Алгебра и анализ
Том 33 (2021), №4

Посвящается памяти Владимира Марихина

МНОЖЕСТВО НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА КАК ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА

© В. В. КАПУСТИН

Один из возможных способов, как можно было бы доказывать гипотезу Римана, состоит в построении самосопряженного оператора, спектр которого совпадает с множеством $\{z: \ |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2},\ \zeta\left(\frac{1}{2} - iz\right) = 0\}$. В статье строится одномерное возмущение самосопряженного оператора, связанного с некоторой канонической системой, для которого выполнено аналогичное свойство.

Основным объектом статьи является каноническая система на интервале $(-\infty, -2\pi)$ с гамильтонианом

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{-2t} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-2t}}{-2t} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Каноническая система есть уравнение

$$J\dot{f}(t) = zH(t)f(t)$$

на интервале вещественной прямой, где $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$ — функция от t, z — спектральный параметр, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, H — гамильнониан, представляющий собой локально суммируемую неотрицательную матричнозначную (2×2)-функцию. В связи с теорией канонических систем читателю предлагается книга [1]. В стандартном случае гамильтониан суммируем вблизи левого конца интервала, однако, вообще говоря, это может быть не так; в нашем случае гамильтониан несуммируем вблизи $-\infty$.

Ключевые слова: кси-функция Римана, пространство де Бранжа, каноническая система.

Работа частично поддержана грантом РФФИ №19-01-00565а.

Гильбертово пространство канонической системы есть весовое пространство пар функций на рассматриваемом интервале, для которого гамильтониан является весом (определение выглядит сложнее в общей ситуации, когда гамильтониан имеет так называемые неделимые интервалы). Оператор канонической системы $\mathcal{L}$ определяется формулой

$$(\mathcal{L}f)(t) = H(t)^{-1}J\dot{f}(t)$$

и является формально симметричным.

Гамильтониан (1) на интервале $(-\infty, -2\pi)$ является частным случаем диагонального гамильтониана вида

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_+(t)^2 & 0 \\ 0 & h_-(t)^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

на интервале $(-\infty, a)$, где положительные функции h_+, h_- таковы, что

(p1) $h_+^2 \in L^1(-\infty, a)$;

(p2) $h_-^2 \notin L^1(-\infty, a)$ и $h_-^2 \in L^1(a-1, a)$ (то есть суммируемость имеется вблизи правого конца интервала и нарушается вблизи левого).

Правый конец интервала регулярен и там накладывается граничное условие. Стандартное условие $f_-(a) = 0$ дает оператор с нетривиальным ядром, содержащим элемент

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

пространства канонической системы. Для $\nu \in \mathbb{C}$ определим оператор L_ν как сужение отображения $\mathcal{L}$ на область определения, задаваемую граничным условием

$$f_+(a) = \nu f_-(a).$$

На левом конце $-\infty$ имеем случай предельной точки. Следовательно, операторы L_ν при вещественных ν являются самосопряженными. Для канонических систем с гамильтонианами вида (2), обладающими свойствами (p1), (p2), получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Для любого комплексного числа ν, L_ν — (неограниченный) замкнутый оператор в пространстве канонической системы. Если ν — вещественное число, то L_ν — самосопряженный оператор.*

Условие

(p3)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} h_+(t)^2\,dt \times \int_{x}^{a} h_-(t)^2\,dt\right) = 0$$

равносильно тому, что H является структурным гамильтонианом для цепочки пространств де Бранжа. Равносильное условие для оператора струны, соответствующее случаю диагональных гамильтонианов, было получено в работе [2]; в статье [3] этот результат был распространен на общий случай, причем критерий представлен в приведенной выше форме. При этом при вещественных ν самосопряженные операторы L_ν имеют дискретные спектры. Свойство (p3) очевидно выполнено в нашем случае для гамильтониана (1).

Имеем $\mathcal{L}e = 0$, и 0 является изолированной точкой спектра сужения оператора $\mathcal{L}$ на класс функций, определяемый граничным условием

$$f_-(-2\pi) = 0.$$

Для рассматриваемого оператора из этого следует, что для любого комплексного числа ν ядро оператора L_ν тривиально и его спектр не содержит точку 0. Это позволяет определить ограниченные операторы T_ν как обратные к L_ν:

$$T_\nu = L_\nu^{-1}.$$

В основной теореме нам понадобится только случай $\nu = 0$.

Зафиксируем комплексное число α с вещественной частью $\frac{1}{2}$, в котором дзета-функция Римана имеет простой корень: $\zeta(\alpha) = 0$.

Основная теорема. *Существует вещественнозначная функция* γ *на* $(-\infty, -2\pi)$, *для которой* $\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ *является элементом пространства канонической системы на* $(-\infty, -2\pi)$ *с гамильтонианом* (1), *и такая, что оператор*

$$T = T_0 + \left(*, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

имеет чисто точечный спектр, совпадающий с множеством

$$\left\{\frac{1}{z} \colon \frac{1}{2} - iz \in \{s \colon \operatorname{Re} s \in (0,1),\ \zeta(s) = 0\} \setminus \{\alpha, \bar{\alpha}\}\right\}.$$

Ясно, что гипотеза Римана равносильна утверждению о том, что спектр оператора T лежит на вещественной прямой.

Можно проверить, что

$$T_\nu = T_0 - \nu \left(*, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

см. п. 6.3. Следовательно T — одномерное возмущение самосопряженного оператора T_ν при любом вещественном ν.

Прояснение вида функции γ предполагается в последующих работах.

Р. Романов обратил внимание автора на связь канонической системы с гамильтонианом (1) со статьей [4], в которой рассматриваются операторы Шрёдингера с потенциалами Морса. Кроме того автор признателен Р. Романову за ценные обсуждения, связанные с каноническими системами и функциями Бесселя, а также всем коллегам, проявлявшим интерес к этой работе.

§1. Цепочка пространств де Бранжа

В этом параграфе будут рассматриваться канонические системы общего вида на интервале вида $(-\infty, a)$, гамильтонианы которых имеют вид (2) и обладают свойствами (p1)–(p3).

Пусть целая функция $\mathcal{E}$ принадлежит классу Эрмита–Билера, то есть $|\mathcal{E}(\bar{z})| < |\mathcal{E}(z)|$ для всех z из верхней полуплоскости. Пространство де Бранжа $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ со структурной функцией $\mathcal{E}$ состоит из всех целых функций F, для которых функции $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^\sharp}{\mathcal{E}}$ принадлежат классу Харди H^2 в верхней полуплоскости, где используется обозначение

$$F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}.$$

Нормы функций $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^\sharp}{\mathcal{E}}$ в H^2 совпадают, и они определяют норму функции F в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Любое пространство де Бранжа обладает максимальной цепочкой подпространств де Бранжа. Структура пространства де Бранжа, соответствующая упорядоченности его подпространств де Бранжа по порядку включения, выражается в терминах канонической системы, см. предложение 3 ниже. Структурная функция цепочки пространств де Бранжа, связанная с канонической системой, есть функция $E(t, z)$, определенная для $t \in (-\infty, a]$. При каждом t это целая функция от z, принадлежащая классу Эрмита–Билера, и тем самым при каждом t имеем соответствующее пространство де Бранжа; функция $E(a, z)$ соответствует исходному пространству де Бранжа. Кроме этого для

$$A(t,z) = \frac{1}{2}\Big(E(t,z) + E^\sharp(t,z)\Big), \quad B(t,z) = \frac{1}{2i}\Big(E(t,z) - E^\sharp(t,z)\Big),$$

где $E^\sharp(t,z) = \overline{E(t,\bar{z})}$, вектор-функция $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ является решением канонической системы. Ясно, что

$$E = A + iB.$$

Предположим также, что

(p4) $E(t, z) \to 1$ (что равносильно тому, что $A(t, z) \to 1$ и $B(t, z) \to 0$) при $t \to -\infty$ для каждого z.

Из уравнения канонической системы следует, что при $z = 0$ ее решение является постоянной функцией от t. Поэтому из условия (p4) получаем, что $A(t,0) = 1$, $B(t,0) = 0$ (или, иначе, $E(t,0) = 1$) при всех t.

Было бы интересно выяснить, насколько общим является свойство (p4) для канонических систем, гамильтонианы которых удовлетворяют условиям (p1)–(p3).

Предложение 2. *Предположим, что* $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ *— такое решение канонической системы, что для функции* $E = A + iB$ *выполняется свойство* (p4). *Тогда* E *принадлежит классу Эрмита–Билера как функция от* z *при каждом* t.

Доказательство совпадает с доказательством предложения 4 работы [1], надо лишь заменить левый конец интервала на $-\infty$. Для удобства читателя набросок доказательства будет приведен в п. 6.1.

С каждым элементом $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$ пространства канонической системы ассоциируется целая функция Vf,

$$(Vf)(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} \Big(f_+(t)\, A(t,z)\, h_+^2(t) + f_-(t)\, B(t,z)\, h_-^2(t) \Big)\, dt. \tag{4}$$

Это элемент пространства де Бранжа, соответствующего канонической системе, структурная функция которого есть

$$\mathcal{E}(z) = E(a,z) = A(a,z) + iB(a,z).$$

В следующем предложении утверждается, что общий факт теории пространств де Бранжа для канонических систем с регулярным левым концом интервала (когда гамильтониан суммируем вблизи левого конца) верен и в нашем случае.

Предложение 3. *Оператор* V *изометрически отображает пространство канонической системы на* $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Набросок доказательства будет дан в п. 6.2.

§2. Одномерные возмущения

В п. 6.3 будут установлены некоторые вспомогательные формулы. В частности, будет доказано, что для $F \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ имеем

$$(VT_0V^*\, F)(z) = \frac{1}{z}\Big(F(z) - F(0)\, \frac{\mathcal{E}(z) + \mathcal{E}^\sharp(z)}{2} \Big), \tag{5}$$

где $\mathcal{E}^\sharp(z) = \overline{\mathcal{E}(\bar z)}$, что является прямым аналогом такой же формулы для случая, когда левый конец интервала является регулярным.

Лемма 4. *Возьмем элемент ω пространства канонической системы и рассмотрим оператор*

$$T = T_0 + (*,\ e)\,\omega,$$

где $e = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Тогда T унитарно эквивалентен оператору в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, действующему по формуле

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z}$$

при

$$\varphi = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}^\sharp}{2} - \sqrt{\pi}\, zV\omega.$$

Доказательство. Из определения функции Vf имеем

$$(Vf)(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} f_+(t)\, h_+^2(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, e). \tag{6}$$

По формуле (6) для $F = Vf \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ получаем

$$(V^*F, e) = (f, e) = \sqrt{\pi}(Vf)(0) = \sqrt{\pi}F(0).$$

Теперь по формуле (5) можно записать

$$\begin{aligned} VTV^*\,F &= VT_0V^*\,F + (V^*F, e)V\omega \\ &= \frac{1}{z}\left(F - F(0)\,\frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}^\sharp}{2}\right) + \sqrt{\pi}\,F(0)\,V\omega = \frac{F - F(0)\varphi}{z} \end{aligned}$$

с требуемой функцией φ. □

Имеем $E(t, 0) = 1$ для любого t; в частности, $\mathcal{E}(0) = E(a, 0) = 1$. Таким образом,

$$\varphi(0) = 1, \quad \frac{1}{z}\left(\frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}^\sharp}{2} - \varphi\right) = \sqrt{\pi}\,V\omega \in \mathcal{H}_\mathcal{E}.$$

Оператор T из основной теоремы может быть записан в форме

$$T = T_0 + (\,*\,, e)\,\omega,$$

как в лемме 4 при $\omega = \begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix}$.

Лемма 5. *Для комплексного числа $\lambda \neq 0$ точка $\frac{1}{\lambda}$ принадлежит спектру оператора $T = T_0 + (\,\cdot\,,\ e)\,\omega$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\lambda) = 0$; в таких точках подпространство собственных векторов имеет размерность* 1.

В частности, для $\omega = 0$ из леммы видно, что спектр оператора T_0 есть множество $\{\frac{1}{\lambda} : \mathcal{E}(\lambda) + \mathcal{E}^\sharp(\lambda) = 0\}$; иначе говоря, спектр оператора L_0 совпадает со множеством нулей функции $\mathcal{E} + \mathcal{E}^\sharp$.

Доказательство. По лемме 4 оператор T унитарно эквивалентен оператору $F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z}$ в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Для $\lambda \neq 0$, если $\varphi(\lambda) = 0$, то

$$\frac{\varphi}{z-\lambda} = \frac{1}{z-\lambda}\Big(\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}^\sharp}{2} - \sqrt{\pi} z\, V\omega\Big) = \frac{1}{z-\lambda}\Big(\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}^\sharp}{2} - \sqrt{\pi}\lambda\, V\omega\Big) - \sqrt{\pi}\, V\omega$$

является элементом пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, причем

$$\frac{\varphi}{z-\lambda} \to \frac{\frac{\varphi}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda}\varphi}{z} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\varphi}{z-\lambda};$$

следовательно, $\frac{1}{\lambda}$ является собственным значением. Обратно, из уравнения для собственных векторов получается, что собственная функция может иметь только такой вид, и тогда $\varphi(\lambda) = 0$.

Если $\varphi(\lambda) \neq 0$, то резольвента действует как $F \mapsto \frac{zF(z) - \frac{\lambda F(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\cdot\varphi(z)}{1-\frac{z}{\lambda}}$. $\square$

Жордановы блоки существуют в точках, в которых нули φ кратные. Точка 0 принадлежит спектру, когда пространство бесконечномерно, и является собственным значением тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$.

§3. Структурная функция цепочки пространств де Бранжа

Гамильтониан H, определенный по формуле (1) на интервале $(-\infty, -2\pi)$, является частным случаем диагонального гамильтониана на $(-\infty, a)$ при $a = -2\pi$, имеющего вид (2) для

$$h_+(t) = \frac{e^t}{\sqrt{-2t}}, \quad h_-(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{-2t}}$$

и обладающего свойствами (p1)–(p3).

Можно переписать каноническую систему в виде

$$\dot f_+(t) = z\, h_-^2(t)\, f_-(t), \quad \dot f_-(t) = -z\, h_+^2(t)\, f_+(t).$$

Пространство канонической системы имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} : \ f_+h_+,\ f_-h_- \in L^2(-\infty, a) \right\}.$$

Дифференциальный оператор канонической системы действует по формуле

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_+^{-2} & 0 \\ 0 & h_-^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot f_+ \\ \dot f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_+^{-2}\dot f_- \\ h_-^{-2}\dot f_+ \end{pmatrix}.$$

Для $t<0$ положим

$$A(t,z)=\sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\,e^{-t}\Big(K_s(-t)+K_{s-1}(-t)\Big),$$
$$B(t,z)=-i\sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\,e^{t}\cdot\Big(K_s(-t)-K_{s-1}(-t)\Big),$$

где K_s — модифицированная функция Бесселя, и используется обозначение

$$s=s(z)=\frac{1-iz}{2}.$$

Здесь и в дальнейшем, если s появляется в выражениях, задающих функцию от z, следует применять эту формулу.

Определение и свойства функций Бесселя можно найти, например, в главе 7 книги [5]. Здесь потребуется только несколько соотношений для них, и для каждого будут даны соответствующие ссылки.

Имеем $K_s=K_{-s}$, см. [5, формула (7.2.14)]. Для вещественных значений аргумента t имеем

$$K_s^\sharp(t)=\overline{K_{\frac{1-i\bar z}{2}}(t)}=K_{\frac{1+iz}{2}}(t)=K_{1-s}(t)=K_{s-1}(t).$$

При $s=\frac12$ имеем $K_{1/2}(-t)=\sqrt{\frac{\pi}{-2t}}\,e^t$, см. [5, формула (7.2.42)]; следовательно,

$$A(t,0)=\sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\,e^{-t}\cdot 2K_{1/2}(-t)=1,\quad B(t,0)=0.$$

Определим

$$\begin{aligned}E(t,z)&=A(t,z)+iB(t,z)\\&=\sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\,e^{-t}\Big(K_s(-t)+K_{s-1}(-t)\Big)+\sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\,e^{t}\cdot\Big(K_s(-t)-K_{s-1}(-t)\Big)\\&=\sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\Big(\,(e^{-t}+e^{t})\,K_s(-t)+(e^{-t}-e^{t})\,K_{s-1}(-t)\,\Big).\end{aligned}$$

Теорема 6. *Функция E является структурной функцией цепочки пространств де Бранжа для канонической системы с диагональным гамильтонианом*

$$\begin{pmatrix}\frac{e^{2t}}{-2t} & 0\\ 0 & \frac{e^{-2t}}{-2t}\end{pmatrix}$$

при $t<0$.

Доказательство. В теореме содержится утверждение, что вектор-функция $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению канонической системы:

$$\dot{A}(t,z) = z\,\frac{e^{-2t}}{-2t}\,B(t,z), \quad \dot{B}(t,z) = -z\,\frac{e^{2t}}{-2t}\,A(t,z).$$

Из соотношений (7.11.25–26) книги [5] получаем

$$\dot{K}_s(-t) = -K_{s-1}(-t) + \frac{s}{t}\,K_s(-t).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,A(t,z) &= \sqrt{-t}\,e^{-t}\cdot\Big(K_s(-t) + K_{s-1}(-t)\Big),\\
\sqrt{2\pi}\,B(t,z) &= -i\,\sqrt{-t}\,e^{t}\cdot\Big(K_s(-t) - K_{s-1}(-t)\Big),
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\pi}\cdot\dot{A}(t,z)\\
&\quad= \Big(\frac{-1}{2\sqrt{-t}} - \sqrt{-t}\Big)\,e^{-t}\cdot\Big(K_s(-t) + K_{s-1}(-t)\Big)\\
&\qquad - \sqrt{-t}\,e^{-t}\cdot\Big(- K_{s-1}(-t) + \frac{s}{t}K_s(-t) - K_s(-t) + \frac{1-s}{t}\,K_{s-1}(-t)\Big)\\
&\quad= \frac{e^{-t}}{\sqrt{-t}}\times\Big\{\Big(\frac{-1}{2} + t\Big)\cdot\Big(K_s(-t) + K_{s-1}(-t)\Big)\\
&\qquad + t\cdot\Big(\Big(\frac{s}{t} - 1\Big)\,K_s(-t) + \Big(\frac{1-s}{t} - 1\Big)K_{s-1}(-t)\Big)\Big\}\\
&\quad= \frac{e^{-t}}{\sqrt{-t}}\times\Big(s - \frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(K_s(-t) - K_{s-1}(-t)\Big)\\
&\quad= \frac{e^{-t}}{\sqrt{-t}}\cdot\frac{-iz}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\,B(t,z)}{-i\sqrt{-t}e^{t}}\\
&\quad= \sqrt{2\pi}\cdot z\frac{e^{-2t}}{-2t}B(t,z),
\end{aligned}$$

как и требовалось. Аналогично,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\pi}\cdot\dot{B}(t,z)\\
&\quad= -i\Big(\frac{-1}{2\sqrt{-t}} + \sqrt{-t}\Big)e^{t}\cdot\Big(K_s(-t) - K_{s-1}(-t)\Big)\\
&\qquad - i\sqrt{-t}e^{t}\cdot\Big(- K_{s-1}(-t) + \frac{s}{t}K_s(-t) + K_s(-t) - \frac{1-s}{t}K_{s-1}(-t)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{-ie^t}{\sqrt{-t}} \times \Big\{ \Big(\frac{-1}{2} - t\Big) \cdot \Big(K_s(-t) - K_{s-1}(-t)\Big) \\
&\quad + t \cdot \Big(\Big(\frac{s}{t} + 1\Big) K_s(-t) - \Big(1 + \frac{1-s}{t}\Big) K_{s-1}(-t)\Big)\Big\} \\
=&\frac{-ie^t}{\sqrt{-t}} \times \Big(s - \frac{1}{2}\Big) \cdot \Big(K_s(-t) + K_{s-1}(-t)\Big) \\
&= \frac{-ie^t}{\sqrt{-t}} \cdot \frac{-iz}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} A(t,z)}{\sqrt{-t}e^{-t}} \\
&= -\sqrt{2\pi} \cdot z \frac{e^{2t}}{-2t} A(t,z).
\end{aligned}
$$

Далее, для любого s имеем $\frac{\sqrt{-t}}{e^t} K_s(-t) \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ при $t \to -\infty$, см. [5], формула (7.4.4) при $M = 1$; следовательно, $A(t,z) \to 1$. Кроме этого $B(t,z) \to 0$ экспоненциально. Остается применить предложение 2. $\square$

§4. Модельное пространство де Бранжа

Для каждого $t < 0$ функция $E(t,\ z)$ принадлежит классу Эрмита–Билера, так что $\frac{E^\sharp(t,\ z)}{E(t,\ z)}$ — внутренняя функция. Имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{E^\sharp(t,\ z)}{E(t,z)} &= \frac{\sqrt{\frac{-t}{2\pi}} e^{-t}\big(K_{s-1}(-t) + K_s(-t)\big) + \sqrt{\frac{-t}{2\pi}} e^{t}\big(K_{s-1}(-t) - K_s(-t)\big)}{\sqrt{\frac{-t}{2\pi}} e^{-t}\big(K_s(-t) + K_{s-1}(-t)\big) + \sqrt{\frac{-t}{2\pi}} e^{t}\big(K_s(-t) - K_{s-1}(-t)\big)} \\
&= \frac{\Big(\frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)} + 1\Big) + e^{2t} \cdot \Big(\frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)} - 1\Big)}{\Big(\frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)} + 1\Big) - e^{2t} \cdot \Big(\frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)} - 1\Big)} = \frac{\frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)} + \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}}{1 + \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}} \frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)}}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $\left|\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right| < 1$, функция $\frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)}$ также является внутренней (формула означает, что функция $\frac{E^\sharp(t,\ z)}{E(t,\ z)}$ есть так называемый сдвиг по Фростману функции $\frac{K_{s-1}(-t)}{K_s(-t)}$). В частности, из этого сразу видно, что $K_s(-t)$ — также функция Эрмита–Билера (как функция от z).

При $t = -2\pi$ получаем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(z) &= E(-2\pi, z) \\
&= e^{2\pi} \Big(K_s(2\pi) + K_{s-1}(2\pi)\Big) + e^{-2\pi} \Big(K_s(2\pi) - K_{s-1}(2\pi)\Big) \\
&= (e^{2\pi} + e^{-2\pi}) \Big(K_s(2\pi) + \beta\, K_{s-1}(2\pi)\Big), \quad \text{где} \quad \beta = \frac{1 - e^{-4\pi}}{1 + e^{-4\pi}}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Хорошо известно, что структурная функция пространства де Бранжа определена неоднозначно. Набор всех структурных функций пространства де Бранжа со структурной функцией $\mathcal{E}$ параметризуется точками единичного круга, а именно, можно записать $\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathcal{H}_{\mathcal{E}_\beta}$, где

$$\mathcal{E}_\beta = \frac{1}{(1-|\beta|^2)^{1/2}}\left(\mathcal{E} - \bar\beta\mathcal{E}^\sharp\right), \quad |\beta| < 1.$$

Коэффициент $\frac{1}{(1-|\beta|^2)^{1/2}}$ нужен для равенства норм в пространствах. В нашем случае получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\beta(z) &= \frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{(1-|\beta|^2)^{1/2}}\Big(K_s(2\pi) + \beta K_{s-1}(2\pi) - \bar\beta K_{s-1}(2\pi) - |\beta|^2 K_s(2\pi)\Big) \\ &= \left(e^{2\pi}+e^{-2\pi}\right)\left(1-|\beta|^2\right)^{1/2} K_s(2\pi) = 2K_s(2\pi).\end{aligned}$$

Таким образом установлен следующий факт.

Предложение 7. *Пространства де Бранжа со структурными функциями $\mathcal{E}(z) = E(-2\pi, z)$ из формулы (7) и $2\,K_s(2\pi)$ совпадают.*

§5. Доказательство основной теоремы

Кси-функция Римана определяется формулой

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\, s(s-1)\,\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\zeta(s).$$

Положим

$$\varphi(z) = \frac{|\operatorname{Im}\alpha|^2}{\xi(\frac12)} \cdot \frac{\xi(2s-\frac12)}{(2s-\frac12-\alpha)(2s-\frac12-\bar\alpha)}.$$

Тогда $\varphi(0)=1$, и множество нулей фунуции φ совпадает со множеством из формулировки основной теоремы. Действительно, функция φ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$2s - \frac12 = 2\cdot\frac{1-iz}{2} - \frac12 = \frac12 - iz$$

является нулем дзета-функции из вертикальной полосы, в которой вещественная часть лежит в интервале $(0,1)$, за исключением точек α и $\bar\alpha$.

Доказательство будет основано на лемме 5. Определим

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{z}\Big(\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}^\sharp}{2} - \varphi\Big).$$

Требуется проверить, что $\Phi \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, или, точнее, что $V\begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix} = \Phi$ для некоторой вещественнозначной функции γ такой, что $\begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix}$ — элемент пространства канонической системы.

То, что $\frac{\Phi}{\mathcal{E}} \in H^2$, есть следствие следующей леммы, позволяющей получить основную теорему без исследования конкретного элемента пространства канонической системы, связанного с дзета-функцией.

Следующее утверждение сообщил автору Р. Романов, его доказательство будет представлено в п. 6.4.

Лемма 8. *Функция* $\frac{\pi^{-s}\,\Gamma(s)}{K_s(2\pi)}$ *ограничена в полуплоскости* $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$.

Имеем

$$\frac{\Phi(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{1}{\mathcal{E}(z)\cdot\sqrt{\pi}z}\Bigg(\frac{\mathcal{E}(z)+\mathcal{E}^\sharp(z)}{2} - \frac{|\operatorname{Im}\alpha|^2}{\xi(\frac{1}{2})}\cdot\frac{\frac{1}{2}\big(2s-\frac{1}{2}\big)\big(2s-\frac{3}{2}\big)\pi^{\frac{1}{4}-s}\Gamma\big(s-\frac{1}{4}\big)\zeta\big(2s-\frac{1}{2}\big)}{\big(2s-\frac{1}{2}-\alpha\big)\big(2s-\frac{1}{2}-\bar{\alpha}\big)}\Bigg).$$

Функция в скобках обращается в нуль в нуле. Функция $\frac{\mathcal{E}^\sharp(z)}{\mathcal{E}(z)}$ — внутренняя, следовательно, слагаемое

$$\frac{1}{\mathcal{E}(z)\cdot\sqrt{\pi}z}\cdot\frac{\mathcal{E}(z)+\mathcal{E}^\sharp(z)}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}z}\cdot\frac{1+\frac{\mathcal{E}^\sharp(z)}{\mathcal{E}(z)}}{2}$$

будет принадлежать H^2 после удаления особенности в нуле (например, с помощью вычитания $\frac{1}{\sqrt{\pi}\,z}$). Остается оценить

$$\frac{|\operatorname{Im}\alpha|^2\cdot\frac{1}{2}\left(2s-\frac{1}{2}\right)\left(2s-\frac{3}{2}\right)\pi^{\frac{1}{4}-s}\Gamma\left(s-\frac{1}{4}\right)\zeta\left(2s-\frac{1}{2}\right)}{(e^{2\pi}+e^{-2\pi})\Big(K_s(2\pi)+\beta\,K_{s-1}(2\pi)\Big)\cdot\sqrt{\pi}z\cdot\xi\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2s-\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(2s-\frac{1}{2}-\bar{\alpha}\right)}$$
$$= \frac{|\operatorname{Im}\alpha|^2\pi^{-1/4}}{2(e^{2\pi}+e^{-2\pi})\xi\left(\frac{1}{2}\right)}\times\frac{\left(2s-\frac{1}{2}\right)\left(2s-\frac{3}{2}\right)\cdot\zeta\left(2s-\frac{1}{2}\right)}{z\cdot\left(2s-\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(2s-\frac{1}{2}-\bar{\alpha}\right)}$$
$$\times\frac{\pi^{-s}\Gamma(s)}{K_s(2\pi)}\times\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(s)}\times\frac{1}{1+\beta\frac{K_{s-1}(2\pi)}{K_s(2\pi)}}.$$

Сомножитель, содержащий дзета-функцию, будет принадлежать H^2 после удаления особенности в нуле. Сомножитель $\frac{\pi^{-s}\Gamma(s)}{K_s(2\pi)}$ ограничен по лемме.

Отношение $\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(s)}$ ведет себя как $s^{-1/4}$. Последний сомножитель ограничен, поскольку $|\beta| < 1$ и функция $\frac{K_{s-1}(2\pi)}{K_s(2\pi)}$ является внутренней. Таким образом, все выражение задает функцию из H^2.

Доказано, что $\frac{\Phi(z)}{\mathcal{E}(z)} \in H^2$. Поскольку $\xi(1-s) = \xi(s)$, получаем $\varphi^\sharp = \varphi$ и $\Phi^\sharp = \Phi$. Это сразу же дает свойство $\Phi \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Будучи элементом пространства де Бранжа, Φ допускает представление в виде интегрального преобразования (4) некоторого элемента пространства канонической системы. Поскольку Φ — нечетная функция, соответствующий элемент пространства канонической системы имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$. Поскольку Φ принимает вещественные значения на вещественной прямой, γ — вещественнозначная функция.

Теорема доказана. □

§6. Доказательства

Этот параграф посвящен доказательствам некоторых фактов общей теории канонических систем, приспособленных к случаю, описываемому свойствами (p1)–(p4), а также леммы 8.

1. Доказательство предложения 2. Из канонической системы для любого t легко получается хорошо известное важное соотношение

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\overline{A(t,z_1)}B(t,z_2) - \overline{B(t,z_1)}A(t,z_2)\right)& \\ = (\bar{z}_1 - z_2)\left(h_+^2(t)\overline{A(t,z_1)}A(t,z_2) + h_-^2(t)\overline{B(t,z_1)}B(t,z_2)\right)&.\end{aligned} \tag{8}$$

В частности,

$$i\frac{d}{dt}\left(\overline{A(t,z)}B(t,z) - \overline{B(t,z)}A(t,z)\right) = 2\operatorname{Im} z \cdot \left(h_+^2(t)|A(t,z)|^2 + h_-^2(t)|B(t,z)|^2\right)$$

при $\operatorname{Im} z > 0$. Выражение в правой части неотрицательно. Интегрируя левую часть от $-\infty$ до a и принимая во внимание предположение о том, что $A(t,z) \to 1$ и $B(t,z) \to 0$ при $t \to -\infty$, получаем

$$i\left(\overline{A(a,z)}B(a,z) - \overline{B(a,z)}A(a,z)\right) > 0.$$

Таким образом, выражение

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}(z)|^2 - |\mathcal{E}^\sharp(z)|^2 &= |A(a,z) + iB(a,z)|^2 - |A(a,z) - iB(a,z)|^2 \\ &= 2i\left(\overline{A(a,z)}B(a,z) - \overline{B(a,z)}A(a,z)\right)\end{aligned}$$

положительно, когда z находится в верхней полуплоскости. Это означает, что функция $\mathcal{E}(z) = E(a, z)$ принадлежит классу Эрмита–Билера, как и требовалось. Доказательство для $t < a$ вполне аналогично. $\square$

2. Доказательство предложения 3. Выражение для значения функции Vf из пространства де Бранжа в точке z может рассматриваться как скалярное произведение, а именно,

$$(Vf)(z) = (f, k_z), \quad k_z(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \overline{A(t,z)} \\ \overline{B(t,z)} \end{pmatrix}.$$

По формуле (8) имеем

$$\begin{aligned}(Vk_\lambda)(z) = (k_\lambda, k_z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{a} \left(\overline{A(t,\lambda)} A(t,z) h_+^2(t) + \overline{B(t,\lambda)} B(t,z) h_-^2(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\bar{\lambda} - z} \int_{-\infty}^{a} \left(\frac{d}{dt} \big(\overline{A(t,\lambda)} B(t,z) - \overline{B(t,\lambda)} A(t,z) \big) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\overline{A(a,\lambda)} B(a,z) - \overline{B(a,\lambda)} A(a,z)}{\bar{\lambda} - z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\overline{\mathcal{E}(\lambda)} \mathcal{E}(z) - \overline{\mathcal{E}^\sharp(\lambda)} \mathcal{E}^\sharp(z)}{\bar{\lambda} - z}.\end{aligned}$$

Хорошо известно, что функции Vk_z являются воспроизводящими ядрами пространства де Бранжа $\mathcal{H}_\mathcal{E}$; это означает, что для $F \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ значения F могут быть записаны как скалярные произведения

$$F(z) = (F, Vk_z)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$(Vk_\lambda, Vk_z)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = (Vk_\lambda)(z) = (k_\lambda, k_z).$$

Таким образом, отображение V сохраняет скалярные произведения, и, следовательно, действует как изометрия на замкнутой линейной оболочке всех элементов k_z. Функции Vk_z образуют полное семейство в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, поскольку по формуле (9) функция, ортогональная всем им, тождественно равна нулю. Остается показать, что замкнутая линейная оболочка всех элементов k_z совпадает со всем пространством канонической системы. Если ν — вещественное число, самосопряженный оператор L_ν имеет чисто точечный спектр; это ключевой факт статьи [3]. Векторы k_z удовлетворяют соотношению $\mathcal{L}k_z = \bar{z}k_z$; в частности, такие векторы образуют семейство всех собственных векторов оператора L_ν, когда число ν вещественно и z пробегает спектр оператора L_ν. Таким образом, для любого вещественного ν

элементы вида k_z, принадлежащие области определения оператора L_ν, образуют полное ортогональное семейство в пространстве канонической системы. Требуемое утверждение доказано. $\square$

3. Некоторые вспомогательные формулы. Применяя отображение V к вектору $\mathcal{L}f = \begin{pmatrix} -h_+^{-2}\dot{f}_- \\ h_-^{-2}\dot{f}_+ \end{pmatrix}$, получаем функцию

$$\begin{aligned}
&(V\mathcal{L}f)(z) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} \Big((-h_+^{-2}(t)\dot{f}_-(t))A(t,z)h_+(t)^2 + (h_-^{-2}(t)\dot{f}_+(t))B(t,z)h_-^2(t) \Big)\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} \Big(-\dot{f}_-(t)A(t,z) + \dot{f}_+(t)B(t,z) \Big)\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big(-f_-(a)A(a,z) + f_+(a)B(a,z) + \int\limits_{-\infty}^{a} \Big(f_-(t)\dot{A}(t,z) - f_+(t)\dot{B}(t,z) \Big)\, dt \Big).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} \Big(f_-(t)\dot{A}(t,z) - f_+(t)\dot{B}(t,z) \Big)\, dt \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} \Big(f_-(t)zh_-^2(t)B(t,z) + zf_+(t)h_+^2(t)A(t,z) \Big)\, dt = z \cdot (Vf)(z),
\end{aligned}$$

из формулы для $\mathcal{E}$ окончательно получаем

$$(V\mathcal{L}f)(z) = z \cdot (Vf)(z) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big[f_-(a) \frac{\mathcal{E}(z) + \mathcal{E}^\sharp(z)}{2} - f_+(a) \frac{\mathcal{E}(z) - \mathcal{E}^\sharp(z)}{2i} \Big].$$

В частности, если функция f принадлежит области задания оператора L_0, то $f_+(a) = 0$ и

$$(VL_0 f)(z) = z \cdot (Vf)(z) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_-(a)\, \frac{\mathcal{E}(z) + \mathcal{E}^\sharp(z)}{2}. \tag{10}$$

Из уравнения канонической системы вытекает соотношение

$$\frac{d}{dt}(T_0 f)_- = -h_+^2 f_+.$$

Следовательно,

$$(T_0 f)_-(a) = -\int_{-\infty}^{a} h_+^2(t) f_+(t)\, dt = -(f, e), \tag{11}$$

где, как обычно, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для комплексного числа ν, поскольку $\mathcal{L}T_\nu f = f = \mathcal{L}T_0 f$, разность $T_\nu f - T_0 f$ принадлежит ядру отображения $\mathcal{L}$. Ядро одномерно и содержит вектор e. По определению области задания оператора $L_\nu = T_\nu^{-1}$ должно выполняться соотношение $(T_\nu f)_+(a) = \nu(T_\nu f)_-(a)$, откуда $T_\nu f = T_0 f + \nu\,(T_0 f)_-(a)\, e$. Принимая во внимание соотношение (11), получаем формулу (3).

Возьмем $F \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$, и пусть $F = Vf$, где f — элемент пространства канонической системы. По формулам (6) и (11) имеем

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, e) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}(T_0 f)_-(a).$$

Функция $T_0 f$ принадлежит области задания L_0, и по формуле (10) для $T_0 f$ вместо f получаем

$$\begin{aligned} F(z) = (Vf)(z) = (VL_0T_0 f)(z) = z\cdot(VT_0 f)(z) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(T_0 f)_-(a)\frac{\mathcal{E}(z) + \mathcal{E}^\sharp(z)}{2} \\ = z\cdot(VT_0V^*F)(z) + F(0)\cdot\frac{\mathcal{E}(z) + \mathcal{E}^\sharp(z)}{2}, \end{aligned}$$

что равносильно формуле (5).

4. Доказательство леммы 8 (его сообщил автору Р. Романов). Все нули функции $K_s(2\pi)$ (от переменной s) лежат на мнимой оси, см. утверждение, содержащее формулу (17) в статье [6]. Грубо говоря, будет показано, что функция $\frac{K_s(2\pi)}{\pi^{-s}\Gamma(s)}$ стремится к $\frac{1}{2}$ при стремлении s к бесконечности в замкнутой области $\{\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}\}$. (На самом деле будет доказано несколько более слабое утверждение, которое однако может быть усилено и до приведенной формулировки.) Следовательно, про функцию из леммы будет доказано, что она ограниченная и ограниченно обратимая в рассматриваемой области.

Перепишем функцию K_s через модифицированную функцию Бесселя I_s:

$$K_s(2\pi) = \frac{\pi}{2\sin\pi s}\big(I_{-s}(2\pi) - I_s(2\pi)\big) = \frac{1}{2}\,\Gamma(s)\Gamma(1-s)\big(I_{-s}(2\pi) - I_s(2\pi)\big).$$

Следовательно,

$$\frac{K_s(2\pi)}{\pi^{-s}\Gamma(s)} = \frac{1}{2}\pi^s\Gamma(1-s)\big(I_{-s}(2\pi) - I_s(2\pi)\big).$$

Имеем

$$I_s(2\pi) = \frac{\pi^s}{\Gamma(1+s)}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{s}\Big)\Big) \tag{12}$$

при $s \to \infty$ в секторе, где аргумент s принадлежит $[-\pi + \delta,\ \pi - \delta]$ при произвольном малом δ; см. формулу (7.01) в [7]. По этой формуле для $-s$ также можно записать

$$I_{-s}(2\pi) = \frac{\pi^{-s}}{\Gamma(1-s)}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{s}\Big)\Big),$$

и обе формулы имеют место, когда аргумент s принадлежит $[-\pi+\delta, -\delta] \cup [\delta, \pi - \delta]$.

Мы работаем со значениями s, для которых $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$, и, таким образом, нас интересуют значения аргумента s на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. В первую очередь возьмем s с аргументом из $(-\frac{\pi}{2}, -\delta] \cup [\delta, \frac{\pi}{2})$. Для этого случая отдельно рассмотрим слагаемые, содержащие $I_{-s}(2\pi)$ и $I_s(2\pi)$. Для первого из них имеем:

$$\lim \pi^s\Gamma(1-s)I_{-s}(2\pi) = \lim \pi^s\Gamma(1-s)\frac{\pi^{-s}}{\Gamma(1-s)} = 1.$$

Чтобы доказать требуемую сходимость, покажем, что другое слагаемое $\pi^s\Gamma(1-s)\, I_s(2\pi)$ стремится к нулю. Согласно формуле (12) оно ведет себя как $\pi^{2s}\,\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1+s)}$. Формула Стирлинга дает эквивалентное выражение $\frac{(\pi e)^{2s}}{(1-s^2)^s}$. Для логарифма модуля этой величины имеем:

$$\begin{aligned}\log\Big|\frac{(\pi e)^{2s}}{(1-s^2)^s}\Big| &= 2\operatorname{Re} s\cdot\log(\pi e) - \operatorname{Re}\big(s\cdot\log(1-s^2)\big)\\ &= 2\operatorname{Re} s\cdot\log(\pi e) - \operatorname{Re} s\cdot\operatorname{Re}\log(1-s^2) + \operatorname{Im} s\cdot\operatorname{Im}\log(1-s^2).\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\operatorname{Im}\log(1-s^2)$ имеет такой же знак, что и $-\operatorname{Im} s$. Следовательно,

$$\log\Big|\frac{(\pi e)^{2s}}{(1-s^2)^s}\Big| \leqslant \operatorname{Re} s\cdot\big(2\,\log(\pi e) - \operatorname{Re}\,\log(1-s^2)\big),$$

что, как и требуется, стремится к $-\infty$ при $s \to \infty$ на множестве $\{\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}\}$, поскольку $\operatorname{Re}\,\log(1-s^2) = \log|1-s^2|$ ведет себя как $2\log|s|$.

Остается исследовать отделенность от нуля для сектора, в котором аргумент s принадлежит $[-\delta, \delta]$. Было доказано, что рассматриваемая функция ограничена в полуплоскости $\{\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}\}$ за исключением угла, в котором аргумент s мал. Из принципа Фрагмена–Линделефа вытекает ограниченность во всей полуплоскости. По уже установленным свойствам функции она не может иметь нетривиального внутреннего сомножителя. Следовательно, она внешняя, и, поскольку она ограниченно обратима на границе, это свойство сохраняется и во всей полуплоскости, как и требовалось.

В качестве альтернативного способа доказательства можно использовать оценку (7.17) из [7]; см. также п. 8.3 там же, где эта оценка распространена до общности, покрывающей наш случай. □

Список литературы

[1] Romanov R., *Canonical systems and de Branges spaces*, Lecture Notes in Math. (to appear).

[2] Кац И. С., Крейн М. Г., *Критерий дискретности спектра сингулярной струны*, Изв. вузов. Мат. **1958**, №2, 136–153.

[3] Romanov R., Woracek H., *Canonical systems with discrete spectrum*, J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 4, 108318.

[4] Lagarias J. C., *The Schrödinger operator with Morse potential on the right half-line*, Commun. Number Theory Phys. **3** (2009), no. 2, 323–361.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, Т. 2, Наука, М., 1974.

[6] Pólya G., *Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen*, J. Reine Angew. Math. **158** (1927), 6–18.

[7] Olver F. W. J., *Asymptotics and special functions*, Comp. Sci. Appl. Math., Acad. Press, New York, 1974.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 23 июня 2020 г.