В. И. Малыгин, Операция обратной связи и класс групповых автоматов, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 3, 81–89

Дискретная математика

том 2 выпуск 3 *1990

УДК 519.7

ОПЕРАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ И КЛАСС ГРУППОВЫХ АВТОМАТОВ

В. И. Малыгин

В работе изучается вопрос о том, что будет с внутренней группой автомата при применении операции обратной связи при условии, что каждое применение этой операции не выводит автомат из класса групповых автоматов. Основной результат работы состоит в том, что если внутренняя группа автомата отлична от циклической группы простого порядка, то существует автомат для этой группы такой, что примененная достаточное число раз операция обратной связи дает автомат с любой подгруппой полной симметрической группы для этого данного числа состояний. Наряду с этим исследуется вопрос об изменении группы автомата при однократном применении операции обратной связи.

Операция обратной связи наряду с операцией суперпозиции играет фундаментальную роль в задачах декомпозиции автоматов. В настоящее время наиболее изученной является операция суперпозиции и тесно связанный с ней класс групповых автоматов, замкнутый относительно этой операции [1, 2].

Операция обратной связи, будучи примененной к автомату, может вывести его из класса групповых автоматов. В настоящей работе исследуется вопрос о том, что будет с внутренней группой автомата при применении операции обратной связи при условии, что каждое применение этой операции не выводит автомат из класса групповых автоматов. Основной результат состоит в том, что если внутренняя группа автомата отлична от циклической группы простого порядка, то существует такой автомат для этой группы, что примененная достаточное число раз операция обратной связи дает автомат с любой подгруппой полной симметрической группы для этого данного числа состояний (теорема 2). Здесь же изучается вопрос о «локальном» изменении внутренней группы, т. е. вопрос об изменении группы автомата при однократном применении операции обратной связи (теорема 1).

Дадим необходимые определения. Пусть имеется конечный автомат

$$A=(A,\ Q,\ B,\ \varphi,\ \psi),$$

где $A=E_2^m$, $Q=E_2^n$, $B=E_2^k$ — декартовы степени множества $E_2=\{0, 1\}$.

Функция переходов φ и функция выходов ψ определены следующим образом:

$$\varphi\colon E_2^m\times E_2^n\to E_2^n,$$
$$\psi\colon E_2^m\times E_2\to E_2^k.$$

Отображения φ и ψ рассматриваются как булевские вектор-функции

$$\varphi = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n)),$$
$$\psi = (\psi_1(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n), \ldots, \psi_k(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n)).$$

Пусть k-я компонента вектор-функции ψ есть

$$\psi_k(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n)$$

и не зависит существенно от переменной x_m. Тогда, сопоставив с конечным автоматом A конечный автомат A', получаемый из A применением операции обратной связи (см. [2, с. 160]), имеем

$$A' = (E_2^{m-1}, E_2^n, E_2^k, (\varphi_1', \ldots, \varphi_n'), (\psi_1', \ldots, \psi_k')),$$
$$\varphi_s' = \varphi(x_1, \ldots, x_{m-1}, \psi_k(x_1, \ldots, x_{m-1}, z_1, \ldots, z_n), z_1, \ldots, z_n), \quad s = 1, \ldots, n; \quad (1)$$
$$\psi_t' = \psi_t(x_1, \ldots, x_{m-1}, \psi_k(x_1, \ldots, x_{m-1}, z_1, \ldots, z_n), z_1, \ldots, z_n), \quad t = 1, \ldots, k.$$

В таком случае будем использовать запись $A \vdash A'$.

Пусть G_A — внутренняя группа автомата A. Будем считать, что операция обратной связи $A \vdash A'$ допустима, если G_A является группой перестановок состояний автомата A.

Определение 1. Скажем, что группа G' *непосредственно трансформируется* из группы G ($G \vdash G'$), если существует автомат A, который имеет допустимую операцию обратной связи $A \vdash A'$, причем для групп G_A, G и $G_{A'}$, G справедливо следующее:

$$G_A = G, \quad G_{A'} = G'.$$

Скажем, что группа G' получается *трансформацией* группы G $G \models G'$, если автомат A допускает применение конечного числа раз допустимой операции обратной связи $A \models A'$ так, что $G_A = G$ и $G_{A'} = G'$.

Знак равенства двух групп понимается как совпадение двух групп перестановок в соответствующей симметрической группе.

Определим элемент $\tilde{x}$ следующим образом:

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) \in E_2^m,$$

$S_{\tilde{x}}$ — подстановка $S_{|Q|}$, соответствующая $\tilde{x}$. Тогда подстановка, соответствующая элементу

$$\tilde{x}' = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in E_2^m,$$

получается из двух $S_{(x', 0)}$ и $S_{(x', 1)}$, так как для любого элемента $\tilde{z} \in Q$:

$$\varphi'(\tilde{x}', \tilde{z}) = \varphi(\tilde{x}', \psi_k(\tilde{x}', \tilde{z}), \tilde{z}) = \begin{cases} \varphi(\tilde{x}', 0, \tilde{z}) & \text{при } \psi_k(\tilde{x}', \tilde{z}) = 0, \\ \varphi(\tilde{x}', 1, \tilde{z}) & \text{при } \psi_k(\tilde{x}', z') = 1. \end{cases}$$

Определение 2. *Операция склеивания* $\otimes$. Пусть x, y — элементы симметрической группы S_t. Определим подмножество $x \otimes y \subset S_t$ следующим образом:

$$x \otimes y = \{z \in S_t \mid \forall i = 1, \ldots, t \quad iz = ix \vee iy\}.$$

Лемма 1. *Свойства операции склеивания* $\otimes$:
1) $\{x, y\} \subset x \otimes y$;
2) $x \otimes y = y \otimes x$.

Утверждение леммы 1 непосредственно следует из определения 2.

Лемма 2. *Пусть* $A \vdash A'$, *тогда обратная связь будет допустимой тогда и только тогда, когда для всех элементов* $\tilde{x}' \in E_2^{m-1}$

$$S_{\tilde{x}'} \in S_{\tilde{x}', 0} \otimes S_{\tilde{x}', 1}.$$

Доказательство леммы показано выше.

Пусть теперь выбраны элементы x и y из симметрической группы S_t, причем

$$x=\begin{pmatrix}1, & \ldots, & t\\ i_{x,1}, & \ldots, & i_{x,t}\end{pmatrix}, \qquad y=\begin{pmatrix}1, & \ldots, & t\\ i_{y,1}, & \ldots, & i_{y,t}\end{pmatrix}.$$

Для элементов склейки $x\otimes y$ запишем возможность выбора:

$$\begin{array}{l} 1 \begin{array}{l}\longrightarrow i_{x,1}\\ \longrightarrow i_{y,1}\end{array}\\ 2 \begin{array}{l}\longrightarrow i_{x,2}\\ \longrightarrow i_{y,2}\end{array}\\ \cdots\cdots\\ t \begin{array}{l}\longrightarrow i_{x,t}\\ \longrightarrow i_{y,t}\end{array}\end{array} \tag{2}$$

Введем отношение эквивалентности R на множестве пар: $(i_{x,s};\ i_{y,1})\times$ $\times R(i_{x,q};\ i_{y,q})$, если либо

$$\{i_{x,s};\ i_{y,s}\}\cap\{i_{x,q};\ i_{y,q}\}\neq\varnothing, \tag{3}$$

либо существует цепочка пар с условием (3), идущая из пары $(i_{x,s};\ i_{y,s})$ к паре $(i_{x,q};\ i_{y,q})$.

Определение 3. *Разбиением* склейки $x\otimes y$ на блоки назовем классы смежности по отнсшению к эквивалентности R.

Выберем такую подстановку z, что $z\in x\otimes y$, и стрелку $pz=i_{q,p}$, где $p=\overline{1,t}$. Скажем, что для числа p в подстановке z взята стрелка типа g, т. е. либо $g=x$, либо $g=y$.

Лемма 3. *Пусть подстановка z такова, что $z\in x\otimes y$, а для чисел p и q имеем $p,\ q=\overline{1,t}$. Тогда утверждается, что если стрелки $pz=i_{g,p}$ и $qz=i_{g',q}$ принадлежат одному блоку, то для стрелок g, g' справедливо равенство $g=g'$. Выбор типа стрелок для различных блоков независим.*

Доказательство. Предположим, что стрелки $pz=i_{g,p}$ и $qz=i_{g',q}$ лежат в одном блоке. Пусть для определенности $pz=i_{x,p}$. Докажем тогда, что $g'=x$. Доказательство ведется по длине цепочки, соединяющей пары $(i_{x,p};\ i_{y,p})$ и $(i_{x,q};\ i_{g,q})$. Пусть пары $(i_{x,p};\ i_{y,p})$ и $(i_{x,s};\ i_{y,s})$, где $s\neq p$, таковы, что

$$\{i_{x,p};\ i_{y,p}\}\cap\{i_{x,s};\ i_{y,s}\}=\varnothing.$$

Так как стрелки $i_{x,p}\neq i_{x,s}$ при $s=p$, то либо совпадают стрелки $i_{x,p}$, $i_{y,s}$, т. е. $i_{x,p}=i_{y,s}$, либо совпадают стрелки $i_{y,p}$, $i_{x,s}$, т. е. $i_{y,p}=i_{x,s}$. Если $i_{x,p}=i_{y,s}$, то $sz=i_{y,s}$, поэтому $sz=i_{x,s}$. Если $i_{y,p}=i_{x,s}$, то, так как элемент $i_{y,p}$ не выбран в подстановке z при отображении $p\longrightarrow pz$, он должен быть выбран при sz, иначе в подстановке z он никогда не встретится. Итак, для очередной пары в блоке тип стрелки сохраняется. Ясно, что подмножества состояний $i=\overline{1,t}$, отвечающие различным блокам, не пересекаются, поэтому выбор типа стрелок для различных блоков независим. Лемма доказана.

Назовем длиной блока B количество входящих в него пар, для него будем использовать обозначение $|B|$.

Следствие 3.1. *Пусть $B_1,\ \ldots,\ B_l,\ B_{l+1},\ \ldots,\ B_k$ — разбиение подмножества $x\otimes y$ на блоки, где длина блоков выражается соотношениями*

$$|B_j|>1 \quad \textit{при} \quad j\leqslant l, \qquad |B_j|=1 \quad \textit{при} \quad j\geqslant l+1.$$

Тогда $|x\otimes y|=2^l$.

Доказательство. Каждому блоку длины больше 1 отвечают две возможности различным образсм выбрать тип стрелки. При этом будут получаться различные элементы склейки $x\otimes y$.

Лемма 4. *Склейка* $1 \otimes x$. *Пусть* 1 — *единичный элемент группы* S_t, $x = \prod_j c_j$ — *разложение элемента* x *на циклы, причем длина любого цикла больше единицы, т. е.* $|c_j| > 1$. *Тогда*

$$z \in 1 \otimes x \Leftrightarrow z = \prod_j c_j^{\sigma_j},$$

где $\sigma_j \in \{0, 1\}$ и $c_j^0 = 1$; $c_j^1 = c_j$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму в случае, когда x — один цикл. Не ограничивая общности, будем считать, что $x = \{1, \ldots, t\}$. Имеем следующую склейку:

$$\begin{array}{l} 1 \overset{\rightarrow 1}{\underset{\rightarrow 2}{}} \\ 2 \overset{\rightarrow 2}{\underset{\rightarrow 3}{}} \\ \ldots \\ t \overset{\rightarrow t}{\underset{\rightarrow 1}{}} \end{array}$$

Но тогда, очевидно, имеется один блок

$$B_1 = \{(1, 2);\ (2, 3);\ (3, 4);\ \ldots;\ (t, 1)\},$$

и склейка $1 \otimes x = \{1, x\}$, что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Дистрибутивные законы склейки. Для любых элементов* x, y, $z \in S_t$ *справедливы следующие равенства*:

$$(x \otimes y)\, z = xz \otimes yz,$$
$$z\,(x \otimes y) = zx \otimes zy.$$

Доказательство. Докажем сначала предварительную формулу (4) для любых элементов x, $y \in S_t$

$$(1 \otimes x)\, y = y \otimes xy. \tag{4}$$

Для элемента $g \in S_t$ положим

$$g = \begin{pmatrix} 1, \ldots, t \\ i_{g,1}, \ldots, i_{g,t} \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности можно считать, что x является циклом, причем

$$x = (1, 2, \ldots, q)\,(q+1) \ldots (t).$$

Тогда

$$1 \otimes x = \{1, x\}, \quad (1 \otimes x)\, y = \{y, xy\},$$

поэтому для доказательства равенства (4) достаточно показать, что в склейке $y \otimes xy$ имеется не более одного блока с длиной, большей 1. Склейка $y \otimes xy$ выглядит так:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \overset{\rightarrow i_{y,1}}{\underset{\rightarrow i_y,\ i_{x,1} = i_{y,2}}{}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ q \overset{\rightarrow i_{y,q}}{\underset{\rightarrow i_y,\ i_x = i_{y,1}}{}} \end{array}\right\} B_1 \text{ один блок}$$

$$\left.\begin{array}{l} q+1 \overset{\rightarrow i_{y,q+1}}{\underset{\rightarrow i_{y,q+1}}{}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ t \overset{\rightarrow i_{y,t}}{\underset{\rightarrow i_{y,t}}{}} \end{array}\right\} \text{блоки длины 1.}$$

Докажем равенства леммы. Из соотношения (4) имеем

$$(1 \otimes yx^{-1})\, x = x \otimes yxx^{-1} = x \otimes y.$$

Умножим это равенство на элемент z:

$$(x \otimes y)\, z = (1 \otimes yx^{-1})\, xz = xz \otimes yx^{-1}x^{-1}z = xz \otimes yz.$$

Доказательство второй формулы леммы проводится аналогично.

Теорема 1. *Для любых элементов x, $y \in S_t$ справедливо представление*

$$x \otimes y = x\,(1 \otimes x^{-1}y) = \left\{ x \prod_j c_j^{\sigma_j},\ \sigma_j = 0 \vee 1 \right\},$$

где $x^{-1}y = \prod_j c_j$ — разложение на циклы элемента $x^{-1}y$.

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием лемм 4 и 5.

Дадим теперь описание множества групп, в которые может трансформироваться внутренняя группа конечного автомата при допустимых операциях обратной связи.

Теорема 2. *Пусть дана конечная группа перестановок R.*

1. *Если $R \models G$, то для любой группы G' такой, что $G' \subseteq G$, следует, что $R \models G'$.*

2. *Если R является транзитивной подгруппой симметрической группы $S_{|Q|}$ и*

А) *$R = \mathbf{Z}_p$, где p — простое число, то либо $R \models \mathbf{Z}_p$, либо $R \models \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единичная подгруппа симметрической группы $S_{|Q|}$;*

Б) *$R \neq \mathbf{Z}_p$, то $R \vdash S_{|Q|}$.*

3. *Если R не является транзитивной подгруппой, то любая трансформация группы есть подгруппа прямого произведения трансформаций из транзитивных компонент R.*

В доказательстве теоремы 2 разберем теоретико-групповую часть, а затем автоматную. Теорема 1 позволяет описать локальное изменение образующих в группе автомата при однократном применении обратной связи. Новыми образующими являются циклы элементов трансформируемой группы.

Определение 4. Скажем, что группа G' *непосредственно выводится* из группы перестановок G: $G \to G'$, если

$$G' = \langle Z \mid \exists x,\ y \in G:\ z \in x \otimes y \rangle.$$

Скажем, что группа G' *выводится* из группы G ($G \Rightarrow G'$), если существует цепочка непосредственных выводимостей из группы G в группу G'.

Лемма 6. *Если группа G' выводится из группы G, а группа G'' такова, что $G'' \subset G'$, то группа G'' выводится из группы G, т. е. $G \Rightarrow G''$.*

Доказательство. Покажем, что группа G'' непосредственно выводится из группы G', т. е. $G' \to G''$. В самом деле, рассмотрим все склейки вида $1 \otimes g$, где $g' \in G'$. Положим

$$\theta_{G''}(1 \otimes g') = \begin{cases} 1, & \text{если } g' \in G'', \\ g', & \text{если } g' \in G''. \end{cases}$$

Тогда $G'' = \langle \theta_{G''}(1 \otimes g'),\ g' \in G' \rangle$.

Лемма 7. *Пусть имеются группы G, G' такие, что $G \to G'$, причем $G = \langle g \rangle$, $G' = \langle c \rangle$ и $\tau = \prod_{j=1}^{m} c_j \in G'$. Тогда элемент τ может быть получен из не более чем m склеек элементов группы G.*

Доказательство. Для любого элемента c_j существует такой элемент g_j, что $c_j \in 1 \otimes g_j$. Тогда

$$\tau \in \prod_{j=1}^{m} (1 \otimes g_j).$$

Теперь каковы бы ни были элементы $g_1, \ldots, g_4$ из группы G, утверждение леммы вытекает из следующей цепочки формул и леммы 5:

$$(g_1 \otimes g_2)(g_3 \otimes g_4) = (g_1 (g_3 \otimes g_4)) \otimes (g_2 (g_3 \otimes g_4)) = (g_1 g_3 \otimes g_1 g_4) \otimes (g_2 g_3 \otimes g_2 g_4).$$

Лемма 8. *Выводимость из циклических групп. Пусть дана циклическая группа* $\mathbf{Z}_n$ *порядка* n, $x = (1, \ldots, n)$ *— ее стандартная образующая. Тогда утверждается:*

а) *если* $n = p$, *где* p *— простое число, тогда либо* $\mathbf{Z}_p \Rightarrow \mathbf{Z}_p$, *либо* $\mathbf{Z}_p \Rightarrow \mathbf{1}$;

б) *если* n *является составным числом, тогда* $\mathbf{Z}_n \Rightarrow S_n$.

Доказательство.

а) Если $n = p$, тогда $\mathbf{Z}_p = \{1, x, \ldots, x^{p-1}\}$, причем все x^k являются циклами. Следовательно, для любого элемента $g \in \mathbf{Z}_p$ склейка $1 \otimes g = \{1, g\}$, откуда следует утверждение пункта а).

б) Пусть $n = p_1 p_2$; $p_1 > 1$, $p_2 > 1$. Покажем, что выводимы следующие элементы из группы S_n:

$$T_i = (i, i+1, i+2, \ldots, i+p_1-1), \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, n-p+1.$$

Получим сначала подстановку $T_1 = (1, 2, \ldots, p_1)$,

$$x^{p_1} = (1, 1+p_1, \ldots, 1+(p_2-1)p_1) \ldots (p_1, 2p_1, \ldots, p_1 p_2) = z_1 z_2 \ldots z_{p_1}.$$

Это есть разложение на циклы. Но тогда

$$x z_1^{-1} = (1, \ldots, p_1) w_2 \ldots w_{p_2}$$

— разложение на циклы, т. е.

$$T_1 \in 1 \otimes x z_1^{-1} \subset 1 \otimes [x (1 \otimes x^{-p_1})].$$

Таким образом, элемент T_1 выводим. Выводимость подстановок T_i, где $i > 1$, получается аналогично. Нужно только записать цикл

$$x = (i, i+1, \ldots, i-1)$$

и провести перенумерацию

$$1' \leftrightarrow i, \; 2' \leftrightarrow i+1, \ldots, n' \leftrightarrow i-1,$$

вывести подстановку T_1 и провести обратную перенумерацию.

Воспользуемся теперь одной леммой С. Пикар (см. [4], лемма 3). Каковы бы ни были числа n, k, причем $n \geqslant 3$, $2 \leqslant k \leqslant n$, подстановки $T_i = (i, i+1, \ldots, i+k-1)$, где $i = 1, \ldots, n-k+1$, порождают группу S_n (A_n), если k — четно (нечетно). Итак, в силу леммы можно вывести, по крайней мере, группу A_n и, следовательно, подстановку $(i, j)(k, l)$ из A_n для любых i, j, k, l таких, что $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$. Поэтому можно вывести любую транспозицию (i, j) из группы S_n и, следовательно, всю группу S_n.

Лемма 9. *Пусть даны группы*

$$Q' = \{j_1, \ldots, j_t\}, \; Q'' = \{i_1, \ldots, i_l\}$$

такие, что $Q' \not\subset Q''$ *и* $Q' \cap Q'' \neq \varnothing$. *Пусть* $c = (i_1, \ldots, i_l)$ *— цикл, а* S_t *— множество подстановок группы* Q', *и* $S_t \subseteq S_{|Q' \cup Q''|}$. *Тогда*

$$S_{|Q' \cup Q''|} = \langle S_t, c \rangle.$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что $|Q'| \geqslant 2$, причем существуют такие элементы j_{k_1}, j_{k_2}, что

$$j_{k_1} \in Q' \setminus Q'', \quad j_{k_2} \in Q'' \cap Q'.$$

Без ограничения общности можно считать, что цикл c есть $c=(2, \ldots, l+1)$, где $j_{k_1}=1$, $j_{k_2}=2$. Транспозиция $x=(1, 2)$ принадлежит множеству подстановок S_t, тогда

$$c^{-k-2}xc^{k-2}=(1, k), \qquad k=\overline{2, l+1},$$

поэтому для любого элемента $q_1 \in Q' \cup Q''$ транспозиция

$$(1, q) \in \langle S_t, c\rangle,$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 10. *Пусть дана транзитивная группа G из множества S_t, причем $G \not\Rightarrow S_t$. Тогда $G=\mathbf{Z}_t$ и t является простым числом.*

Доказательство. Пусть x есть цикл максимальной длины, выводимый из группы G. Покажем, что $|x|=t$. Отсюда будет следовать, что t является простым числом (иначе бы была выводимость группы S_t). Допустим, что $|x|<t$. Тогда, в силу транзитивности группы G, существует выводимый из G цикл y:

$$\{x\} \cap \{y\}=\varnothing, \qquad \{y\} \subseteq \{x\}.$$

С точностью до перенумерации возможны следующие два случая:

1°. $|\{x\} \cap \{y\}|=1$, $x=(1, \ldots, p)$, $y=(p, p+1, \ldots, q)$, но тогда

$$xy=(1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, q, p)$$

— цикл длины, большей, чем x, что невозможно.

2°. $|\{x\} \cap \{y\}|>1$, $x=(1, \ldots, p)$. Цикл y имеет вид

$$y=(\ldots, i_1, s_1, \ldots, s_\tau, i_2, \ldots),$$

где $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, p\}$, а $s_j>p$ для всех $j=\overline{1, \tau}$. Тогда существует такое число k, что

$$x^k=(i_1, i_2, \ldots),$$

где, возможно, x^k содержит несколько циклов. Но тогда элемент $y^{-1}x^k$ содержит цикл $(i_2, s_\tau, s_{\tau-1}, \ldots, s_1)$, и для этого цикла выполнены условия пункта 1°.

Полученное противоречие доказывает равенство $|x|=t=p$, где p — простое число. С точностью до перенумерации можно считать, что $x=(1, 2, \ldots, p)$. Допустим, возможен вывод цикла y меньшей длины:

$$y=(1, s_1, \ldots, s_\tau, \ldots, l),$$

где $s_j<l$ при $j=\overline{1, \tau}$. Но тогда

$$xy^{-1}=(l, l+1, \ldots, t)\prod_s c'_s,$$

т. е. выводим цикл $(l, l+1, \ldots, p)$. Сравнивая циклы

$$x=(p, p-1, \ldots, l, l-1, \ldots, 1), \qquad z=(p, \ldots, l+1, l),$$

аналогично выводу цикла z, можно получить элемент $w=(1, \ldots, l)$. Но тогда

$$z^{-1}wz=(1, 2, \ldots, l, p),$$

и по той же лемме С. Пикар выводима группа четных подстановок A_{l+1} множества $(1, 2, \ldots, l, p)$. Если $l>2$, то $l+1>3$, и, следовательно, в группе A_{l+1} есть произведение двух транспозиций. Значит, выводима одна транспозиция. Если $l=2$, то в качестве транспозиции можно взять элемент w. Без ограничения общности можно считать, что выводима транспозиция $\varepsilon=(1, 2)$. Но

$$\langle (1, 2), (1, 2, \ldots, p)\rangle = S_p,$$

так как можно получить все транспозиции вида

$$(s+1,\ s+2)=x^{-s}\varepsilon x^{s},$$

где $s=\overline{0,\ p-1}$; $s+1$, $s+2$ — сумма по модулю числа p. Итак, из группы G выводимы только циклы простой длины p. Пусть y — любой элемент группы G'. Покажем, что элемент y есть степень x. Существует такое число k, что

$$y^{k}=(1,\ 2,\ i_1,\ \ldots,\ i_{p-2}).$$

Но тогда элемент xy^{-k} переводит 1 в 1. Следовательно, в разложении элемента xy^{-k} на циклы присутствуют только циклы единичной длины. Поэтому

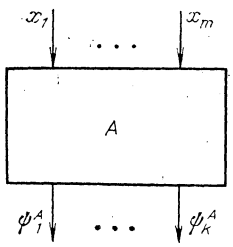


Рис. 1

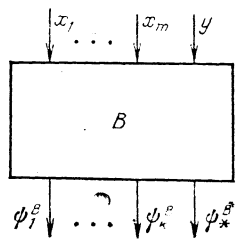


Рис. 2

$xy^{-k}=1$ и $x=y^{k}$, так как y является циклом простой длины, следовательно, $y=x^{k^{-1}}$, поэтому $G=\mathbf{Z}_p$. Лемма доказана.

Пусть теперь задан автомат A с m входами и k выходами, внутренней группой G_A, и пусть из группы G непосредственно выводится группа G_A, т. е. $G\to G_A$. Построим автомат B с внутренней группой G_B ($G_B=G$) такой, что однократное применение операции обратной связи дает автомат A.

Изобразим автомат A схемой на рис. 1. Построим автомат B (рис. 2).

Из выводимости группы G_A из группы G следует, что перестановка состояний автомата A, индуцируемая $\tilde{x}_0$, получается из двух элементов g_0, $g_1\in G$, т. е. $\tilde{x}_0\in g_0\otimes g_1$. Положим тогда

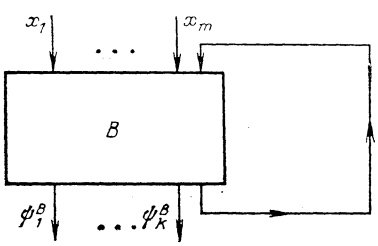
$$\varphi^{B}(\tilde{x}_0,\ 0,\ \tilde{z})=\tilde{z}g_0,\quad \varphi^{B}(\tilde{x}_0,\ 1,\ \tilde{z})=\tilde{z}g_1,$$

где φ^B — вектор-функция. Так проделаем для всех элементов $\tilde{x}_0\in E_2$. Положим

$$\psi^{B}(\tilde{x},\ y,\ \tilde{z})=\psi^{A}(x,\ z),$$

$$\psi_*^{B}(\tilde{x}_0,\ \tilde{z})=\begin{cases}0, & \varphi^{A}(\tilde{x}_0,\ \tilde{z})=\tilde{z}g_0,\\ 1, & \varphi^{A}(\tilde{x}_0,\ \tilde{z})=\tilde{z}g_1\end{cases}$$

(при одинаковых значениях $\tilde{z}g_0=\tilde{z}g_1$ считаем $\psi_*^B(\tilde{x}_0,\ \tilde{z})=0$), и так для всех элементов $\tilde{x}_0$. Ясно, что следующая схема 1



есть в точности автомат A, что следует из равенства

$$\psi^{B}(\tilde{x}_0,\ \psi_*^{B}(\tilde{x}_0,\ \tilde{z}),\ \tilde{z})=\varphi^{A}(\tilde{x}_0,\ \tilde{z})$$

для всех $\tilde{x}_0$ и $\tilde{z}$.

Таким образом, поднимаясь по цепочке вывода $G \Rightarrow G_A$, можно построить автомат, существование которого утверждалось в теореме 2, что и требовалось доказать.

В заключение автор хотел бы выразить признательность С. В. Алешину, который обратил его внимание на данную задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп /Под ред. М. А. Арбиба.— М.: Статистика, 1975.
2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов.— М.: Наука, 1985.
3. Малыгин В. И. Трансформации группы автомата под действием операции обратной связи // Тезисы VI Всесоюзной конференции по теоретическим проблемам кибернетики, 1983.— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986.— С. 93—94.
4. Пикар С. О базисах симметрической группы // Кибернетический сб. Вып. 1.— М.: Мир, 1965.— С. 7—34.

Статья поступила 03.11.89