = m(\zeta_0) \quad \forall f \in \mathfrak{M}.$$

§ 2. Доказательство теорем 1—3.

1. Пусть $E = D$, $S \in \mathbf{B}_{k \times l}$, $S^*(z) S(z) < I$ $(z \in E)$. Рассматриваемые в (5) пределы существуют, так как $(I - \mathscr{E} S)^{-1} \in \mathbf{C}_l$. В частности, существует такой предел $M_{S_0^*}(\zeta_0)$ при $\mathscr{E}(z) \equiv S_0^*$, S_0 — матрица порядка $k \times l$, $S_0^* S_0 \leqslant I$.

2. При любых z_n, z $(\in D)$ выполняется неравенство (Пика)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{I - S^*(z_n) S(z_n)}{1 - \bar{z}_n z_n} & \dfrac{I - S^*(z_n) S(z)}{1 - \bar{z}_n z} \\[2ex] \dfrac{I - S^*(z) S(z_n)}{1 - \bar{z} z_n} & \dfrac{I - S^*(z) S(z)}{1 - \bar{z} z} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Будем рассматривать $z = |z| \zeta_0$, $z_n = |z_n| \zeta_0$, $\zeta_0 \in \partial E$. Положим

$$\varphi(z) = 2 |z - \zeta_0| [I - S^*(z) S(z)]^{-1},$$

$$\psi(z; \mathscr{E}) = |z - \zeta_0| \; [I - \mathscr{E}(z) S(z)]^{-1},$$

$$\chi(z; \mathscr{E}) = \psi^*(z, \mathscr{E}) \varphi^{-1}(z) \psi(z, \mathscr{E}).$$

Из неравенства Пика вытекает, что для рассматриваемых z_n и z

$$\frac{1 + |z_n|}{2} \varphi(z_n) \leqslant \frac{2(1 - |z_n| |z|)^2}{(1 + |z|)(1 - |z|)^2} \chi(z, S^*(z_n)). \tag{11}$$

Пользуясь тем, что $S^*(z) S(z_n) S^*(z_n) S(z) \leqslant S^*(z) S(z)$, получаем

$$\chi(z, S^*(z_n)) \leqslant -2^{-1}(1 - |z|) I + \operatorname{Re} \psi(z, S^*(z_n)). \tag{12}$$

Из неравенства Пика вытекает также, что семейство матриц $\varphi(z)$ $(z \in D)$ ограничено $(\| \varphi(z) \| \leqslant 2(1 - \| S(0) \|)^{-2})$. Поэтому при некоторой последовательности z_n' $(\in D)$ существует предел $M_1(\zeta_0) = \lim\limits_{z_n' \to \zeta_0} \varphi(z_n')$. Существование предела (3) будет доказано, если будет показано, что для любой другой последовательности z_n'' из существования $M_2(\zeta_0) = \lim\limits_{z_n'' \to \zeta_0} \varphi(z_n'')$ следует равенство $M_2(\zeta_0) = M_1(\zeta_0)$.

3. Пусть z_n — подпоследовательность последовательности z'_n, для которой существует предел $S_1 = \lim\limits_{z_n \to \zeta_0} S(z_n)$. Переходя в неравенствах (11) и (12) к пределу при $z_n \to \zeta_0$, получим

$$M_1(\zeta_0) \leqslant \frac{2}{1+|z|}\chi(z, S_1^*) \leqslant -\frac{1-|z|}{1+|z|} I + \operatorname{Re}\psi(z, S_1^*). \qquad (13)$$

Так как при $z \to \zeta_0$ предел правой части этого двойного неравенства равен $M_{S_1^*}(\zeta_0)$, то получаем, что $M_1(\zeta_0) \leqslant M_{S_1^*}(\zeta_0)$.

4. Покажем теперь, что имеет место соотношение (6), где пока вместо $M(\zeta_0)$ будем иметь $M_1(\zeta_0)$. Для этого рассмотрим

$$C_{\mathscr{E}}(z) = [I - \mathscr{E}(z) S(z)]^{-1} (\in \mathbf{C}_l), \qquad \mathscr{E} \in \mathbf{B}_{l\times k}.$$

Имеем (аргумент z временно писать не будем):

$$\mathscr{E}SC_{\mathscr{E}} = C_{\mathscr{E}} - I, \quad (C_{\mathscr{E}}^* - I)(C_{\mathscr{E}} - I) \leqslant C_{\mathscr{E}}^* S^* S C_{\mathscr{E}},$$

$$C_{\mathscr{E}}^*(I - S^*S) C_{\mathscr{E}} - C_{\mathscr{E}}^* - C_{\mathscr{E}} \leqslant 0.$$

Получаем

$$V^*V \leqslant I, \text{ где } V \stackrel{\text{def}}{=} (I - S^*S)^{1/2} C_{\mathscr{E}} (I - S^*S)^{1/2} - I;$$

$$C_{\mathscr{E}}(z) = [I - S^*(z) S(z)]^{-1/2} [I + V(z)] [I - S^*(z) S(z)]^{-1/2}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $|z - \zeta_0|$ и перейдем к пределу по подпоследовательности z_n последовательности z'_n, для которой существует предел $V(\zeta_0) = \lim\limits_{z_n \to \zeta_0} V(z_n)$. Получим

$$M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) = M_1^{1/2}(\zeta_0)\, 2^{-1} [I + V(\zeta_0)]\, M_1^{1/2}(\zeta_0).$$

Полагая $V_{\mathscr{E}}(\zeta_0) = 2^{-1}[I + \operatorname{Re} V(\zeta_0)]$ и учитывая, что $M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) \geqslant 0$, получаем

$$M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) = M_1^{1/2}(\zeta_0)\, V_{\mathscr{E}}(\zeta_0)\, M_1^{1/2}(\zeta_0), \qquad 0 \leqslant V_{\mathscr{E}}(\zeta_0) \leqslant I.$$

Это означает, что $M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) \leqslant M_1(\zeta_0)$ $(\mathscr{E} \in \mathbf{B}_{l\times k})$. Полагая здесь $\mathscr{E}(z) \equiv S_1^*$, получаем, что $M_{S_1^*}(\zeta_0) \leqslant M_1(\zeta_0)$, а ранее имели $M_1(\zeta_0) \leqslant M_{S_1^*}(\zeta_0)$. Следовательно, $M_{S_1^*}(\zeta_0) = M_1(\zeta_0)$. Аналогично получим, что

$$M_{\mathscr{E}}(\zeta_0) \leqslant M_2(\zeta_0) = M_{S_2^*}(\zeta_0), \quad S_2 = \lim_{z''_{n_k} \to \zeta_0} S(z''_{n_k}).$$

Поэтому $M_1(\zeta_0)\ (= M_{S_1^*}(\zeta_0)) \leqslant M_2(\zeta_0)$. Точно так же $M_2(\zeta_0) \leqslant$ $\leqslant M_1(\zeta_0)$, так что $M_2(\zeta_0) = M_1(\zeta_0)$. Следовательно, существует предел (3), $M(\zeta_0) = M_1(\zeta_0)$ и имеет место соотношение (6). Совершая теперь предельный переход в неравенстве (13) при $z \to \zeta_0$, получим соотношение (4).

Теоремы 1 и 2 доказаны для $E = D$. Аналогично они доказываются и для $E = \Pi$. Теорема 3 вытекает из теоремы 1, так как если $\tilde{S}$ $(\in \mathbf{B}_{2n})$ отвечает $B(z)$ $(\in \mathbf{B}_{\mathcal{J}})$ согласно преобразованию Потапова — Гинзбурга, то

$$[\mathcal{J} - B^*(z)\mathcal{J}B(z)]^{-1} = [P_+ + P_-\tilde{S}(z)][I - \tilde{S}^*(z)\tilde{S}(z)]^{-1}\cdot \cdot[P_+ + P_-\tilde{S}(z)]^*,$$

$$[\mathcal{J} - B^*(\zeta_0)\mathcal{J}B(z)]^{-1} = = [P_+ + P_-\tilde{S}(z)][I - \tilde{S}^*(\zeta_0)S(z)]^{-1}[P_+ + P_-\tilde{S}(\zeta_0)]^*.$$

§ 3. Доказательство теорем 4а, 4б и 5.

1. Пусть $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2$ $(\in \mathbf{B}_{J,\mathcal{J}})$ удовлетворяет условиям теоремы 4а. Тогда определенная в (7) м.-ф. $\chi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Применяя теоремы 1 и 2 к $S(z) = \chi^*(\bar{z})$, получаем, что существуют пределы

$$M(\zeta_0) = \lim_{z\to\zeta_0} 2\,|z - \zeta_0|\,[I - \chi(z)\chi^*(z)]^{-1},$$

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = \lim_{z\to\zeta_0} |z - \zeta_0|\,[I - \chi(z)\mathcal{E}(z)]^{-1}, \qquad \mathcal{E} \in \mathbf{B}_n;$$

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) \leqslant M(\zeta_0) = M_{\mathcal{E}_0}(\zeta_0), \qquad \mathcal{E}_0(z) \equiv \chi^*(\zeta_0).$$

Из существования пределов $M(\zeta_0)$ и $A(\zeta_0)$ следует, что существует предел $m(\zeta_0)$ в (10), и получаем, что

$$m(\zeta_0) = [a_{22}^{-1}(\zeta_0)]^*\, M(\zeta_0)\, a_{22}^{-1}(\zeta_0).$$

Для м.-ф. $f_{\mathcal{E}}(z)$, определенной по формуле (1), имеем

$$f_{\mathcal{E}}(z) = a_{11}(z)\,a_{21}^{-1}(z) + \Delta(z)\,[I - \chi(z)\mathcal{E}(z)]^{-1}a_{22}^{-1}(z),$$

где $\Delta(z) \stackrel{\text{def}}{=} a_{12}(z) - a_{11}(z)\,a_{21}^{-1}(z)\,a_{22}(z)$. Из равенства $A(\zeta_0)JA^*\cdot$ $\cdot(\zeta_0) = \mathcal{J}$ следует, что $\lim_{z\to\zeta_0} \Delta(z) = \bar{c}\,[a_{22}^{-1}(\zeta_0)]^*$. Получаем, что

$$m_{f_{\mathcal{E}}}(\zeta_0) = [a_{22}^{-1}(\zeta_0)]^*\, M_{\mathcal{E}}(\zeta_0)\, a_{22}^{-1}(\zeta_0),$$

$$m_{f_{\mathcal{E}}}(\zeta_0) \leqslant m(\zeta_0) \quad \forall \mathcal{E};$$

$$m_{f_{\mathcal{E}}}(\zeta_0) = m(\zeta_0) \text{ при } \mathcal{E}(z) \equiv \chi^*(\zeta_0).$$

2. Теорема 4б получается из теоремы 4а, если учесть, что $f_{\mathcal{E}} = f_{p,q}$ при ранее указанном соответствии между парами $[p, q]\cdot$ $(\in O_{\mathcal{J}})$ и $\mathcal{E}$ $(\in \mathbf{B}_n)$, $f_{\mathcal{E}_0} = f_{p_0,q_0}$ при $\mathcal{E}_0 \equiv \chi^*(\zeta_0)$, $p_0 \equiv b_{22}^*(\zeta_0)$, $q_0 \equiv -b_{21}^*(\zeta_0)$ и что м.-ф. $A(z)$ $(\in \mathbf{B}_{J,\mathcal{J}}$ и $B(z)$ $(\in \mathbf{B}_{\mathcal{J}})$ выражаются одна через другую указанным ранее образом.

3. Докажем теперь теорему 5. В силу сделанного допущения об упорядоченном множестве X можно считать, что $X = \mathbf{N}$. Предел $m(\zeta_0) = \lim_{k\ \infty} m(\zeta_0; k)$ существует, так как $m(\zeta_0; k) \leqslant m(\zeta_0; l)$ при $k > l$. Так как $\mathfrak{M} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$, то $m_f(\zeta_0) \leqslant m(\zeta_0; k)$ $(f \in \mathfrak{M})$

и потому $m_f(\zeta_0) \leqslant m(\zeta_0)$ $(f \in \mathfrak{M})$. Пусть $m(\zeta_0; k) = m_{f_k}(\zeta_0)$, $f_k \in \mathfrak{M}_k$. Семейство $\mathfrak{M}_1$ является компактным, и потому существует сходящаяся подпоследовательность f_{k_i} последовательности f_k. Пусть $f_\infty(z) = \lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(z)$. Из имеющегося в работе (12) описания пересечения $\mathfrak{M}$ семейств $\mathfrak{M}_k$ вытекает, что $f_\infty \in \mathfrak{M}$. В силу теорем Хелли можно считать, что $\sigma_{f_\infty}(\mu) = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{f_k}(\mu)$, и потому из неравенств $\sigma_{f_k}(\mu + \varepsilon) - \sigma_{f_k}(\mu) \geqslant m(\zeta_0)$ следует, что $\sigma_{f_\infty}(\mu + \varepsilon) - \sigma_{f_\infty}(\mu) \geqslant m(\zeta_0)$, а значит, и $m_{f_\infty}(\zeta_0) \geqslant m(\zeta_0)$. С другой стороны, так как $f_\infty \in \mathfrak{M}$, то $m_{f_\infty}(\zeta_0) \leqslant m(\zeta_0)$. Следовательно, $m_{f_\infty}(\zeta_0) = m(\zeta_0)$. Получили

$$m_f(\zeta_0) \leqslant m_{f_\infty}(\zeta_0) = m(\zeta_0) \quad \forall f \in \mathfrak{M}.$$

Теорема доказана.

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступило 22.09.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Сахнович Л. А. Задачи факторизации и операторные тождества // УМН. 1986. Т. 41, № 1. С. 3—55.

[2] Симакова Л. А. О мероморфных плюс-матрицах-функциях // Мат. исследования. Кишинев. 1975. Т. 10, № 1. С. 287—292.

[3] Потапов В. П. Мультипликативная структура $\mathcal{J}$-нерастягивающих матриц-функций // Тр. ММО. Т. 4. М.: Изд-во МГУ, 1955. С. 125—236.

[4] Ковалишина И. В., Потапов В. П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика // Докл. АН АрмССР. 1974. Т. 59, № 1. С. 17—22.

[5] Ефимов А. В., Потапов В. П. $\mathcal{J}$-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории цепей // УМН. 1973. Т. 28, № 1. С. 65—130.

[6] Кацнельсон В. Э. Интегральное представление эрмитово положительных ядер смешанного типа и обобщенная задача Нехари. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 43. Харьков, 1985. С. 54—70.

[7] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.

[8] Крейн М. Г. Неравенства Чебышева — Маркова в теории спектральных функций струны // Мат. исследования. Кишинев, 1970. Т. 5, № 1. С. 77—101.

[9] Каратеодори К. Конформное отображение. М.; Л.: ГТТИ, 1934.

[10] Ковалишина И. В. Теорема Каратеодори — Жюлиа для матриц-функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 43. Харьков, 1985. С. 70—82.

[11] Меламуд Е. Я. Теорема Каратеодори и граничная интерполяционная задача Неванлинны для аналитической $\mathcal{J}$-нерастягивающей матрицы-функции // Докл. АН АрмССР. 1985. Т. 80, № 1. С. 12—16.

[12] Орлов С. А. Параметризация предельных матричных кругов, аналитически зависящих от параметра // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 41. Харьков, 1984. С. 96—107.