В. Н. Чубариков, Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел, *Докл. АН СССР*, 1986, том 286, номер 4, 828–831

УДК 511

МАТЕМАТИКА

В.Н. ЧУБАРИКОВ

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ СУММАМИ СТЕПЕНЕЙ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 23 I 1985)

В работе решается задача об одновременном представлении натуральных чисел $M_1, M_2, \ldots, M_n$ в виде

$$(1)\quad \begin{aligned} &M_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &M_n = p_1^n + p_2^n + \ldots + p_k^n, \end{aligned}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – простые числа, $n \geqslant 2$. Возможность исследования системы (1) открыл метод И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами [1–3]. Система (1) изучалась К.К. Марджанишвили [4] и Хуа Ло-кеном [5], гл. X, XI. Однако вопрос о представлении чисел $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ограниченным количеством слагаемых k при растущих параметрах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ оставался открытым. Основным результатом работ [4, 5] является условная асимптотическая формула для числа J решений (1):

$$J = \sigma\gamma(PL^{-1})^k P^{-\frac{1}{2}n(n+1)} + O(P^{k-\frac{1}{2}n(n+1)}L^{-k-1}\log L),$$

где σ и γ – соответственно особый ряд и особый интеграл, $P = M_n^{1/n}$, $L = \log P$, $k \geqslant n^2 \ln n$. Условность этой формулы состоит в том, что предполагается существование $k_0 = k_0(n)$ такого, что при $k \geqslant k_0$ особый ряд σ положителен. Используя результаты Г.И. Архипова по проблеме Гильберта–Камке [7], в статье удалось доказать существование такого k_0 и для него получены оценки сверху и снизу. Обе эти оценки имеют близкие порядки роста при $n \to \infty$ (см. теорему). Данная работа продолжает исследования по p-адическому методу А.А. Карацубы (см. [6], гл. XI, задачи).

Представим натуральное число $n+1$ в виде

$$n + 1 = l(p-1) + r, \qquad 0 \leqslant r < p - 1.$$

Рассмотрим систему сравнений

$$(2)\quad x_1^s + x_2^s + \ldots + x_k^s \equiv M_s (\mathrm{mod}\, p^\alpha), \qquad s = 0, 1, \ldots, n,$$

где неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ принимают значения из приведенной системы вычетов по модулю p^α, p – простое число. Рассмотрим, кроме того, систему линейных сравнений с неизвестными $t_1, t_2, \ldots, t_{lp+r}$:

$$(3)\quad \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{lp+r} t_\nu \nu^s \equiv M_s (\mathrm{mod}\, p^\alpha), \qquad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Лемма. *Из разрешимости системы сравнений* (2) *следует разрешимость системы* (3), *и наоборот, из разрешимости системы* (3) *следует существование такого числа* $k = k(n; M_0, M_1, \ldots, M_n; p^\alpha)$, *при котором система* (2) *имеет решение.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [10].

Набор $M_1, M_2, \ldots, M_n$ назовем удовлетворяющим условию разрешимости, если разрешима система сравнений (3) по модулю p^α, где p – любое простое число и α – любое натуральное число.

Отметим, что особый ряд σ представляется в виде

$$\sigma = \prod_p \sigma_p, \qquad \sigma_p = \lim_{\alpha\to\infty} \varphi^{-k}(p^\alpha)p^{n\alpha}W(p^\alpha, k),$$

$W(p^\alpha, k)$ – число решений системы сравнений (2) при $M_0 = k$ (см., например, [5], гл. XI).

Теорема. 1) *Существует некоторая положительная постоянная* $c = c(n, k) > 0$, *что для любого набора* $M_1, M_2, \ldots, M_n$, *удовлетворяющего условию разрешимости, особый ряд* $\sigma \geqslant c(n, k) > 0$ *при*

$$k > \begin{cases} 2^{62}n^3 \cdot 2^{2n}, & n \geqslant 8, \\ (2n)^{18} \cdot 2^n, & 2 \leqslant n < 8. \end{cases}$$

2) *Существуют наборы* $M_1, M_2, \ldots, M_n$, *удовлетворяющие условию разрешимости, для которых* $\sigma = 0$ *при* $k < 2^n - 1$.

Доказательство. Вторая часть теоремы следует из леммы 17 [7]. Докажем первую часть. Пусть $p \leqslant 2n$. Положим $N_s = M_s - A \sum_{r=1}^{n} a_r^s$, $A = 3n_1^3 2^{n_1} - n_1$, $n_1 = [n/2]$, $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqslant lp + r$, $(a_j, p) = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Очевидно, для набора $N_1, N_2, \ldots, N_n$ выполняются условия разрешимости. Следовательно, найдутся вычеты $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$, удовлетворяющие системе сравнений

$$\sum_{r=1}^{n+1} t_r a_r^s \equiv N_s (\operatorname{mod} p^{8n}), \qquad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Возьмем $\alpha = 16 + 2\kappa + 2[n/(p-1)]$; $p^\kappa \leqslant n < p^{\kappa+1}$, $\alpha \leqslant 8n$. Пусть b_r – наименьшие неотрицательные вычеты t_r по модулю p^α; тогда имеем

$$A \sum_{r=1}^{n} a_r^s + \sum_{r=1}^{n+1} b_r a_r^s \equiv M_s (\operatorname{mod} p^\alpha), \qquad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Положим $M_0 = k = nA + b_1 + \ldots + b_{n+1}$ и покажем, что разрешима система сравнений

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{A} z_{r,l}^s + \sum_{m=nA+1}^{k} x_m^s \equiv M_s (\operatorname{mod} p^{8n}), \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\sum_{m=nA+1}^{k} x_m^s = \sum_{r=1}^{n+1} b_r a_r^s, \qquad z_{r,l} = a_r + p^{16}u_r v_l, \qquad r = 1, 2, \ldots, n, \qquad l = 1, 2, \ldots, A,$$

а вычеты u_r, v_l являются неизвестными. Поскольку $t_r \equiv b_r (\operatorname{mod} p^\alpha)$, $r = 1, 2, \ldots, n+1$, то из (4) получаем

$$(5) \qquad \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=1}^{s_1} \binom{s}{q} a_r^{s-q} u_r^q p^{16q} \left(\sum_{l=1}^{A} v_l^q \right) \equiv p^\alpha \sum_{r=1}^{n+1} \lambda_r a_r^s (\operatorname{mod} p^{8n}),$$

где $s = 1, 2, \ldots, n$, $s_1 = \min(s, n_1)$. Далее, поскольку разрешима система сравнений (см. [7], с. 33)

$$(6) \qquad \begin{aligned} v_1^s + v_2^s + \ldots + v_A^s &\equiv 0 (\operatorname{mod} p^{8n}), \qquad 2 \leqslant s \leqslant n, \\ v_1 + v_2 + \ldots + v_A &\equiv Q (\operatorname{mod} p^{8n}), \end{aligned}$$

$Q = [1, 2, \ldots, n_1]$, то, подставляя решение (6) в (5), получим

$$(7) \qquad \sum_{r=1}^{n} s a_r^{s-1} u_r p^{16} Q \equiv p^\alpha \sum_{r=1}^{n} \lambda_r a_r^s (\operatorname{mod} p^{8n}), \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Решение системы сравнений (7) можно представить так:

$$(8) \qquad u_l \equiv p^{\alpha-16-\kappa_1}\sum_{r=1}^{n+1}\mu_r\,\frac{F(a_r)}{f(a_l)}(\operatorname{mod} p^{8n-16-\kappa_1}), \qquad l=1,2,\ldots,n,$$

где $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n+1}$ – некоторые целые числа;

$$f(a_l) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots 1 & \ldots 1 \\ 2a_1 & \ldots 2a_l & \ldots 2a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ na_1^{n-1} & \ldots na_l^{n-1} & \ldots na_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$F(a_r) \equiv \begin{vmatrix} 1 & \ldots 1 & a_r & 1 & \ldots 1 \\ 2a_1 & \ldots 2a_{l-1} & a_r^2 & 2a_{l+1} & \ldots 2a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ na_1^{n-1} & \ldots na_{l-1}^{n-1} & a_r^n & na_{l+1}^{n-1} & \ldots na_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

причем $F'(x) = f(x)$. Для этого достаточно показать, что D – показатель степени p, на которую делится правая часть (8), неотрицателен. Действительно, при некотором целом B справедливо равенство

$$f(x) = B(x-a_1)\ldots(x-a_{l-1})(x-a_{l+1})\ldots(x-a_n),$$

и пусть $p^b \parallel f(a_l)$; тогда для всех x, $(x, p) = 1$, имеем $f(x) \equiv 0(\operatorname{mod} p^b)$. Пусть, далее, a – наибольшее целое число с условием, что $F(x) \equiv 0(\operatorname{mod} p^a)$, для всех целых x, $(x, p) = 1$. Тогда из леммы Хуа ([9], лемма 3.2) следует $b - a \leqslant 2[n/(p-1)]$. Поэтому

$$D \geqslant \alpha - 16 - 2\kappa_1 + a - b \geqslant \alpha - 16 - 2\kappa_1 - 2\lfloor n/(p-1)\rfloor \geqslant 0.$$

Тем самым доказана разрешимость системы (4) в числах u_r, v_l.

Оценим теперь сверху величину k. Имеем

$$k = nA + b_1 + \ldots + b_{n+1} \leqslant nA + (n+1)p^\alpha \leqslant nA + (n+1)n^2p^{16+2n/(p-1)}.$$

Поскольку $p^{1/(p-1)} < 2$, то при $n \geqslant 2$ имеем $k \leqslant (2n)^{18}\cdot 2^{2n} = k_1$. Если же $n \geqslant 8$, то $k \leqslant 2^{62}n^3\cdot 2^{2n} = k_1$.

Таким образом, при $k \geqslant k_1$, $\alpha \leqslant 8n$ разрешима система сравнений

$$(9) \qquad \sum_{r=1}^{k} x_r^s \equiv M_s(\operatorname{mod} p^\alpha), \qquad s=1,2,\ldots,n.$$

Положим $\alpha = 2\kappa + 2\delta + 3 \leqslant 8n$, $\beta = \kappa + \delta + 2$, $\delta = \delta_p((l_p + r)!)$, $p^\kappa \leqslant n < p^{\kappa+1}$ Оценим снизу число решений $W(p^{\alpha+1}, k)$ системы сравнений

$$(10) \qquad \sum_{r=1}^{k} z_r^s \equiv M_s(\operatorname{mod} p^{\alpha+1}), \qquad s=1,2,\ldots,n,$$

где неизвестные принимают значения из приведенной системы вычетов по модулю $p^{\alpha+1}$. Пусть $z_r = x_r + p^\beta y_r$, $0 \leqslant y_r < p-1$, $2\beta \geqslant \alpha + 1$, $2 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Тогда для любых $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_k$ можно найти такие $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что $z_1, z_2, \ldots, z_k$ будут решением (10). Действительно, имеем

$$\sum_{r=1}^{k} sp^\beta y_r x_r^{s-1} \equiv M_s - \sum_{r=1}^{k} x_r^s(\operatorname{mod} p^{\alpha+1}), \qquad s=1,2,\ldots,n.$$

Далее, поскольку $x_1, x_2, \ldots, x_k$ удовлетворяют (9), то получим

$$(11)\quad \sum_{r=1}^{n} s x_r^{s-1} y_r \equiv \lambda_s p^{\alpha-\beta} - \sum_{r=n+1}^{k} s x_r^{s-1} y_r (\operatorname{mod} p^{\alpha-\beta+1}),$$

$$s = 1, 2, \ldots, n.$$

Зафиксируем $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_k$ и решим систему линейных сравнений (11). Получим

$$y_m \equiv p^{\alpha-\beta} \sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_s}{s} \frac{\sigma_{n-m}(x_1, \ldots, x_n)}{(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})\ldots(x_m - x_n)} -$$

$$- \sum_{l=n+1}^{k} y_l \frac{(x_l - x_1)\ldots(x_l - x_{m-1})(x_l - x_{m+1})\ldots(x_l - x_n)}{(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})\ldots(x_m - x_n)} (\operatorname{mod} p^{\alpha-\beta+1}),$$

$$1 \leqslant m \leqslant n,$$

где $\sigma_r(x_1, \ldots, x_n)$ – r-элементарная симметрическая функция чисел $x_1, \ldots, x_n$, причем числа $\alpha, \beta, \delta, \kappa$ удовлетворяют условию $\alpha - \beta - \delta - \kappa \geqslant 0$, $\delta \geqslant \delta_p((x_m - x_1)\ldots$ $\ldots(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})\ldots(x_m - x_n))$. Следовательно,

$$W(p^{\alpha+1}, k) \geqslant p^{k-n}.$$

Аналогично проведем переход от системы сравнений по модулю $p^{\alpha+1}$ к системе по модулю $p^{\alpha+2}$. Для этого нам потребуется условие $p^{\beta} > 2n - 1$. Таким образом, при $h > \alpha$ получим

$$W(p^h, k) \geqslant p^{\alpha(k-n)} p^{h(k-n)} = c_1 p^{h(k-n)}.$$

Отсюда имеем

$$\prod_{p \leqslant 2n} \sigma_p \geqslant c_2(n, k) > 0.$$

При $k \geqslant 64 n^2 \ln n$ найдется такая положительная постоянная $c_3(n, k)$, что $\prod_{p > 2n} \sigma_p \geqslant$ $\geqslant c_3(n, k) > 0$ (см. [4]; [5], лемма 11.8; [8]). Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А.А. Карацубе и Г.И. Архипову за внимание и помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
25 I 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов И.М.* – ДАН, 1937, т. 15, № 6–7, с. 291–294. 2. *Виноградов И.М.* Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1938, т. 3, с. 1–67. 3. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980, с. 1–144. 4. *Марджанишвили К.К.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, т. 4, № 2, с. 193–214. 5. *Хуа Л.-к.* Тр. МИАН, 1947, т. 22, гл. X, XI. 6. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983, 2 изд., гл. XI. 7. *Архипов Г.И.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, т. 48, № 1, с. 3–52. 8. *Карацуба А.А.* – Матем. заметки, 1976, т. 19, № 3, с. 389–392. 9. *Hua L.-k.* – J. Chinese Math. Soc., 1940, vol. 2, p. 175–191. 10. *Архипов Г.И., Чубариков В.Н.* – ДАН, 1985, т. 284, № 1.