В. М. Брук, Об обобщенных резольвентах линейных отношений, порожденных неотрицательной операторной функцией и дифференциальным выражением эллиптического типа,
Изв. вузов. Матем., 2008, номер 11, 12–26

https://www.mathnet.ru/ivm1773

Известия вузов. Математика
2008, № 11, с. 12–26

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.М. БРУК

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТАХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация. Рассматриваются обратимые расширения минимального отношения, порожденного неотрицательной операторной функцией и дифференциальным выражением эллиптического типа. Доказывается, что операторы, обратные к таким расширениям, являются интегральными и дается описание этих интегральных операторов. Получена формула обобщенных резольвент минимального отношения.

Ключевые слова: линейное отношение, симметрическое отношение, обобщенная резольвента, функция Грина, операторная функция.

УДК: 517.983

Abstract. We study invertible extensions of the minimal relation generated by a nonnegative operator function and a differential elliptic-type expression. We prove that the operators inverse to such extensions are integral operators and describe such integral operators. We obtain a formula for generalized resolvents of the minimal relation.

Keywords: linear relation, symmetric relation, generalized resolvent, Green function, operator function.

Введение. Линейные отношения, порожденные неотрицательной операторной функцией и формально самосопряженным дифференциальным выражением с ограниченными операторными коэффициентами, определялись в конечномерном случае в [1], а в бесконечномерном случае — в [2]. Формула обобщенных резольвент для таких отношений в конечномерном случае получена в [2], [3], а в бесконечномерном случае — в [2]. При построении такой формулы используются граничные значения для упорядоченных пар, образующих максимальное отношение. В бесконечномерном случае ситуация усложняется тем, что ядро максимального отношения может содержать элементы, не являющиеся функциями со значениями в исходном пространстве. (В [2] предполагалось выполненным условие, гарантирующее отсутствие таких элементов.) Поэтому граничные значения для упорядоченных пар, принадлежащих максимальному отношению, вообще говоря, не содержатся в исходном пространстве даже тогда, когда коэффициенты дифференциального выражения являются ограниченными операторами. При наличии неограниченного операторного коэффициента в дифференциальном выражении для построения граничных значений требуется более широкое пространство, чем исходное, и при отсутствии операторного веса (см., напр., [4], с. 211).

Поступила 31.08.2006

В данной работе рассматриваются линейные отношения, порожденные неотрицательной весовой операторной функцией и дифференциальным выражением эллиптического типа с переменным неограниченным операторным коэффициентом. Дается описание обратимых расширений и обобщенных резольвент минимального отношения. В связи с наличием неограниченного переменного операторного коэффициента в первой части работы изучаются свойства соответствующей функции Грина. Основные теоремы доказываются с помощью абстрактных пространств граничных значений, введенных в работах [5]–[8]. Это позволяет значительно упростить доказательства.

1. Максимальное и минимальное отношения. Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. На конечном отрезке $[0,b]$ рассмотрим дифференциальное выражение $l[y]=-y''+\mathcal{A}_1(t)y$, где операторная функция $\mathcal{A}_1(t)$ удовлетворяет следующим условиям: при каждом фиксированном $t\in[0,b]$ оператор $\mathcal{A}_1(t)$ положительно определен и самосопряжен в H; операторы $\mathcal{A}_1(t)$ имеют постоянную область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1(t))=\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$; для любого элемента $x\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ функция $\mathcal{A}_1(t)x$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0,b]$.

Зафиксируем какую-либо точку $t_0\in[0,b]$. Пусть $\{\widehat{H}_\tau\}$ $(-1\leqslant\tau\leqslant 1)$ — гильбертова шкала пространств ([4], с. 65), порожденная оператором $\mathcal{A}_1(t_0)$. Шкала $\{\widehat{H}_\tau\}$ не зависит от выбора точки $t_0\in[0,b]$ в следующем смысле. Если t_0' — какая-либо другая точка из промежутка $[0,b]$ и $\{\widehat{H}_\tau'\}$ — гильбертова шкала пространств, порожденная оператором $\mathcal{A}_1(t_0')$, то множества $\widehat{H}_\tau$ и $\widehat{H}_\tau'$ совпадают, а нормы в них эквивалентны. При каждом фиксированном $t\in[0,b]$ оператор $\mathcal{A}_1(t)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно $\widehat{H}_{+1}$ на H. Поэтому сопряженный к $\mathcal{A}_1(t)$ оператор $\mathcal{A}_1^+(t)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно H на $\widehat{H}_{-1}$ и является расширением $\mathcal{A}_1(t)$. Далее обозначаем $l^+[y]=-y''+\mathcal{A}_1^+(t)y$.

Пусть $A(t)$ — сильно измеримая на $[0,b]$ операторная функция, значениями которой являются ограниченные самосопряженные операторы в H такие, что $(A(t)x,x)\geqslant 0$ для почти всех $t\in[0,b]$ и всех $x\in H$. Предполагается, что норма $\|A(t)\|$ суммируема на отрезке $[0,b]$.

На множестве непрерывных на отрезке $[0,b]$ функций со значениями в H введем скалярное произведение

$$(y,z)_{\mathrm{B}}=\int_0^b(A(t)y(t),z(t))dt.$$

Отождествляя с нулем функции y со свойством $(y,y)_{\mathrm{B}}=0$, а затем факторизуя и производя пополнение, получим гильбертово пространство, которое обозначим $\mathrm{B}=L_2(H,A(t);0,b)$. Элементами пространства B являются классы функций, отождествленных между собой по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{B}}$. Далее $\widetilde{y}$ обозначает класс функций с представителем y. Чтобы не усложнять терминологию, будем часто говорить про функцию y, являющуюся представителем класса $\widetilde{y}$, что y принадлежит B.

Пусть $G_0(t)$ — множество таких элементов $x\in H$, что $A(t)x=0$, $H(t)$ — ортогональное дополнение в H к $G_0(t)$, $H(t)=H\ominus G_0(t)$, $A_0(t)$ — сужение $A(t)$ на $H(t)$, $\{H_\xi(t)\}$ — гильбертова шкала пространств, порожденная оператором $A_0^{-1}(t)$. Оператор $A_0(t)$ расширяется по непрерывности до оператора $\widetilde{A}_0(t)$, отображающего непрерывно и взаимно однозначно $H_{-\alpha}(t)$ на $H_{1-\alpha}(t)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$. Через $\widetilde{A}(t)$ обозначим оператор, определенный на $H_{-\alpha}(t)\oplus G_0(t)$, равный $\widetilde{A}_0(t)$ на $H_{-\alpha}(t)$ и нулю — на $G_0(t)$. Оператор $\widetilde{A}(t)$ является расширением $A(t)$. В [2] доказано, что пространства $H_{-1/2}(t)$ измеримы по параметру t ([9], с. 28), если в качестве измеримых функций взять функции вида $\widetilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/2}(t)h(t)$, где $h(t)$

— измеримая функция со значениями в пространстве H. Пространство В состоит из элементов (т. е. классов функций) с представителями вида $\widetilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/2}(t)h(t)$, где $h(t) \in L_2(H; 0, b)$, т. е. $\int\limits_0^b \|h(t)\|^2 dt < \infty$.

Определим максимальное и минимальное отношения, порожденные выражением $l^+[y]$ и функцией $A(t)$. Обозначим через D' множество функций $y(t) \in$ В со свойствами i) $y(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0, b]$ в пространстве H и $y'(t)$ абсолютно непрерывна в пространстве $\widehat{H}_{-1}$, ii) $l^+[y](t) \in H_{1/2}(t)$ при почти всех t и функция $\widetilde{A}_0^{-1}(t)l^+[y]$ принадлежит В. Поставим в соответствие каждому классу функций, отождествленных в В с $y \in D'$, класс функций, отождествленных в В с $\widetilde{A}_0^{-1}(t)l^+[y]$. Это соответствие, вообще говоря, не будет оператором, так как может случиться, что функция $y(t)$ отождествлена с нулем в В, а функция $\widetilde{A}_0^{-1}(t)l^+[y]$ отлична от нуля. Таким образом, получим в пространстве В линейное отношение L', замыкание которого обозначим через L и назовем максимальным отношением. Минимальное отношение L_0 определим как сужение L на множество элементов $\widetilde{y} \in$ В, обладающих представителями $y \in D'$ со свойством $y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0$.

Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в ([4], [10]). Далее обозначаем: $\{\cdot, \cdot\}$ — упорядоченная пара; $\operatorname{Ker} L$ — множество пар вида $\{z, 0\} \in L$; $\ker L$ — множество элементов z таких, что $\{z, 0\} \in L$; $\mathcal{R}(L)$ — область значений отношения L, $\mathcal{D}(L)$ — область определения.

2. Функция Грина. Для изучения введенных отношений построим функцию Грина $G(t, s, \lambda)$ задачи Неймана для выражения $l^+[y] - \lambda A(t)y$. С этой целью используем функцию Грина той же задачи для выражения $l[y]$, построенную в [11]. Согласно [11] операторная функция $G(t, s)$ называется функцией Грина задачи

$$l[y] = -y'' + \mathcal{A}_1(t)y = g(t), \tag{1}$$

$$y'(0) = y'(b) = 0, \tag{2}$$

если для любой функции $g(t)$ со значениями в H, удовлетворяющей условию Гёльдера, интеграл $z(t) = \int\limits_0^b G(t, s)g(s)ds$ дает решение задачи (1), (2). При этом решением уравнения (1) в [11] была названа функция $y(t)$ со значениями в H, удовлетворяющая условиям:

1) $y(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, b]$ и дважды сильно непрерывно дифференцируема на интервале $(0, b)$;

2) значения $y(t)$ принадлежат $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ для $t \in (0, b)$, а функция $\mathcal{A}_1^{1/2}(t)y(t)$ непрерывна на $[0, b]$;

3) $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1) на $(0, b)$. В [11] установлено, что для любых $x_1, x_2 \in H$ существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$y'(0) = -x_1, \quad y'(b) = x_2. \tag{3}$$

Решение однородного уравнения $l[y] = 0$, удовлетворяющее (3), имеет вид $y(t) = G(t, 0)x_1 + G(t, b)x_2$.

Докажем, что для любой функции $h(t) \in L_1(H; 0, b)$ найдется функция $y(t)$ со свойствами (а) $y(t)$ сильно непрерывно дифференцируема в пространстве H на $[0, b]$; (б) $y'(t)$ абсолютно непрерывна в пространстве $\widehat{H}_{-1}$; (в) $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$l^+[y] = -y'' + \mathcal{A}_1^+(t)y = h(t).$$

Возьмем последовательность достаточно гладких на $[0,b]$ функций $h_n(t)$, сходящуюся к $h(t)$ в пространстве $L_1(H;0,b)$. Функции $z_n(t)=\int\limits_0^b G(t,s)h_n(s)ds$ удовлетворяют условиям 1), 2) и уравнению

$$-z_n''(t)+\mathcal{A}_1^+(t)z_n(t)=h_n(t). \tag{4}$$

Из условий, наложенных на $\mathcal{A}_1(t)$, и оценок из [11] следует, что функции $G(t,s)$, $G_t'(t,s)$ $(t\neq s)$ равномерно по t, s ограничены по норме на $[0,b]$. Поэтому последовательности $\{z_n(t)\}$, $\{z_n'(t)\}$ при $n\to\infty$ сходятся равномерно в H к

$$z(t)=\int_0^b G(t,s)h(s)ds,\quad z'(t)=\int_0^b G_t'(t,s)h(s)ds \tag{5}$$

соответственно. Отсюда следует, что $z(t)$, $z'(t)$ сильно непрерывны на $[0,b]$ в пространстве H и последовательность $\{\mathcal{A}_1^+(t)z_n(t)\}$ равномерно сходится в пространстве $\widehat{H}_{-1}$ к $\mathcal{A}_1^+(t)z(t)$. Так как $z_n'(0)=z_n'(b)=0$, то из (4), (5) получаем, что последовательность $\{z_n''(t)\}$ сходится в $L_1(\widehat{H}_{-1};0,b)$ к $z''(t)$ и $z'(0)=z'(b)=0$. Поэтому $z(t)$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в). Итак, справедлива

Лемма 1. *Пусть $h(t)\in L_1(H;0,b)$. Функция $y(t)$ тогда и только тогда удовлетворяет условиям* (а), (б), (в)*, когда $y(t)$ можно представить в виде*

$$y(t)=G(t,0)x_1+G(t,b)x_2+z(t), \tag{6}$$

где $x_1,x_2\in H$, $z(t)$ определяется формулой (5).

Замечание 1. В равенстве (6) функция y удовлетворяет условиям (3). Для любой функции $h(t)\in L_1(H;0,b)$ и любых элементов $x_1,x_2\in H$ функция y со свойствами (а), (б), (в) единственным образом определяется условиями (3).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$K(t,s,\lambda)x=A^{1/2}(t)G(t,s)x+\lambda\int_0^b A^{1/2}(t)G(t,\tau)A^{1/2}(\tau)K(\tau,s,\lambda)x\,d\tau \tag{7}$$

с неизвестной функцией $K(t,s,\lambda)x$, где $x\in H$. Так как функция $G(t,s)$ равномерно по t, s ограничена по норме, то в гильбертовом пространстве $L_2(H;0,b)$ ограничен оператор G, определяемый равенством $Gv=\int\limits_0^b G(t,s)v(s)ds$. Оператор G^{-1} является замыканием оператора, порожденного в $L_2(H;0,b)$ выражением $l[y]$ и граничными условиями (2) ([11]; [4], с. 255). Поэтому G положительно определен. Ядро $A^{1/2}(t)G(t,s)A^{1/2}(s)$ определяет в $L_2(H;0,b)$ ограниченный неотрицательный оператор

$$G_Av=\int_0^b A^{1/2}(t)G(t,s)A^{1/2}(s)v(s)ds\quad (v\in L_2(H;0,b)).$$

Уравнение (7) разрешимо при всех λ, для которых оператор λG_A-E имеет всюду определенный ограниченный обратный (E — тождественный оператор). Множество таких чисел λ обозначим $\rho_0(G_A)$; оно содержит все недействительные, отрицательные числа и нуль. Далее всегда считаем $\lambda\in\rho_0(G_A)$.

Так как при фиксированном $s\in[0,b]$ функция $A^{1/2}(t)K(t,s,\lambda)x$ $(x\in H)$ принадлежит $L_1(H;0,b)$, то функция $G(t,s,\lambda)$, определенная равенством

$$G(t,s,\lambda)x=G(t,s)x+\lambda\int_0^b G(t,\tau)A^{1/2}(\tau)K(\tau,s,\lambda)x\,d\tau, \tag{8}$$

сильно непрерывна по t в пространстве H. Из (7), (8) следует

$$G(t,s,\lambda)x = G(t,s)x + \lambda\int_0^b G(t,\tau)A(\tau)G(\tau,s,\lambda)x\,d\tau \tag{9}$$

и $G'_t(0,0,\lambda)x = -x$, $G'_t(b,0,\lambda)x = 0$, $G'_t(0,b,\lambda)x = 0$, $G'_t(b,b,\lambda)x = x$. Согласно лемме 1 функция $y(t) = G(t,0,\lambda)x_1 + G(t,b,\lambda)x_2$ ($x_1, x_2 \in H$) обладает свойствами (а), (б), удовлетворяет граничным условиям (3) и уравнению

$$-y'' + \mathcal{A}_1^+(t)y - \lambda A(t)y = 0. \tag{10}$$

Докажем, что задача (10), (3) имеет единственное решение. Действительно, пусть $y'(0) = y'(b) = 0$. Положим $u(t) = \lambda\int_0^b G(t,s)A(s)y(s)ds$. Тогда из замечания 1 следует $y(t) = u(t)$. Отсюда

$$A^{1/2}(t)y(t) = \lambda\int_0^b A^{1/2}(t)G(t,s)A(s)y(s)ds.$$

Так как $\lambda \in \rho_0(G_A)$, имеем $A^{1/2}(t)y(t) = 0$ при почти всех t. Поэтому $y(t) = u(t) = 0$ при всех t и единственность решения задачи (10), (3) доказана.

Из (9) следует

$$A^{1/2}(t)G(t,s,\lambda)A^{1/2}(s) = A^{1/2}(t)G(t,s)A^{1/2}(s) + \lambda\int_0^b A^{1/2}(t)G(t,\tau)A(\tau)G(\tau,s,\lambda)A^{1/2}(s)d\tau.$$

Ядро $A^{1/2}(t)G(t,s,\lambda)A^{1/2}(s)$ определяет в $L_2(H;0,b)$ ограниченный оператор

$$G_A(\lambda)v = \int_0^b A^{1/2}(t)G(t,s,\lambda)A^{1/2}(s)v(s)ds.$$

(Ясно, что $G_A(0) = G_A$.) Операторы $G_A(\lambda)$ и G_A перестановочны и в силу самосопряженности G_A имеем для почти всех t, s равенство

$$A^{1/2}(s)G^*(t,s,\lambda)A^{1/2}(t) = A^{1/2}(s)G(s,t,\overline{\lambda})A^{1/2}(t). \tag{11}$$

Обозначим $g_\lambda(t) = A^{1/2}(t)G(t,s,\lambda)x$, $g(t) = A^{1/2}(t)G(t,s)x$, где $x \in H$, s фиксировано. Так как $g_\lambda, g \in L_2(H;0,b)$, из (9) следует $g_\lambda = g + \lambda G_A g_\lambda$. Из равенства $E + \lambda G_A(\lambda) = (E - \lambda G_A)^{-1}$ получаем $g_\lambda = g + \lambda G_A(\lambda)g$. Поэтому в пространстве H при почти всех t, s

$$A^{1/2}(t)G(t,s,\lambda) = A^{1/2}(t)G(t,s) + \lambda\int_0^b A^{1/2}(t)G(t,\tau,\lambda)A(\tau)G(\tau,s)d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к сопряженным операторам, меняя местами t и s, заменяя λ на $\overline{\lambda}$, учитывая (11) и равенство $G^*(t,s) = G(s,t)$, получим

$$G^*(s,t,\overline{\lambda})A^{1/2}(s) = G(t,s)A^{1/2}(s) + \lambda\int_0^b G(t,\tau)A(\tau)G(\tau,s,\lambda)A^{1/2}(s)d\tau. \tag{12}$$

Из (9) имеем

$$G(t,s,\lambda)A^{1/2}(s) = G(t,s)A^{1/2}(s) + \lambda\int_0^b G(t,\tau)A(\tau)G(\tau,s,\lambda)A^{1/2}(s)d\tau. \tag{13}$$

Из (12), (13) следует $G^*(s,t,\overline{\lambda})A^{1/2}(s) = G(t,s,\lambda)A^{1/2}(s)$. Так как область значений оператора $A^{1/2}(s)$ плотна в $H(s)$, то на $H(s)$ справедливо равенство $G^*(s,t,\overline{\lambda}) = G(t,s,\lambda)$. Поскольку $\widetilde{A}(s)c \in H(s)$ для любого элемента $c \in H_{-1}(s) \oplus G_0(s)$, имеем

$$G^*(s,t,\overline{\lambda})\widetilde{A}(s)c = G(t,s,\lambda)\widetilde{A}(s)c \quad (c \in H_{-1}(s) \oplus G_0(s)). \tag{14}$$

Пусть f — функция со значениями в $H_{-1}(t) \oplus G_0(t)$ такая, что $\widetilde{A}(t)f(t) \in L_1(H;0,b)$. Из (14) вытекает, что $G^*(s,t,\overline{\lambda})\widetilde{A}(s)f(s) = G(t,s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)$. При $\lambda \in \rho_0(G_A)$ функция $G(t,s,\lambda)$ ограничена по первому аргументу. Следовательно, функция $G^*(t,s,\lambda)$ обладает тем же свойством. Поэтому интеграл

$$F(t) = \int_0^b G(t,s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds = \int_0^b G^*(s,t,\overline{\lambda})\widetilde{A}(s)f(s)ds \tag{15}$$

существует. Из (9) следует, что $F(t)$ обладает свойствами (а), (б), удовлетворяет граничным условиям (2) и является решением уравнения

$$-y'' + \mathcal{A}_1^+(t)y(t) - \lambda\widetilde{A}(t)y(t) = \widetilde{A}(t)f(t). \tag{16}$$

Обозначим символом $U(t,\lambda)$ операторную однострочную матрицу $U(t,\lambda) = (U_1(t,\lambda), U_2(t,\lambda))$, где $U_1(t,\lambda) = G(t,0,\lambda)$, $U_2(t,\lambda) = G(t,b,\lambda)$. Сведем полученные результаты в следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любой функции $f(t)$ со значениями в $H_{-1}(t)$ такой, что $\widetilde{A}(t)f(t) \in L_1(H;0,b)$ и любых $x_1, x_2 \in H$ существует единственная функция y со свойствами* (а), (б)*, удовлетворяющая уравнению* (16) *и граничным условиям* (3)*. Эта функция имеет вид*

$$y(t) = U_1(t,\lambda)x_1 + U_2(t,\lambda)x_2 + F(t),$$

где $F(t)$ определяется равенством (15).

Лемма 3. *Оператор $\widetilde{f} \to F = F(t,\widetilde{f},\lambda)$, где F задается формулой* (15)*, непрерывно отображает пространство* В *в пространство $C(H;0,b)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{f} \in$ В. Так как $\|A^{1/2}(t)\| \in L_2(0,b)$, $\|\widetilde{A}^{1/2}(t)f(t)\| \in L_2(0,b)$, достаточно доказать неравенство

$$\|F(t,\widetilde{f},\lambda)\| \leqslant k\int_0^b \|\widetilde{A}(s)f(s)\|ds, \tag{17}$$

где $k > 0$ не зависит от t. В силу равномерной ограниченности по t, s нормы $\|G(t,s)\|$ неравенство (17) выполняется при $\lambda = 0$. Из равенства

$$\int_0^b G(t,s,\lambda)\widetilde{A}(s)g(s)ds = \int_0^b G(t,s)\widetilde{A}(s)g(s)ds + \\ + \lambda\int_0^b G(t,\tau)\widetilde{A}(\tau)\left(\int_0^b G(\tau,s,\lambda)\widetilde{A}(s)g(s)ds\right)d\tau$$

и ограниченности в пространстве $L_2(H;0,b)$ оператора $G_A(\lambda)$ следует

$$\|F(t,\widetilde{g},\lambda)\| \leqslant k_1\|\widetilde{g}\|_{L_2(H,A(t);0,b)} \quad (k_1 > 0, \ \ \widetilde{g} \in L_2(H,A(t);0,b)). \tag{18}$$

Поскольку

$$\left\|A^{1/2}(\tau)\int_0^b G(\tau,s)\widetilde{A}(s)f(s)ds\right\|_{L_2(H;0,b)} \leqslant k_2\|A^{1/2}(\tau)\|_{L_2(0,b)}\int_0^b \|\widetilde{A}(s)f(s)\|ds$$

($k_2 > 0$), соотношение (18) и равенство

$$\int_0^b G(t,s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds = \int_0^b G(t,s)\widetilde{A}(s)f(s)ds+$$
$$+\lambda\int_0^b G(t,\tau,\lambda)\widetilde{A}(\tau)\left(\int_0^b G(t,s)\widetilde{A}(s)f(s)ds\right)d\tau$$

влекут (17). □

Из этой леммы следует, что оператор $\widetilde{f}\to\widetilde{F}=\widetilde{F}(t,\widetilde{f},\lambda)$, где F задается равенством (15), непрерывен в пространстве В.

3. Основные результаты. Обозначим через Q_0 множество элементов $c\in H\oplus H$, для которых $A(t)U(t,\lambda)c=0$ при почти всех t. Из равенств

$$U(t,0)c = U(t,\lambda)c - \lambda\int_0^b G^*(s,t,\overline{\lambda})\widetilde{A}(s)U(s,0)c\,ds, \tag{19}$$

$$U(t,\lambda)c = U(t,0)c + \lambda\int_0^b G^*(s,t)\widetilde{A}(s)U(s,\lambda)c\,ds, \tag{20}$$

вытекающих из леммы 2, получим, что Q_0 не зависит от λ. Пусть Q — ортогональное дополнение в пространстве $H\oplus H$ к Q_0. Введем в Q скалярное произведение

$$(c_1,c_2)_- = \int_0^b (A(s)U(s,0)c_1, U(s,0)c_2)ds \quad (c_1,c_2\in Q).$$

Это скалярное произведение порождает в Q норму

$$\|c\|_- = \left(\int_0^b \|A^{1/2}(s)U(s,0)c\|^2 ds\right)^{1/2} \leqslant k\|c\|, \quad k>0, \quad c\in Q. \tag{21}$$

Пополнение Q по норме $\|\cdot\|_-$ обозначим Q_-. Из равенств (19), (20) следует, что замена в (21) $U(s,0)$ на $U(s,\lambda)$ приводит к тому же множеству Q_- с эквивалентной нормой. Пространство Q_- можно рассматривать как негативное ([4], с. 59) по отношению к Q. Соответствующее позитивное пространство обозначим Q_+. Символ $\widetilde{U}(t,\lambda)c$ ($c\in Q_-$) обозначает класс функций, к которому сходится последовательность классов функций $\{\widetilde{U}(t,\lambda)c_n\}$ ($c_n\in Q$), когда $\{c_n\}$ сходится в Q_- к c. Пусть $V(\lambda): Q_-\to$ В — оператор, определенный формулой $V(\lambda)c=\widetilde{U}(t,\lambda)c$. Область значений оператора $V(\lambda)$ замкнута и $\ker V(\lambda)=\{0\}$. Поэтому сопряженный оператор $V^*(\lambda):$ В $\to Q_+$ непрерывен и имеет область значений, совпадающую с Q_+. Найдем вид $V^*(\lambda)$. Для любых элементов $c\in Q$ и $\widetilde{f}\in$ В имеем

$$(\widetilde{f},V(\lambda)c) = \int_0^b(\widetilde{A}(s)f(s)ds, U(s,\lambda)c)ds = \left(\int_0^b U^*(s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds, c\right) = (V^*(\lambda)\widetilde{f},c).$$

Так как Q плотно вкладывается в Q_-, $V^*(\lambda)\widetilde{f}=\int\limits_0^b U^*(s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds$.

Лемма 4. *При любом $\lambda\in\rho_0(G_A)$ отношение $L-\lambda E$ состоит из множества таких пар $\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}\in$ В $\oplus$ В, что*

$$\widetilde{y}=\widetilde{U}(t,\lambda)c+\widetilde{F}, \tag{22}$$

где $c\in Q_-$, $\widetilde{F}$ — класс функций, отождествленных в В *с функцией* (15).

Доказательство. Из лемм 2, 3 и определения пространства Q_- следует, что пара $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in \mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$, для которой выполняется (22), принадлежит $L - \lambda E$. Пусть $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L - \lambda E$. Тогда согласно лемме 2 и определению отношений L, L' найдется последовательность пар $\{\widetilde{y}_n, \widetilde{f}_n\} \in L' - \lambda E$, сходящаяся к паре $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}$ в $\mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$. Функция y_n представима в виде

$$y_n(t) = U(t,\lambda)c_n + \int_0^b G^*(s,t,\overline{\lambda})\widetilde{A}(s)f_n(s)ds, \tag{23}$$

где $c_n \in Q$. Из сходимости последовательности пар $\{\widetilde{y}_n, \widetilde{f}_n\}$ в $\mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$ следует сходимость последовательности $\{\widetilde{U}(t,\lambda)c_n\}$ в B. Переходя в (23) к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\widetilde{y}$ допускает вид (22). □

Следствие 1. Оператор $V(\lambda)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает Q_- на $\ker(L-\lambda E)$.

Замечание 2. Для любой пары $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L - \lambda E$ существуют единственный элемент $c \in Q_-$ и единственная функция $F(t)$ вида (15), для которых выполняется равенство (22). Действительно, если f_1, f_2 отождествлены в B между собой, то $\widetilde{A}(t)f_1 = \widetilde{A}(t)f_2$ и утверждение вытекает из следствия 1.

Замечание 3. Если F задана равенством (15), то $\{F(0), F(b)\} = V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}$.

Лемма 5. *При любом $\lambda \in \rho_0(G_A)$ отношение $L_0 - \lambda E$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность пар $\{\widetilde{y}_n, \widetilde{f}_n\} \in L_0 - \lambda E$ сходится в пространстве $\mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$ к паре $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}$. Из определения L_0 и леммы 2 следует, что можно выбрать таких представителей y_n, f_n классов функций $\widetilde{y}_n$, $\widetilde{f}_n$, для которых выполняется (23), где $c_n \in Q$ и $y_n(0) = y_n(b) = y_n'(0) = y_n'(b) = 0$. В силу замечания 3 и леммы 2 $c_n = 0$ и $V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}_n = 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем равенстве и в (23), получим в (22) $c = 0$ и $V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f} = 0$. Поэтому $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L_0 - \lambda E$. □

Замечание 4. Попутно доказано равенство $\mathcal{R}(L_0 - \lambda E) = \ker V^*(\overline{\lambda})$.

Лемма 6. *Пусть пары $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}, \{\widetilde{z}, \widetilde{g}\} \in L'$. Тогда существуют такие представители $y \in \widetilde{y}$, $z \in \widetilde{z}$, для которых выполняется равенство*

$$(\widetilde{f}, \widetilde{z})_{\mathrm{B}} - (\widetilde{y}, \widetilde{g})_{\mathrm{B}} = -(y'(b), z(b)) + (y'(0), z(0)) + (y(b), z'(b)) - (y(0), z'(0)). \tag{24}$$

Доказательство. Из лемм 2, 4 и определения отношения L' следует, что найдутся такие представители $y \in \widetilde{y}$, $z \in \widetilde{z}$, для которых выполняются равенства

$$y(t) = U(t)c_1 + \int_0^b G^*(s,t)\widetilde{A}(s)f(s)ds, \quad z(t) = U(t)c_2 + \int_0^b G^*(s,t)\widetilde{A}(s)g(s)ds,$$

где $c_1, c_2 \in Q$. Так как $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathrm{B}$, то $\widetilde{A}(s)f(s), \widetilde{A}(s)g(s) \in L_1(H; 0, b)$. Выберем последовательность гладких функций $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, сходящиеся в пространстве $L_1(H; 0, b)$ к функциям $\widetilde{A}(s)f(s)$, $\widetilde{A}(s)g(s)$ соответственно. Следовательно, функции

$$y_n(t) = U(t)c_1 + \int_0^b G^*(s,t)f_n(s)ds, \quad z_n(t) = U(t)c_2 + \int_0^b G^*(s,t)g_n(s)ds$$

являются решениями (в смысле [11]) уравнения (1) и поэтому удовлетворяют условиям 1), 2). Из условия 2) вытекает, что $y_n(t), z_n(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ при любом $t \in (0, b)$. Следовательно, для всех α, β $(0 < \alpha < \beta < b)$ выполняется равенство

$$\int_\alpha^\beta (l^+[y_n], z_n)dt - \int_\alpha^\beta (y_n, l^+[z_n])dt = \int_\alpha^\beta (-y_n''(t) + \mathcal{A}_1(t)y_n(t), z_n(t))dt -$$
$$- \int_\alpha^\beta (y_n(t), -z_n''(t) + \mathcal{A}_1(t)z_n(t))dt = -\int_\alpha^\beta (y_n''(t), z_n(t))dt + \int_\alpha^\beta (y_n(t), z_n''(t))dt =$$
$$= -(y_n'(\beta), z_n(\beta)) + (y_n'(\alpha), z_n(\alpha)) + (y_n(\beta), z_n'(\beta)) - (y_n(\alpha), z_n'(\alpha)).$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \to 0$, $\beta \to b$, получим

$$\int_0^b (l^+[y_n], z_n)dt - \int_0^b (y_n, l^+[z_n])dt =$$
$$= -(y_n'(b), z_n(b)) + (y_n'(0), z_n(0)) + (y_n(b), z_n'(b)) - (y_n(0), z_n'(0)).$$

Из свойств функции Грина $G(t,s)$ следует, что последовательности $\{y_n(t)\}$, $\{y_n'(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, $\{z_n'(t)\}$ равномерно сходятся на отрезке $[0,b]$ к функциям $y(t)$, $y'(t)$, $z(t)$, $z'(t)$ соответственно. Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_0^b (\widetilde{A}(t)f(t), z(t))dt - \int_0^b (y(t), \widetilde{A}(t)g(t))dt =$$
$$= -(y'(b), z(b)) + (y'(0), z(0)) + (y(b), z'(b)) - (y(0), z'(0)).$$

Отсюда следует равенство (24). □

Следствие 2. Отношение L_0 симметрическое.

Обозначим через $\mathcal{N}_\lambda$ дефектное подпространство отношения L_0, т.е. ортогональное дополнение к области значений отношения $L_0 - \lambda E$. Из следствия 1 и замечания 4 вытекает $\mathcal{N}_\lambda = \ker(L - \overline{\lambda}E)$.

Лемма 7. $L_0^* = L$.

Доказательство. Из леммы 6 следует, что $L' \subset L_0^*$. Поэтому $L \subset L_0^*$. Известно [12], что L_0^* является прямой суммой своих подпространств: $L_0^* = L_0 \dot{+} \mathbf{N}_\lambda \dot{+} \mathbf{N}_{\overline{\lambda}}$, где $\mathbf{N}_\lambda$ — множество упорядоченных пар вида $\{z, \overline{\lambda}z\}$, $z \in \mathcal{N}_\lambda$. Так как $L_0 \subset L$, $\mathbf{N}_\lambda \subset L$, $\mathbf{N}_{\overline{\lambda}} \subset L$, имеем $L_0^* \subset L$. □

Отметим, что для отношений, порожденных неотрицательной операторной функцией и дифференциальным выражением с ограниченными операторными коэффициентами, эта лемма доказана в [13].

Пусть B_1, B_2, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ — банаховы пространства, $T \subset \mathrm{B}_1 \oplus \mathrm{B}_2$ — замкнутое линейное отношение, $\gamma : T \to \widetilde{B}_1 \oplus \widetilde{B}_2$ — линейный оператор, $\gamma_i = P_i\gamma$ $(i = 1, 2)$, где P_i — проектор $\widetilde{B}_1 \oplus \widetilde{B}_2$ на $\widetilde{B}_i$, соответствующий разложению в прямую сумму. Подобные обозначения используются также в аналогичных случаях. Следующее определение для операторов дано в [5], а для отношений — в [6].

Определение. Четверка $(\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \gamma_1, \gamma_2)$ называется пространством граничных значений (ПГЗ) для отношения T, если оператор γ непрерывно отображает T на $\widetilde{B}_1 \oplus \widetilde{B}_2$ и сужение оператора γ_1 на $\operatorname{Ker} T$ является взаимно однозначным отображением $\operatorname{Ker} T$ на $\widetilde{B}_1$.

С каждым ПГЗ связан оператор Φ, определенный равенством: $\Phi = \gamma_2\beta$, где $\beta = (\gamma_1|_{\operatorname{Ker} T})^{-1}$ — оператор, обратный к сужению γ_1 на $\operatorname{Ker} T$. Обозначим $T_0 = \ker\gamma$, т.е. T_0 — отношение, состоящее из упорядоченных пар $\{y_1, y_2\} \in T$, для которых $\gamma\{y_1, y_2\} = 0$.

Между отношениями $\theta \subset \widetilde{B}_1 \oplus \widetilde{B}_2$ и отношениями $\widetilde{T}$ со свойством $T_0 \subset \widetilde{T} \subset T$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством: $\gamma\widetilde{T} = \theta$. В этом случае обозначаем $\widetilde{T} = T_\theta$.

Лемма 8 ([6]). *Отношение T_θ обратимо (т. е. T_θ^{-1} является оператором) тогда и только тогда, когда отношение $\theta - \Phi$ обратимо. При этом оператор T_θ^{-1} замкнут, плотно определен, всюду определен в том и только том случае, когда соответствующими свойствами обладает оператор $(\theta - \Phi)^{-1}$.*

Каждой паре $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L - \lambda E$, представленной в виде (22), поставим в соответствие пару граничных значений по формулам

$$\gamma_1(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = c \in Q_-, \quad \gamma_2(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f} = \int_0^b U^*(s, \overline{\lambda})\widetilde{A}(s)f(s)ds \in Q_+. \tag{25}$$

Из замечания 2 следует, что для любой пары $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L - \lambda E$ соответствующая пара граничных значений определена однозначно. Согласно лемме 4 и следствию 1 четверка $(Q_-, Q_+, \gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda))$ при каждом $\lambda \in \rho_0(G_A)$ является ПГЗ для отношения $L - \lambda E$. Из замечания 4 и доказательства леммы 5 вытекает, что $\ker\gamma(\lambda) = L_0 - \lambda E$. Так как $\gamma_2(\lambda)\{z, 0\} = 0$ при $z \in \ker(L - \lambda E)$, соответствующий оператор $\widetilde{\Phi}(\lambda) = \gamma_2(\lambda)(\gamma_1(\lambda)\mid_{\operatorname{Ker}(L-\lambda E)})^{-1} = 0$.

Между отношениями $\theta(\lambda) \subset Q_- \oplus Q_+$ и отношениями $L(\lambda)$ со свойством $L_0 \subset L(\lambda) \subset L$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое равенством

$$\gamma(\lambda)(L(\lambda) - \lambda E) = \theta(\lambda). \tag{26}$$

Таким образом, пара $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L(\lambda) - \lambda E$ тогда и только тогда, когда пара $\{\gamma_1(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}, \gamma_2(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}\} \in \theta(\lambda)$. Отсюда и из лемм 4, 8 вытекает

Теорема 1. *Отношение $R(\lambda) = (L(\lambda) - \lambda E)^{-1}$ является оператором тогда и только тогда, когда отношение $\theta^{-1}(\lambda)$ является оператором. При этом оператор $R(\lambda)$ замкнут, плотно определен, всюду определен в том и только том случае, когда теми же свойствами обладает оператор $\theta^{-1}(\lambda)$. Оператор $R(\lambda)$ является интегральным оператором вида*

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \widetilde{U}(t, \lambda)\theta^{-1}(\lambda)\int_0^b U^*(s, \overline{\lambda})\widetilde{A}(s)f(s)ds + \int_0^b G^*(s, t, \overline{\lambda})\widetilde{A}(s)f(s)ds =$$
$$= \int_0^b (\widetilde{U}(t, \lambda)\theta^{-1}(\lambda)U^*(s, \overline{\lambda}) + G^*(s, t, \overline{\lambda}))\widetilde{A}(s)f(s)ds. \tag{27}$$

В равенстве (27) предполагается, что $\widetilde{f} \in \mathcal{D}(R(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f} \in \mathcal{D}(\theta^{-1}(\lambda))$.

Найдем необходимое и достаточное условие голоморфности функции $R(\lambda)$. Следующее определение из [14] обобщает соответствующее определение для операторов [15]. Семейство замкнутых отношений $T(\lambda) \subset \mathrm{B}_1 \oplus \mathrm{B}_2$ называется голоморфным в точке $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, если существует такое банахово пространство $\mathbf{Z}$ и такое голоморфное в λ_0 семейство ограниченных линейных операторов $\Psi(\lambda) : \mathbf{Z} \to \mathrm{B}_1 \oplus \mathrm{B}_2$, что $\Psi(\lambda)$ отображает взаимно однозначно $\mathbf{Z}$ на $T(\lambda)$. Из определения вытекает, что семейства $T(\lambda)$ и $T^{-1}(\lambda)$ одновременно голоморфны или нет.

Лемма 9 ([14]). *Пусть семейство замкнутых линейных отношений $T(\lambda)$ определено в окрестности точки λ_0 и $T^{-1}(\lambda_0)$ является ограниченным всюду определенным оператором. Тогда семейство $T(\lambda)$ голоморфно в точке λ_0 в том и только том случае, когда при всех λ из некоторой окрестности точки λ_0 отношения $T^{-1}(\lambda)$ являются ограниченными всюду определенными операторами и операторная функция $T^{-1}(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0.*

Теорема 2. *Пусть отношение $R(\lambda_0)$ (или $\theta^{-1}(\lambda_0)$) является ограниченным всюду определенным оператором. Тогда семейства $R(\lambda)$ и $\theta^{-1}(\lambda)$ одновременно голоморфны или нет.*

Доказательство. Согласно теореме 1 отношения $R(\lambda_0)$ и $\theta^{-1}(\lambda_0)$ одновременно являются или нет ограниченными всюду определенными операторами. Предположим сначала, что семейство $\theta^{-1}(\lambda)$ голоморфно. Тогда по лемме 9 в некоторой окрестности точки λ_0 отношения $\theta^{-1}(\lambda)$ являются ограниченными всюду определенными операторами. По теореме 1 такими же являются $R(\lambda)$. Из (27) следует, что семейство $R(\lambda)$ голоморфно.

Предположим теперь, что семейство $R(\lambda)$ голоморфно. По лемме 9 в некоторой окрестности λ_0 отношения $R(\lambda)$ являются ограниченными всюду определенными операторами и по теореме 1 такими же являются $\theta^{-1}(\lambda)$. Из голоморфности функции $R(\lambda)$ и равенства (27) вытекает голоморфность функции $\widetilde{U}(t,\lambda)\theta^{-1}(\lambda)V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}$. Заменив в равенстве (20) c на $\theta^{-1}(\lambda)V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}$, получим, что функция $\widetilde{U}(t,0)\theta^{-1}(\lambda)V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}$ голоморфна. Из следствия 1 получаем, что функция $\theta^{-1}(\lambda)V^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}$ голоморфна. Теперь голоморфность функции $\theta^{-1}(\lambda)$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 10 ([16]). *Пусть при каждом фиксированном λ из некоторой окрестности точки λ_0 ограниченные линейные операторы $S_3(\lambda) : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3$, $S_1(\lambda) : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$, $S_2(\lambda) : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_3$ связаны равенством $S_3(\lambda) = S_2(\lambda)S_1(\lambda)$, причем область значений отношения $S_1(\lambda_0)$ совпадает с $\mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ — банаховы пространства. Если функции $S_1(\lambda)$, $S_3(\lambda)$ сильно дифференцируемы в точке λ_0, то в λ_0 сильно дифференцируема $S_2(\lambda)$.*

В этой лемме следует положить $\mathbf{B}_1 = \mathrm{B}$, $\mathbf{B}_2 = Q_+$, $\mathbf{B}_3 = Q_-$, $S_3(\lambda) = \theta^{-1}(\lambda)V^*(\overline{\lambda})$, $S_1(\lambda) = V^*(\overline{\lambda})$, $S_2(\lambda) = \theta^{-1}(\lambda)$. □

Пусть четверка $(\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \gamma_1, \gamma_2)$ является ПГЗ для отношения $T \subset \mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$. Обозначим $T_1 = \ker\gamma_1$. Тогда $T_0 \subset T_1 \subset T$. Пусть пара $\{y_1, y_2\} \in T$. Это равносильно тому, что пара $\{y_1, y_2 - \lambda y_1\} \in T - \lambda E$. Для любой пары $\{y_1, y_2 - \lambda y_1\} \in T - \lambda E$ положим $\widetilde{\gamma}(\lambda)\{y_1, y_2 - \lambda y_1\} = \gamma\{y_1, y_2\}$. В [6], [16] установлено, что четверка $(\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{\gamma}_1(\lambda), \widetilde{\gamma}_2(\lambda))$ тогда и только тогда является ПГЗ для отношения $T - \lambda E$, когда $\lambda \in \rho(T_1)$, где $\rho(T_1)$ — резольвентное множество отношения T_1, т.е. множество точек λ, при которых отношение $(T_1 - \lambda E)^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором.

Обозначим $\Gamma = \gamma(0)$, $L_1 = \ker\gamma_1(0)$, где $\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)$ определены равенствами (25). Для любой пары $\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} \in L - \lambda E$ положим

$$\Gamma(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} = \Gamma\{\widetilde{y}, \widetilde{g}\}. \tag{28}$$

Из вышеизложенного следует, что четверка $(Q_-, Q_+, \Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda))$ является ПГЗ для отношения $L - \lambda E$ при любом $\lambda \in \rho(L_1)$. Из леммы 4, справедливой при $\lambda \in \rho_0(G_A)$, вытекает, что $\rho_0(G_A) \subset \rho(L_1)$.

Пусть $\Phi(\lambda) = \Gamma_2(\lambda)(\Gamma_1(\lambda)\mid_{\mathrm{Ker}(L-\lambda E)})^{-1} : Q_- \to Q_+$. В силу (20)

$$\Phi(\lambda) = \lambda\int_0^b U^*(s,0)\widetilde{A}(s)\widetilde{U}(s,\lambda)ds.$$

Из того же равенства (20) получаем, что сужение $\Phi(\lambda)$ на Q совпадает с оператором, задаваемым матрицей

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} U_1(0,\lambda) - U_1(0,0) & U_2(0,\lambda) - U_2(0,0) \\ U_1(b,\lambda) - U_1(b,0) & U_2(b,\lambda) - U_2(b,0) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Лемма 11. *Пусть* $(Q_-, Q_+, \gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda))$, $(Q_-, Q_+, \Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda))$ *— введенные выше пространства граничных значений для отношения* $L - \lambda E$. *Тогда* $\gamma_1(\lambda) = \Gamma_1(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda) = \Gamma_2(\lambda) - \Phi(\lambda)\Gamma_1(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\{\widetilde{y}, \widetilde{g}\} \in L'$. Тогда $\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} \in L' - \lambda E$. Из леммы 4 получаем, что найдутся такие представители y, g классов функций $\widetilde{y}$, $\widetilde{g}$, для которых

$$y(t) = U(t,\lambda)c + \int_0^b G^*(s,t,\overline{\lambda})\widetilde{A}(s)(g(s) - \lambda y(s))ds, \tag{30}$$

$$y(t) = U(t,0)c + \int_0^b G^*(s,t,0)\widetilde{A}(s)g(s)ds, \tag{31}$$

где в равенствах (30), (31) элемент $c = \{-y'(0), y'(b)\} \in Q$ один и тот же. Из определения граничных значений (25), (28) следует

$$c = \gamma_1(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} = \Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{g}\} = \Gamma_1(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\}. \tag{32}$$

Вычтем из равенства (30) равенство (31) и положим $t = 0$, а затем $t = b$. Тогда, учитывая равенства (29), (32), замечание 3, получим

$$0 = \Phi(\lambda)c + V^*(\overline{\lambda})(\widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}) - V^*(0)\widetilde{g}.$$

Отсюда и из равенств (25), (28) имеем

$$\gamma_2(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} = \Gamma_2(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} - \Phi(\lambda)c. \tag{33}$$

Равенства (32), (33) влекут требуемое утверждение для отношения $L' - \lambda E$. Линейное многообразие $L' - \lambda E$ плотно в пространстве $L - \lambda E$, а операторы $\gamma(\lambda) : L - \lambda E \to Q_- \oplus Q_+$ и $\Gamma(\lambda) : L - \lambda E \to Q_- \oplus Q_+$ непрерывны. $\square$

Между отношениями $\theta_0(\lambda) \subset Q_- \oplus Q_+$ и отношениями $L(\lambda)$ со свойством $L_0 \subset L(\lambda) \subset L$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое равенством

$$\Gamma L(\lambda) = \theta_0(\lambda). \tag{34}$$

Отношение $L(\lambda)$, для которого выполняется (34), обозначим через $L_{\theta_0(\lambda)}$. Из (26), (34) получаем $\gamma(\lambda)(L_{\theta_0(\lambda)} - \lambda E) = \theta(\lambda)$.

Лемма 12. *Пусть отношения* $\theta_0(\lambda)$ *и* $\theta(\lambda)$ *определены равенствами* (26), (34). *Тогда*

$$\theta(\lambda) = \theta_0(\lambda) - \Phi(\lambda). \tag{35}$$

Доказательство. Зафиксируем λ и для любой пары $\{\widetilde{y}, \widetilde{g}\} \in L_{\theta_0(\lambda)}$ положим

$$\Gamma\{\widetilde{y}, \widetilde{g}\} = \Gamma(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} = \{Y_1, Y_2\}, \quad \gamma(\lambda)\{\widetilde{y}, \widetilde{g} - \lambda\widetilde{y}\} = \{Y_1(\lambda), Y_2(\lambda)\}.$$

Из (34), (26) следует $\{Y_1, Y_2\} \in \theta_0(\lambda)$, $\{Y_1(\lambda), Y_2(\lambda)\} \in \theta(\lambda)$. В силу леммы 11 $Y_1(\lambda) = Y_1$, $Y_2(\lambda) = Y_2 - \Phi(\lambda)Y_1$. Отсюда следует равенство (35). $\square$

Лемма 13. *Семейства линейных отношений* $\theta(\lambda)$ *и* $\theta_0(\lambda)$ *одновременно голоморфны или нет.*

Доказательство. Так как $\Phi(\lambda)$ — голоморфная операторная функция, то достаточно доказать, что голоморфность $\theta_0(\lambda)$ влечет голоморфность $\theta(\lambda)$. Пусть семейство $\theta_0(\lambda)$ голоморфно в точке λ_0. Тогда существует такое банахово пространство $\mathbf{Z}$ и такое голоморфное в λ_0 семейство ограниченных линейных операторов $\Psi(\lambda) : \mathbf{Z} \to Q_- \oplus Q_+$, что $\Psi(\lambda)$ отображает взаимно однозначно $\mathbf{Z}$ на $\theta_0(\lambda)$. Рассмотрим семейство линейных ограниченных операторов $\widetilde{\Psi}(\lambda) : \mathbf{Z} \to Q_- \oplus Q_+$, действующих по формуле $\widetilde{\Psi}(\lambda)z = \{P_1\Psi(\lambda)z, P_2\Psi(\lambda)z - \Phi(\lambda)P_1\Psi(\lambda)z\}$ ($z \in \mathbf{Z}$, P_1, P_2 — проекторы $Q_- \oplus Q_+$ на Q_-, Q_+). Это семейство голоморфно в λ_0 и при фиксированном λ оператор $\widetilde{\Psi}(\lambda)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно $\mathbf{Z}$ на $\theta(\lambda)$. $\square$

Теорема 3. *Для любых пар $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}, \{\widetilde{z}, \widetilde{g}\} \in L$ справедлива “формула Грина”*
$$(\widetilde{f}, \widetilde{z})_{\mathrm{B}} - (\widetilde{y}, \widetilde{g})_{\mathrm{B}} = (Y_2, Z_1) - (Y_1, Z_2), \tag{36}$$
где $\{Y_1, Y_2\} = \Gamma\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}$, $\{Z_1, Z_2\} = \Gamma\{\widetilde{z}, \widetilde{g}\}$.

Доказательство. Обозначим $U(t)c_1 = v(t)$, $U(t)c_2 = w(t)$ $(c_1, c_2 \in Q)$,
$$f_0(t) = \int_0^b G^*(s,t)\widetilde{A}(s)f(s)ds, \quad g_0(t) = \int_0^b G^*(s,t)\widetilde{A}(s)g(s)ds.$$
Тогда пары $\{\widetilde{v}, 0\}, \{\widetilde{w}, 0\}, \{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\}, \{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\} \in L'$. Из замечания 3 и (25) при $\lambda = 0$ следует
$$\begin{aligned}
\Gamma_2\{\widetilde{v}, 0\} = \Gamma_2\{\widetilde{w}, 0\} = 0, \qquad & \Gamma_1\{\widetilde{v}, 0\} = \{-v'(0), v'(b)\},\\
\Gamma_1\{\widetilde{w}, 0\} = \{-w'(0), w'(b)\}, \quad & \Gamma_1\{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\} = \Gamma_1\{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\} = 0,\\
\Gamma_2\{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\} = \{f_0(0), f_0(b)\}, \qquad & \Gamma_2\{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\} = \{g_0(0), g_0(b)\}.
\end{aligned} \tag{37}$$
Согласно $f_0'(0) = f_0'(b) = g_0'(0) = g_0'(b) = 0$, из (24), (37) получим равенства
$$\begin{aligned}
&(\widetilde{f}, \widetilde{g}_0)_{\mathrm{B}} - (\widetilde{f}_0, \widetilde{g})_{\mathrm{B}} = -(f_0'(b), g_0(b)) + (f_0'(0), g_0(0)) + (f_0(b), g_0'(b)) -\\
&\quad - (f_0(0), g_0'(0)) = 0 = (\Gamma_2\{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\}, \Gamma_1\{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\}) - (\Gamma_1\{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\}, \Gamma_2\{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\}),\\
&(\widetilde{f}, \widetilde{w})_{\mathrm{B}} - (\widetilde{f}_0, 0)_{\mathrm{B}} = -(f_0'(b), w(b)) + (f_0'(0), w(0)) + (f_0(b), w'(b)) -\\
&\quad - (f_0(0), w'(0)) = (\Gamma_2\{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\}, \Gamma_1\{\widetilde{w}, 0\}) - (\Gamma_1\{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\}, \Gamma_2\{\widetilde{w}, 0\}),\\
&(0, \widetilde{g}_0)_{\mathrm{B}} - (\widetilde{v}_0, \widetilde{g})_{\mathrm{B}} = -(v'(b), g_0(b)) + (v'(0), g_0(0)) + (v(b), g_0'(b)) -\\
&\quad - (v(0), g_0'(0)) = (\Gamma_2\{\widetilde{v}, 0\}, \Gamma_1\{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\}) - (\Gamma_1\{\widetilde{v}, 0\}, \Gamma_2\{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\}),\\
&(0, \widetilde{w})_{\mathrm{B}} - (\widetilde{v}, 0)_{\mathrm{B}} = 0 = (\Gamma_2\{\widetilde{v}, 0\}, \Gamma_1\{\widetilde{w}, 0\}) - (\Gamma_1\{\widetilde{v}, 0\}, \Gamma_2\{\widetilde{w}, 0\}).
\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (36) выполняется для пар $\{\widetilde{v}, 0\}$, $\{\widetilde{w}, 0\}$, $\{\widetilde{f}_0, \widetilde{f}\}$, $\{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}\}$. В силу линейности оно справедливо для всех пар $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}, \{\widetilde{z}, \widetilde{g}\} \in L'$. Справедливость (36) для всех пар из L следует из непрерывности операторов $\Gamma_1, \Gamma_2 : L \to Q_- \oplus Q_+$ и плотности линейного многообразия L' в пространстве L. $\square$

Из теоремы 3 вытекает, что четверка $(Q_-, Q_+, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является обобщением ПГЗ из [7], [8], где изучалась ситуация, когда $Q_- = Q_+$ (результаты работ [7], [8] изложены в книге [4]). Так же, как в [7], [8], доказывается

Лемма 14. *При фиксированном λ отношения $L_{\theta_0(\lambda)}$ и $\theta_0(\lambda)$ одновременно являются или нет аккумулятивными (диссипативными, симметрическими, максимальными аккумулятивными, максимальными диссипативными, максимальными симметрическими, самосопряженными).*

Отметим, что при отсутствии операторного веса (т. е. $A(t) = E$) отношение L является оператором. Граничные значения для функций из $\mathcal{D}(L)$ строились в работах [17], [18] (результаты [17], [18] изложены также в [4]). Эти граничные значения отличаются от построенных в данной работе.

Теорема 4. *Всякая обобщенная резольвента* R_λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ *отношения* L_0 *является интегральным оператором* (27)*, где* $\theta(\lambda) = \theta_0(\lambda) - \Phi(\lambda)$ *и* $\theta_0(\lambda)$ $(\theta_0(\lambda) \subset Q_- \oplus Q_+)$ *— голоморфное при* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ *семейство, значениями которого являются максимальные аккумулятивные отношения при* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *и максимальные диссипативные отношения при* $\operatorname{Im}\lambda < 0$*, причем* $\theta_0^*(\lambda) = \theta_0(\overline{\lambda})$*. Обратно, если* $\theta_0(\lambda)$ *— семейство линейных отношений с указанными выше свойствами, то семейство операторов* R_λ *вида* (27) *является обобщенной резольвентой отношения* L_0*.*

Доказательство. Из формулы обобщенных резольвент симметрических операторов [19] и симметрических отношений [20] следует, что операторная функция $R_\lambda = R^*_{\overline{\lambda}}$ тогда и только тогда является обобщенной резольвентой отношения L_0, когда функция R_λ голоморфна при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и R_λ представима в виде $R_\lambda = (L(\lambda) - \lambda E)^{-1}$, где $L(\lambda)$ $(L_0 \subset L(\lambda) \subset L)$ — семейство линейных отношений, значениями которого являются максимальные аккумулятивные отношения при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и максимальные диссипативные при $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Пусть R_λ — обобщенная резольвента отношения L_0 и $\theta_0(\lambda)$ — отношение, связанное с $L(\lambda)$ равенством (34). Из теорем 1, 2 и леммы 13 следует, что семейство $\theta_0(\lambda)$ голоморфно. В силу леммы 14 при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$ отношения $\theta_0(\lambda)$ являются максимальными аккумулятивными (диссипативными соответственно).

Обратно, пусть семейство линейных отношений $\theta_0(\lambda)$ обладает свойствами, перечисленными в условии теоремы. Тогда согласно лемме 14 отношения $L(\lambda) = L_{\theta_0(\lambda)}$ — максимальные аккумулятивные (диссипативные) при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$. Следовательно, отношения $(L(\lambda) - \lambda E)^{-1}$ являются ограниченными всюду определенными операторами. Отсюда, а также из теорем 1, 2 и леммы 13 вытекает голоморфность семейства R_λ. Наконец, равенство $R^*_\lambda = R_{\overline{\lambda}}$ равносильно равенству $L^*(\lambda) = L(\overline{\lambda})$. В силу (36) последнее равенство равносильно тому, что $\theta_0^*(\lambda) = \theta_0(\overline{\lambda})$. □

Литература

[1] Брук В.М. *О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений* // Функц. анализ. – Ульяновск, 1975. – № 5. – С. 25–33.

[2] Брук В.М. *О линейных отношениях в пространстве вектор-функций* // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – № 4. – С. 499–511.

[3] Храбустовский В.И. *Спектральный анализ периодических систем с вырождающимся весом на оси и полуоси* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков, 1985. – № 44. – С. 122–133.

[4] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

[5] Брук В.М. *Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах* // Функц. анализ. – Ульяновск, 1988. – № 28. – С. 17–22.

[6] Брук В.М. *О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами* // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 1. – С. 21–27.

[7] Кочубей А.Н. *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 41–48.

[8] Брук В.М. *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии* // Матем. сб. – 1976. – Т. 100. – № 2. – С. 210–216.

[9] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.

[10] Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М. *Спектральный анализ дифференциальных операторов.* – Мариуполь, 2001. – 332 с.

[11] Лаптев Г.И. *Сильно эллиптические уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве* // Литовск. матем. сб. – 1968. – Т. 8. – № 1. – С. 87–99.

[12] Coddington E.A. *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 134. – 80 p.

[13] Bruk V.M. *On spaces of boundary values for relations generated by formally self-adjoint expression and nonnegative operator function* // J. Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2006. – V. 2. – № 3. – P. 1–10.

[14] Брук В.М. *О голоморфных семействах линейных отношений* // Функц. анализ. – Ульяновск, 1992. – № 33. – С. 24–28.

[15] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[16] Брук В.М. *О краевых задачах, связанных с голоморфными семействами операторов* // Функц. анализ. – Ульяновск, 1989. – № 29. – С. 32–42.

[17] Брук В.М. *Диссипативные расширения дифференциального оператора эллиптического типа* // Функц. анализ. – Ульяновск, 1974. – № 3. – С. 35–43.

[18] Вайнерман Л.И. *Краевые задачи для сильно эллиптического уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве* // Кибернетика. – 1973. – № 6. – С. 143–144.

[19] Штраус А.В. *Обобщенные резольвенты симметрических операторов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1954. – Т. 18. – № 1. – С. 51–86.

[20] Dijksma A., de Snoo H.S. *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces* // Pacific J. Math. – 1974. – V. 54. – № 1. – P. 71–100.

В.М. Брук

доцент, кафедра высшей математики,
Саратовский государственный технический университет,
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77,

`e-mail:` vladislavbruk@mail.ru

V.M. Bruk

Associate Professor, Chair of Higher Mathematics,
Saratov State Technical University,
77 Politekhnicheskaya str., Saratov, 410054 Russia,

`e-mail:` vladislavbruk@mail.ru