В. Н. Берестовский, (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO_0(2,1)$, *Алгебра и анализ*, 2015, том 27, выпуск 1, 3–22

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №1

(ЛОКАЛЬНО) КРАТЧАЙШИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА ГРУППЕ ЛИ $SO_0(2,1)$

© В. Н. БЕРЕСТОВСКИЙ

В работе найдены геодезические, кратчайшие, множества раздела и сопряженные множества левоинвариантной субримановой метрики на группе Ли $SO_0(2,1)$ при условии, что метрика правоинвариантна относительно подгруппы Ли $SO(2) \subset SO_0(2,1)$.

Введение

В этой статье найдены геодезические и кратчайшие для группы Ли–Лоренца $(SO_0(2,1), d)$ с левоинвариантной и $SO(2)$-правоинвариантной субримановой метрикой d на $SO_0(2,1)$, где $SO(2) \subset SO_0(2,1)$.

Можно дать следующее естественное геометрическое описание метрики d. Группу Ли $SO_0(2,1)$ можно интерпретировать как эффективную транзитивную группу сохраняющих ориентацию изометрий плоскости Лобачевского L^2 постоянной гауссовой кривизны -1 и тем самым как пространство L_1^2 единичных касательных векторов над L^2. Пространство L_1^2 допускают естественную риманову метрику (скалярное произведение) Сасаки g_1 (см. [1] или метрику g_1 в разделе $1K$ книги А. Л. Бессе [2]). При этом каноническая проекция $p : (L_1^2, g_1) \to L^2$ (или, что эквивалентно, $p : SO_0(2,1) \to SO_0(2,1)/SO(2)$) является *римановой субмерсией* [2]. Метрика d определяется левоинвариантным вполне неголономным распределением D на $SO_0(2,1)$, ортогональным к слоям субмерсии p, и ограничением скалярного произведения g_1 на D.

При этом каноническая проекция

$$p : (SO_0(2,1), d) \to L^2 \tag{1}$$

Ключевые слова: алгебра Ли, геодезическая, группа Ли, левоинвариантная субриманова метрика, кратчайшая.

Автор был частично поддержан грантом правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор №14.B25.31.0029) и грантом РФФИ 14-01-00068-а.

является *субметрией* [3], естественным обобщением римановой субмерсии. Распределение D на L_1^2 есть не что иное, как ограничение горизонтального распределения связности Леви–Чивита [2] для L^2 на L_1^2.

С помощью этих идей из статьи [4], общих методов работы [5] и теоремы Гаусса–Бонне [6] для L^2 найдены геодезические и кратчайшие в $(SO_0(2,1),d)$.

Все результаты статьи снабжены полными доказательствами. Наряду с представлением геодезических с началом в единице в виде произведения двух 1-параметрических подгрупп и в явном матричном виде используется и их геометрическая интерпретация.

§1. Предварительные сведения

Псевдоевклидово пространство $E^{n,1}$, где $n+1 \geqslant 2$, или *пространство-время Минковского* Mink^{n+1}, есть векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с *псевдоскалярным произведением* $\{(t,x),(s,y)\} := -ts + (x,y)$. Здесь $(x,y) = xy^T$ — *стандартное скалярное произведение векторов* $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Группа Лоренца* $SO_0(n,1)$ — компонента связности единицы группы $P(n,1)$ всех линейных *псевдоизометрических* (т.е. сохраняющих псевдоскалярное произведение $\{\cdot,\cdot\}$) преобразований пространства Mink^{n+1}. Очевидно,

$$\{(t,x),(s,y)\} = ((-t,x),(s,y)) = ((t,x)I,(s,y)) = (t,x)I(s,y)^T, \qquad (2)$$

где I — матрица линейного отображения $(t,x) \to (-t,x)$, т.е. *оператора обращения времени*. Из формулы (2) следует, что $A \in P(n,1)$ тогда и только тогда, когда для любых $(t,x),(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$(t,x)I(s,y)^T = (t,x)AI((s,y)A)^T = (t,x)AIA^T(s,y)^T \Leftrightarrow AIA^T = I,$$

что эквивалентно

$$AIA^TI = E_{n+1}, \qquad (3)$$

где $E_{n+1} = e$ — единичная $(n+1)\times(n+1)$-матрица (было учтено тождество $I^2 = E_{n+1}$).

Замечание 1. В отличие от группы изометрий евклидова пространства E^{n+1}, имеющей две компоненты связности (состоящих соответственно из ортогональных матриц, сохраняющих или не сохраняющих ориентацию пространства E^{n+1}), группа $P(n,1)$ имеет 4 компоненты связности, так как для матриц из $P(n,1)$ условия (не)сохранения направления времени и (не)сохранения ориентации пространства $E^{n,1}$ не зависят друг от друга. Группа $SO_0(n,1)$ состоит из тех элементов группы $P(n,1)$, которые одновременно сохраняют и направление времени, и ориентацию пространства $E^{n,1}$.

Пусть $A = A(s)$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, — непрерывно дифференцируемая кривая в $SO_0(n,1)$ с условиями $A(0) = e$, $A'(0) = a$. Тогда дифференцирование тождества (3) при $s = 0$ дает равенство

$$a + Ia^T I = 0 \Leftrightarrow Ia + a^T I = 0 \Leftrightarrow Ia + (Ia)^T = 0.$$

Обратно, нетрудно доказать, что если матрица a удовлетворяет этому условию, то для всех $s \in \mathbb{R}$ матричная экспонента $\exp(sa) \in SO_0(n,1)$. Следовательно, так как $I^2 = E_{n+1}$, то алгебра Ли $\mathfrak{so}(n,1)$ групп Ли $P(n,1)$ и $SO_0(n,1)$ определяется следующим равенством

$$\mathfrak{so}(n,1) = I \cdot \mathfrak{so}(n+1). \qquad (4)$$

Как следствие

$$(\mathfrak{so}(n,1))^T = \mathfrak{so}(n,1). \qquad (5)$$

Группа Ли $Sl(n) \subset Gl(n)$ всех вещественных $(n \times n)$-матриц с определителем 1 является замкнутой связной подгруппой группы Ли $Gl(n)$ с алгеброй Ли

$$\mathfrak{sl}(n) = \Big\{a \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \mathrm{trace}(a) = \sum_{l=1}^{n} a_{ll} = 0\Big\}. \qquad (6)$$

Нас будет интересовать случай $n = 2$. Вследствие равенства (4) матрицы

$$a = e_{12} + e_{21}, \quad b = e_{13} + e_{31}, \quad c = e_{32} - e_{23}, \qquad (7)$$

где e_{ij} — *квадратная матрица, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит* 1, *а все остальные элементы равны нулю*, образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1)$. При этом, учитывая, что $[a,b] = ab - ba$ и т.д., легко находим, что

$$[a,b] = -c, \quad [b,c] = a, \quad [c,a] = b. \qquad (8)$$

Аналогично вследствие (6) матрицы

$$a' = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}), \quad b' = \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}), \quad c' = \frac{1}{2}(e_{12} - e_{21}) \in \mathfrak{sl}(2) \qquad (9)$$

образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. При этом

$$[a',b'] = -c', \quad [b',c'] = a', \quad [c',a'] = b'. \qquad (10)$$

Теорема 1. *Линейное отображение $l : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{so}(2,1)$ такое, что*

$$l(a') = a, \quad l(b') = b, \quad l(c') = c, \qquad (11)$$

является изоморфизмом алгебр Ли. Кроме того, формула

$$L(\exp(w)) = \exp(l(w)), \quad w \in \mathfrak{sl}(2), \qquad (12)$$

корректно определяет эпиморфизм групп Ли $L : Sl(2) \to SO_0(2,1)$ с ядром $\ker L = \{\pm E_2\}$.

Доказательство. Первое утверждение — следствие равенств (8), (10). Второе утверждение следует из первого и того факта, что обе группы Ли $SO_0(2,1)$ и $Sl(2)/\{\pm E_2\}$ реализуются как эффективные полные группы сохраняющих ориентацию изометрий плоскости Лобачевского постоянной секционной кривизны -1 для двух ее разных моделей А. Пуанкаре со стабилизаторами $\exp(\mathbb{R}c)$ и $\exp(\mathbb{R}c')/\{\pm E_2\}$, изоморфными $SO(2)$ (см. §3 и §4). Сейчас заметим лишь, что

$$L(-E_2) = L(\exp(2\pi c')) = \exp(2\pi c) = e_{11} + \cos(2\pi)(e_{22}+e_{33}) + \sin(2\pi)c = E_3.$$

□

Пусть G и H — группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$; $\phi : G \to H$ — гомоморфизм групп Ли. Тогда

$$\phi \circ \exp_{\mathfrak{g}} = \exp_{\mathfrak{h}} \circ d\phi_e, \tag{13}$$

причем

$$d\phi_e : (\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]) \to (\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]) \tag{14}$$

— гомоморфизм алгебр Ли (см. [7, лемма 1.12, с. 117]). Если $g_0 \in G$, то $\mathrm{I}(g_0) : G \to G$, где $\mathrm{I}(g_0)(g) = g_0 g g_0^{-1}$, — внутренний автоморфизм группы Ли G. Следовательно, $\mathrm{Ad}(g_0) := d\,\mathrm{I}(g_0)_e \in Gl(\mathfrak{g})$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$; при этом $d\,\mathrm{Ad}_e(v) := \mathrm{ad}(v) := [v,\cdot]$ для $v \in \mathfrak{g}$ (см. [7, с. 137]). Поэтому на основании формулы (13)

$$\mathrm{I}(g_0) \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}(g_0), \tag{15}$$

$$\mathrm{Ad}(\exp_{\mathfrak{g}}(v)) = \exp_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(v)), \quad v \in \mathfrak{g}. \tag{16}$$

Далее $\mathrm{Lin}(a,b)$ *обозначает линейную оболочку векторов* a, b. *Как вспомогательное средство будет использоваться стандартное скалярное произведение* $(\cdot,\cdot)$ *на алгебре Ли* $\mathfrak{gl}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

В случае левоинвариантных субримановых метрик на группах Ли каждая геодезическая является левым сдвигом некоторой геодезической с началом в единице. Поэтому далее рассматриваются только геодезические с началом в единице. Из теоремы 5 в статье [5] следует

Теорема 2. *Пусть* G *— связная подгруппа Ли группы Ли* $Gl(n)$ *с алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$, D *— вполне неголономное левоинвариантное распределение на* G, *скалярное произведение* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *на* $D(e)$ *пропорционально ограничению скалярного произведения* $(\cdot,\cdot)$ *(на* $D(e)$*). Тогда параметризованная длиной дуги нормальная геодезическая (т.е. локально кратчайшая)* $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (-a,a) \subset \mathbb{R}$, $\gamma(0) = e$, *на* (G,d) *с левоинвариантной субримановой метрикой* d, *определяемой распределением* D *и скалярным произведением*

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D(e)$, удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)u(t), \quad u(t) \in D(e) \subset \mathfrak{g}, \quad \langle u(t), u(t)\rangle \equiv 1, \tag{17}$$

$$pr_{\mathfrak{g}}([u(t)^T, u(t)] + [u(t)^T, v(t)]) = \dot{u}(t) + \dot{v}(t), \tag{18}$$

где $u = u(t)$, $v = v(t) \in \mathfrak{g}$, $(v(t), D(e)) \equiv 0$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, — некоторые вещественно-аналитические вектор-функции.

Из уравнений (17), (18) вытекает

Следствие 1. *Каждая параметризованная длиной дуги геодезическая в (G,d) является частью единственной параметризованной длиной дуги геодезической $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (G,d).*

§2. Поиск геодезических на $(SO_0(2,1), d)$

Теорема 3. *Пусть задан базис (7) алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1)$, $D(e) = \mathrm{Lin}(a,b)$ и на $D(e)$ задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с ортонормированным базисом a, b. Тогда левоинвариантное распределение D на группе Ли $SO_0(2,1)$ с данным $D(e)$ вполне неголономно и пара $(D(e), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d на $SO_0(2,1)$. При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $SO_0(2,1)$ с условием $\gamma(0) = e$ есть произведение двух 1-параметрических подгрупп:*

$$\gamma(t) = \exp(t(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b - \beta c))\exp(t\beta c), \tag{19}$$

где ϕ_0, β — некоторые произвольные постоянные.

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из формулы (8). Ясно, что на $D(e)$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \frac{1}{2}(\cdot,\cdot). \tag{20}$$

Вследствие теоремы 3 в [5] каждая геодезическая на 3-мерной группе Ли с левоинвариантной субримановой метрикой нормальна. Тогда из теоремы 2 следует, что для поиска геодезических $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $(SO_0(2,1), d)$ можно применить ОДУ (17), (18).

Ясно, что

$$u(t) = \cos\phi(t)a + \sin\phi(t)b, \quad v(t) = \beta(t)c, \tag{21}$$

и тождество (18) записывается в виде

$$[\cos\phi(t)a + \sin\phi(t)b, \beta(t)c] = \dot{\phi}(t)(-\sin\phi(t)a + \cos\phi(t)b) + \dot{\beta}(t)c.$$

Вследствие (8) выражение в левой части равенства равно

$$-\beta(t)(\cos\phi(t)b - \sin\phi(t)a).$$

Получаем тождества $\dot{\beta}(t) = 0$, $\dot{\phi}(t) = -\beta(t)$. Следовательно,

$$\beta = \beta(t) = \mathrm{const}, \quad \phi(t) = \phi_0 - \beta t. \tag{22}$$

Вследствие (17), (21) и (22) должно быть

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)(\cos(\phi_0 - \beta t)a + \sin(\phi_0 - \beta t)b). \tag{23}$$

Докажем, что (19) является решением ОДУ (23). Из формул (8), (7) легко вывести равенства

$$(\mathrm{ad}(c)) = Ia, \quad (\mathrm{ad}(b)) = b, \quad (\mathrm{ad}(a)) = -(e_{23} + e_{32}), \tag{24}$$

где (f) обозначает матрицу линейного отображения $f : \mathfrak{so}(2,1) \to \mathfrak{so}(2,1)$ в базисе a, b, c; далее (f) отождествляется с f. На основании формул (16), (24), (22), (21)

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \exp(t(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b - \beta c))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b - \beta c)\exp(t\beta c) + \gamma(t)(\beta c) \\
&= \gamma(t)\exp(-t\beta c)(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b - \beta c)\exp(t\beta c) + \gamma(t)(\beta c) \\
&= \gamma(t)\exp(-t\beta c)(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)\exp(t\beta c) + \gamma(t)(-\beta c) + \gamma(t)(\beta c) \\
&= \gamma(t)\cdot[\mathrm{Ad}(\exp(-t\beta c))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)] \\
&= \gamma(t)\cdot[\exp(\mathrm{ad}(-t\beta c))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)] \\
&= \gamma(t)\cdot[\exp(-t\beta(\mathrm{ad}(c)))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)] \\
&= \gamma(t)\cdot[\exp(-t\beta(Ia))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)] \\
&= \gamma(t)\cdot(\cos(\phi_0 - \beta t)a + \sin(\phi_0 - \beta t)b) \\
&= \gamma(t)u(t).
\end{aligned}$$

□

Замечание 2. При $\beta \neq 0$ обе 1-параметрические подгруппы из формулы (19) нигде не касаются распределения D, поэтому каждый их интервал имеет бесконечную длину в метрике d.

Замечание 3. Изменение знака у β в (19) равносильно изменению знака у t и замене угла ϕ_0 углом $\phi_0 \pm \pi$.

Замечание 4. Для каждой матрицы $B \in SO(2) = \exp(\mathbb{R}c)$ отображение $l_B \circ r_{B^{-1}}$, где l_B — умножение слева на B, $r_{B^{-1}}$ — умножение справа на B^{-1}, является одновременно изоморфизмом $\mathrm{Ad}\,B$ алгебры Ли $(\mathfrak{so}(2,1), [\cdot,\cdot])$, сохраняющим $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и изоморфизмом группы Ли $SO_0(2,1)$, сохраняющим распределение D и метрику d. В частности, вследствие (16), (24)

$$\mathrm{Ad}\,B(a - \beta c) = \exp(\phi_0(Ia))(a - \beta c) = \cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b - \beta c,$$

если

$$B = \exp(\phi_0 c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ 0 & \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Предложение 1. *Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая в $(SO_0(2,1),d)$, определяемая формулой* (19). *Тогда для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$*

$$\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t) = \exp((t-t_0)(\cos(\beta t_0+\phi_0)a+\sin(\beta t_0+\phi_0)b-\beta c))\exp((t-t_0)\beta c). \tag{26}$$

Доказательство. На основании формул (15), (16), (24)

$$\begin{aligned}
\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t) &= \exp(-t_0\beta c)\exp(-t_0(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b-\beta c)) \\
&\times \exp(t(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b-\beta c))\exp(t\beta c) \\
&= \exp(-t_0\beta c)\exp((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b-\beta c))\exp(t_0\beta c)\exp((t-t_0)\beta c) \\
&= [\mathrm{I}(\exp(-t_0\beta c))(\exp((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b-\beta c)))]\cdot\exp((t-t_0)\beta c) \\
&= \exp[\mathrm{Ad}(\exp(-t_0\beta c)((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b-\beta c))]\cdot\exp((t-t_0)\beta c) \\
&= \exp[\exp(\mathrm{ad}(-t_0\beta c))((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b-\beta c))]\cdot\exp((t-t_0)\beta c) \\
&= \exp[\exp(-t_0\beta(Ia))((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b-\beta c))]\cdot\exp((t-t_0)\beta c) \\
&= \exp((t-t_0)(\cos(\phi_0-\beta t_0)a+\sin(\phi_0-\beta t_0)b-\beta c))\cdot\exp((t-t_0)\beta c).
\end{aligned}$$

$\square$

Лемма 1. *Пусть $x = (x_{ij}) \in \mathfrak{so}(2,1)$,*

$$q := x_{21}^2 + x_{31}^2 - x_{32}^2, \quad \alpha := \sqrt{|q|}. \tag{27}$$

Тогда

$$\exp(x) = e + x + \frac{x^2}{2}, \quad \textit{если} \quad q = 0, \tag{28}$$

$$\exp(x) = e + \frac{\sin\alpha}{\alpha}x + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}x^2, \quad \textit{если} \quad q < 0, \tag{29}$$

$$\exp(x) = e + \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}x + \frac{\operatorname{ch}\alpha - 1}{\alpha^2}x^2, \quad \textit{если} \quad q > 0, \tag{30}$$

где e — единичная матрица третьего порядка.

Доказательство. Заметим, что характеристический многочлен матрицы x равен

$$P(\lambda) = |x - \lambda e| = \begin{vmatrix} -\lambda & x_{21} & x_{31} \\ x_{21} & -\lambda & -x_{32} \\ x_{31} & x_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda q,$$

где q определено по формуле (27).

По теореме Гамильтона–Кэли (см. [8, с. 93]) матрица x является корнем многочлена $P(\lambda)$, т.е. $x^3 = qx$. Отсюда сразу следует (28) и

$$x^{2n+1} = (-1)^n\alpha^{2n}x, \quad x^{2n} = (-1)^{n+1}\alpha^{2n-2}x^2, \quad \text{если} \quad q < 0, \quad n \geqslant 1,$$
$$x^{2n+1} = \alpha^{2n}x, \quad x^{2n} = \alpha^{2n-2}x^2, \quad \text{если} \quad q > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Поэтому при $q < 0$

$$\exp(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e + \frac{x}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^2}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

и (29) выполнено. Аналогично при $q > 0$

$$\exp(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e + \frac{x}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^2}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

и (30) выполнено. □

Теорема 4. *Пусть*

$$m = t, \quad n = \frac{t^2}{2}, \quad \textit{если} \quad \beta^2 = 1, \tag{31}$$

$$m = \frac{\sin(t\sqrt{\beta^2-1})}{\sqrt{\beta^2-1}}, \quad n = \frac{1-\cos(t\sqrt{\beta^2-1})}{\beta^2-1}, \quad \textit{если} \quad \beta^2 > 1, \tag{32}$$

$$m = \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{1-\beta^2})}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad n = \frac{\operatorname{ch}(t\sqrt{1-\beta^2})-1}{1-\beta^2}, \quad \textit{если} \quad \beta^2 < 1. \tag{33}$$

Тогда геодезическая левоинвариантной субримановой метрики d на группе Ли $SO_0(2,1)$ (см. теорему 3) равна $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, где столбцы $\gamma_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, даны формулами

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1+n \\ m\cos\phi_0 + \beta n\sin\phi_0 \\ m\sin\phi_0 - \beta n\cos\phi_0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} m\cos(\beta t - \phi_0) + \beta n\sin(\beta t - \phi_0) \\ n\cos(\beta t - \phi_0)\cos\phi_0 + \beta m\sin\beta t + (1-\beta^2 n)\cos\beta t \\ n\cos(\beta t - \phi_0)\sin\phi_0 - \beta m\cos\beta t + (1-\beta^2 n)\sin\beta t \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \beta n\cos(\beta t - \phi_0) - m\sin(\beta t - \phi_0) \\ -n\sin(\beta t - \phi_0)\cos\phi_0 + \beta m\cos\beta t - (1-\beta^2 n)\sin\beta t \\ -n\sin(\beta t - \phi_0)\sin\phi_0 + \beta m\sin\beta t + (1-\beta^2 n)\cos\beta t \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Доказательство. Пусть $\phi_0 = 0$. Тогда (19) примет вид

$$\gamma(t)\mid_{\phi_0=0} = \exp(t(a - \beta c))\exp(t\beta c).$$

Используя лемму 1, получим

$$\exp(t(a-\beta c)) = \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1+n & m & n\beta \\ m & 1+n(1-\beta^2) & m\beta \\ -n\beta & -m\beta & 1-n\beta^2 \end{pmatrix}.$$

В силу (25) матрицы $B = \exp(\phi_0)$ и $\exp(t\beta c)$ коммутируют. Отсюда, из (19) и замечания 4 следует, что

$$\gamma(t) = B\cdot\gamma(t)\mid_{\phi_0=0}\cdot B^{-1} = B\exp(t(a-\beta c))B^{-1}\exp(t\beta c)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ 0 & \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+n & m & n\beta \\ m & 1+n(1-\beta^2) & m\beta \\ -n\beta & -m\beta & 1-n\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta t-\phi_0) & -\sin(\beta t-\phi_0) \\ 0 & \sin(\beta t-\phi_0) & \cos(\beta t-\phi_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+n & m & \beta n \\ m\cos\phi_0+\beta n\sin\phi_0 & (1+(1-\beta^2)n)\cos\phi_0+\beta m\sin\phi_0 & \beta m\cos\phi_0-(1-\beta^2 n)\sin\phi_0 \\ m\sin\phi_0-\beta n\cos\phi_0 & (1+(1-\beta^2)n)\sin\phi_0-\beta m\cos\phi_0 & \beta m\sin\phi_0+(1-\beta^2 n)\cos\phi_0 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta t-\phi_0) & -\sin(\beta t-\phi_0) \\ 0 & \sin(\beta t-\phi_0) & \cos(\beta t-\phi_0) \end{pmatrix}.$$

Вычисление произведения последних двух матриц завершает доказательство теоремы 4. □

Следствие 2. *Если* $\phi_0 = 0$, *то в обозначениях* (31), (32) *и* (33)

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix} 1+n & m\cos\beta t+\beta n\sin\beta t & \beta n\cos\beta t-m\sin\beta t \\ m & \beta m\sin\beta t+(1+(1-\beta^2)n)\cos\beta t & \beta m\cos\beta t-(1+(1-\beta^2)n)\sin\beta t \\ -\beta n & -\beta m\cos\beta t+(1-\beta^2 n)\sin\beta t & \beta m\sin\beta t+(1-\beta^2 n)\cos\beta t \end{pmatrix}. \tag{37}$$

§3. Конформная модель Пуанкаре плоскости Лобачевского

Напомним известную геометрическую интерпретацию группы Ли $Sl(2)/\{\pm E_2\}$ как группы сохраняющих ориентацию движений плоскости

Лобачевского L^2. Верхняя полуплоскость $P = \{z = x + yi : y > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с метрическим тензором $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ есть *конформная модель Пуанкаре плоскости Лобачевского* L^2. Группа $Sl(2)$ действует сохраняющими ориентацию изометриями на полуплоскости P посредством вещественных дробно-линейных преобразований

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2).$$

Очевидно, ядром этого действия является центральная подгруппа $\{\pm E_2\} \subset Sl(2)$. Следовательно, группа Ли $Sl(2)/\{\pm E_2\}$ действительно есть группа (всех) сохраняющих ориентацию изометрий плоскости Лобачевского L^2.

Нетрудно проверить, что подгруппа Ли $SO(2)/\{\pm E_2\} \subset Sl(2)/\{\pm E_2\}$ является стабилизатором точки $z_0 = i$ относительно указанного действия, т.е. состоит в точности из тех элементов группы $Sl(2)/\{\pm E_2\}$, которые оставляют неподвижной эту точку; при этом группа $SO(2)/\{\pm E_2\}$ действует (просто) транзитивно вращениями на окружности — множестве единичных касательных векторов к плоскости P в точке i. Поэтому P естественно отождествляется с фактор-пространством

$$(Sl(2)/\{\pm E_2\})/(SO(2)/\{\pm E_2\}).$$

§4. Группа $SO_0(n,1)$ — связная группа изометрий пространства L^n

В §1 группа $SO_0(n,1)$ действовала псевдоизометриями слева на векторах-строках в пространстве-времени Минковского Mink^{n+1}. Вследствие формулы (5) можно, и будем считать, что группа $SO_0(n,1)$ действует псевдоизометриями слева на векторах-столбцах в пространстве-времени Минковского Mink^{n+1}.

Орбита $SO_0(n,1)\cdot(w_0 = (1,0,\dots,0)^T)$ события $(1,0,\dots,0)^T \in \mathrm{Mink}^{n+1}$ — верхняя (точнее, при „обычном“ расположении осей координат, „правая“) полость двуполостного гиперболоида

$$-t^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \{(t,x)^T,(t,x)^T\} = -1, \quad t > 0. \tag{38}$$

Ограничение псевдоскалярного произведения $\{\cdot,\cdot\}$ на касательное расслоение этой орбиты является скалярным произведением, и орбита с этим скалярным произведением изометрична n-мерному пространству Лобачевского L^n постоянной секционной кривизны -1. Поэтому далее L^n будет обозначать эту орбиту. Тогда автоматически $SO_0(n,1)$ — наибольшая связная транзитивная группа изометрий пространства L^n. При этом подгруппа

$$SO(n) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(n) \end{pmatrix} \subset SO_0(n,1)$$

является стабилизатором группы $SO_0(n,1)$ в точке w_0. Поэтому L^n естественно отождествляется с однородным пространством $SO_0(n,1)/SO(n)$, а действие группы $SO_0(n,1)$ на L^n — с ее стандартным левым действием на $SO_0(n,1)/SO(n)$. Каноническая проекция $p : SO_0(n,1) \to L^n = SO_0(n,1)/SO(n)$ определяется формулой $p(g) = gSO(n)$.

Замечание 5. В отличие от конформной модели плоскости Лобачевского из §3 геодезические, эквидистанты, окружности и орициклы плоскости Лобачевского имеют простое наглядное описание в ,,релятивистской" модели из §4. Именно их совокупность при $n = 2$ — набор всех сечений полости (38) двуполостного гиперболоида плоскостями. При этом все касательные векторы каждой из этих плоскостей псевдоортогональны некоторому ненулевому вектору v: пространственно-подобному ($\{v,v\} > 0$) для геодезических и эквидистант, временно-подобному ($\{v,v\} < 0$) для окружностей и изотропному ($\{v,v\} = 0$) для орициклов; причем в случае геодезической плоскость проходит через начало координат O. Аналогичное верно для $n > 2$.

Группа Лоренца $SO_0(n,1)$ диффеоморфна пространству L^n_1 всех единичных касательных векторов к L^n. Именно, каждому элементу $g \in SO_0(n,1)$ сопоставляется единичный касательный вектор $f(g) := g(v_0)$ к L^n в точке $g(w_0)$, где $v_0 = (0,1,0,\dots,0)^T$ — единичный касательный вектор к L^n в точке w_0.

Следующие ниже утверждения этого параграфа основаны на информации, приведенной во введении.

При отождествлении $SO_0(2,1)$ с L^2_1 посредством f для каждого геодезического пути $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, в $(SO_0(2,1),d)$ с произвольным началом $g \in SO_0(2,1)$, $f(\gamma(t))$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, есть параллельное в смысле [6] векторное поле (в *плоскости Лобачевского!*) с начальным единичным касательным вектором $f(\gamma(0)) = g(v_0) \in L^2_1$ вдоль проекции $p(\gamma(t))$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ [4].

1) В частности, если $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая в $(SO_0(2,1),d)$ вида (19) с $\phi_0 = 0$, то $\gamma'(0) = v_0$ и $f(\gamma(t))$ $0 \leqslant t \leqslant t_1$ есть параллельное векторное поле в L^2 вдоль $p(\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$, с начальным единичным касательным вектором $\gamma'(0)$.

2) Каноническая проекция $p : (SO_0(2,1),d) \to L^2$ — субметрия [3, 4].

3) Если $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, — произвольная (параметризованная длиной дуги) геодезическая в $(SO_0(2,1),d)$, то ее проекция $p(\gamma(t))$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, в L^2 параметризована длиной дуги.

4) На основании предложения 1, замечания 4 и левой инвариантности метрики d для поиска всех кратчайших в $(SO_0(2,1),d)$ достаточно найти все непродолжаемые кратчайшие вида $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, (19), с $\phi_0=0$.

§5. Кратчайшие на группе Ли $(SO_0(2,1),d)$

Для поиска кратчайших в $(SO_0(2,1),d)$ воспользуемся утверждениями 1)–4) из §4. В частности, достаточно исследовать отрезки геодезических вида

$$\gamma(t)=\exp(t(a-\beta c))\exp(t\beta c),\quad 0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{39}$$

и их проекции

$$x(t):=p(\gamma(t))=\gamma(t)\cdot w_0=\gamma(t)\cdot(1,0,0)^T=(1+n,m,-\beta n)^T,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{40}$$

на плоскость L^2, где m, n определены формулами (31), (32), (33) (мы использовали формулу (37)).

Сформулируем теорему Гаусса–Бонне (см. [6, с. 170]). Пусть M — двумерное ориентированное многообразие с римановой метрикой ds^2, Φ — гомеоморфная кругу область на M, ограниченная замкнутой кусочно-регулярной кривой γ с регулярными звеньями $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, образующими углы $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ со стороны области Φ. Направление на кривой γ задано так, чтобы при обходе кривой в этом направлении область Φ оставалась справа. Тогда

Теорема 5.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}\kappa ds+\sum_{k=1}^{n}(\pi-\alpha_k)=2\pi-\int\int_{\Phi}K d\sigma,$$

где κ — геодезическая кривизна в точках звеньев кривой, K — гауссова (секционная) кривизна поверхности (M,ds^2), а интегрирование в правой части равенства выполняется по площади области Φ.

Формула для вычисления κ в полугеодезической системе координат дана в [6, с. 164]. Далее строится полугеодезическая система координат (u,v) в L^2.

Каноническая параметризованная длиной дуги геодезическая в L^2 имеет вид $\tilde{\gamma}(s)=(\operatorname{ch}s,\operatorname{sh}s,0)$. Отсюда и из инвариантности расстояния в L^2 относительно действия группы $SO_0(2,1)$ следует, что расстояние между произвольными точками $(t,x,y)^T$ и $(t_1,x_1,y_1)^T$ в L^2 равно

$$\rho((t,x,y)^T,(t_1,x_1,y_1)^T)=\operatorname{arcch}(-\{(t,x,y)^T,(t_1,x_1,y_1)^T\}). \tag{41}$$

Пусть $(t,x,y)^T$ — произвольная точка в L^2. Тогда $(1/\sqrt{t^2-y^2})(t,0,y)^T\in L^2$ и вследствие (41) расстояние от этой точки до точек $(t,x,y)^T$ и $w_0=$

$(1,0,0)^T$ равно соответственно $\operatorname{arcch}(\sqrt{t^2-y^2})$ и $\operatorname{arcch}(t/\sqrt{t^2-y^2})$. В соответствии с этим определим координаты u, v точки $(t,x,y)^T$ формулами

$$u = (\operatorname{sgn} x)\operatorname{arcch}(\sqrt{t^2-y^2}), \quad v = (\operatorname{sgn} y)\operatorname{arcch}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-y^2}}\right). \tag{42}$$

С учетом сказанного нетрудно убедиться в том, что все точки линии $u = u_0$ отстоят от линии $u = 0$ на расстоянии $|u_0|$, причем линия $v = v_0$ дает кратчайшее соединение точки (u_0, v_0) с линией $u = 0$, а линия $u = 0$ — геодезическая, для которой v — параметризация длиной дуги. Отсюда следует, что элемент длины в этих координатах определяется формулой

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2(u)dv^2, \tag{43}$$

т.е. (u,v) — полугеодезическая система координат в L^2. Кроме того, *первые частные производные компонент метрического тензора и символы Кристоффеля в этой системе координат равны нулю на линии* $u = 0$. Отсюда, из предложения 1, формулы (23) и формулы для κ в [6, с. 164] легко выводится

Предложение 2. *Проекция* (40) *имеет постоянную геодезическую кривизну* κ, *для ее координатного представления* $(u(t), v(t))=(u(x(t)), v(x(t)))$

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad v'(0) = 0, \quad \kappa = -v''(0).$$

Замечание 6. Еще Н. И. Лобачевский построил другим способом полугеодезическую систему координат (u,v) в L^2 с линейным элементом (43) и явно выписал формулу (43). Аналогичную систему координат и формулу линейного элемента он нашел для L^3. Это противоречит общепринятому убеждению, что сам Лобачевский не предъявил модели своей геометрии (и поэтому не дал полного логического обоснования этой геометрии).

Предложение 3. *Геодезическая кривизна проекции* (40) *равна* $\kappa = \beta$.

Доказательство. Вследствие формул (40), (31), (32), (33) и (42)

$$n(0) = m(0) = 0, \quad n' = m, \quad n'(0) = 0, \quad n''(0) = 1$$

и при малых положительных t

$$v(t) = \operatorname{sgn}(-\beta)\operatorname{arcch}\left(\frac{1+n}{\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}}\right),$$

$$
\begin{aligned}
v'(t) &= \frac{\operatorname{sgn}(-\beta)}{\operatorname{sh}(\operatorname{arcch}((1+n)/\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}))}\cdot\left(\frac{1+n}{\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}}{|\beta|n}\cdot\frac{\operatorname{sgn}(-\beta)\beta^2 nn'}{(1+2n+(1-\beta^2)n^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(-\beta)|\beta|n'}{1+2n+(1-\beta^2)n^2}.
\end{aligned}
$$

На основании предложения 2

$$\kappa = -v''(0) = \operatorname{sgn}(\beta)|\beta|n''(0) = \beta.$$

□

Согласно теореме 4 далее рассмотрим 4 случая: I) $\beta = 0$; II) $0 < \beta^2 < 1$; III) $\beta^2 = 1$; IV) $1 < \beta^2$.

Из предложения 3 и известных фактов гиперболической геометрии непосредственно вытекает

Следствие 3. *Проекция* (40) — I) *геодезическая,* II) *эквидистанта,* III) *орицикл,* IV) *окружность.*

Лемма 2. *В случае* I) *каждый отрезок* $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, — *кратчайшая.*

Доказательство. На основании следствия 3 каждый отрезок (40) — кратчайшая. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда есть другой кратчайший геодезический отрезок $\gamma_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0 < t_1$, в $(SO_0(2,1),d)$ с теми же концами, что у отрезка в лемме. Тогда вследствие 3) путь $x_0(t) := p(\gamma_0(t))$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, имеет длину $t_0 < t_1$ и те же концы, что и кратчайшая (40) длины t_1, противоречие. □

Предложение 4. *Пусть проекция* (40) *геодезического отрезка* (39), *где* $\beta \neq 0$, *не имеет самопересечений* (*в случаях* II *и* III *это выполнено всегда, а в случае* IV, *когда* $0 \leqslant t_1 < 2\pi/\sqrt{\beta^2-1}$), $S(t_1) = S(t_1,\beta)$, — *площадь криволинейного двуугольника* P *в* L^2, *ограниченного отрезком* (40) *и кратчайшим отрезком* $[x(0)x(t_1)]$ *длины* $r = r(t_1)$ *в* L^2, $\psi = \psi(t_1,\beta)$ — *угол двуугольника* P. *Тогда*

$$S(t_1) = |\beta|t_1 - 2\psi,\quad r = \operatorname{arcch}((1+n)(t_1)),\quad r'(t_1) = \cos\psi = \frac{m}{\sqrt{n(n+2)}}. \tag{44}$$

При этом $S'(t_1) > 0$, $t_1 > 0$; $0 < \psi < \pi/2$ *в случаях* II *и* III, *а в случае* IV, *когда* $0 \leqslant t_1 < \pi/\sqrt{\beta^2-1}$.

Доказательство. Вследствие замечания 3 можно считать, что $\beta > 0$. Отрезок $[x(0)x(t_1)]$ имеет геодезическую кривизну 0. Тогда первое равенство в (44) — прямое следствие предложения 3 и теоремы 5 при $K = -1$, второе — формул (40) и (41), следующее — хорошо известное утверждение римановой геометрии (о существовании сильного угла), последнее — результат дифференцирования второго равенства в (44). Неравенства $0 < \psi(t_1) < \pi/2$ справедливы в указанных случаях вследствие последнего равенства в (44), первых формул в (31), (32), (33) и того, что $\lim_{t_1\to+0}\psi(t_1) = 0$.

Докажем оставшееся утверждение. Известно, что в L^2

$$l(r,\alpha) = \alpha \operatorname{sh} r, \tag{45}$$

$$S(r,\alpha) = \int_0^r \alpha \operatorname{sh} s ds = \alpha \operatorname{ch} s|_0^r = \alpha(\operatorname{ch} r - 1), \tag{46}$$

где $l(r,\alpha)$ — длина дуги окружности радиуса r с центральным углом $\alpha \leqslant 2\pi$, а $S(r,\alpha)$ — площадь соответствующего сектора. Отсюда, из (44) и вторых формул в (31), (32), (33) следуют соотношения

$$S'(t_1) = (\operatorname{ch} r - 1)\psi'(t_1) = |\beta| - 2\psi'(t_1),$$

$$\psi'(t_1) = \frac{|\beta|}{\operatorname{ch} r + 1} = \frac{|\beta|}{n+2}, \tag{47}$$

$$S'(t_1) = \frac{|\beta| n}{n+2}(t_1) > 0, \quad t_1 > 0. \tag{48}$$

$\square$

Предложение 5. 1) *Если $\beta \neq 0$, то геодезический отрезок* (39) — *непродолжаемая кратчайшая, если его проекция* (40) — а) *однократно проходимая окружность C, ограничивающая круг с площадью $S(t_1) \leqslant \pi$, или* б) *кривая без самопересечений, ограничивающая вместе с кратчайшим отрезком $[x(0)x(t_1)]$ в L^2 двуугольник P в L^2 с площадью $S(t_1) = \pi$.*

2) *Для каждого $\beta \neq 0$ существует единственное $t_1 > 0$ такое, что выполняется одно из условий* а) *или* б); а) *имеет место, только если $|\beta| \geqslant 3/\sqrt{5}$.*

Доказательство. 1) а) Ясно, что $\gamma(t_1) \in SO(2)$. Тогда вследствие замечания 4 для того же β и произвольного ϕ_0 отрезок геодезической (19) при $t \in [0, t_1]$ соединяет те же точки, что и (39). Следовательно, каждое продолжение отрезка (39) не будет кратчайшей.

Предположим, что есть кратчайшая $\gamma_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_2 < t_1$, в $(SO_0(2,1), d)$, соединяющая точки $\gamma(0) = e$ и $\gamma(t_1)$. Тогда проекция $x_2(t) = p(\gamma_2(t))$, $0 \leqslant t \leqslant t_2$, является однократно проходимой окружностью C_2 в L^2 длины $t_2 < t_1$ и поэтому ограничивающей круг с площадью $S(t_2) < S(t_1) \leqslant \pi$. Следовательно, на основании теоремы Гаусса–Бонне результаты параллельных переносов в L^2 для всех ненулевых касательных векторов вдоль

C и C_2 будут разными. Вследствие геометрической интерпретации геодезических в $(SO_0(2,1),d)$ из п. 1) §4 $\gamma_2(t_2) \neq \gamma(t_1)$, противоречие.

б) Пусть P' — симметричный двуугольнику P относительно отрезка $x(0)x(t_1)$ двуугольник. Так как $S(t_1) = \pi$, то вследствие теоремы Гаусса–Бонне результаты параллельных переносов в L^2 касательных векторов вдоль ограничивающих P и P' замкнутых контуров при прохождении этих контуров в противоположных направлениях будут одинаковы. Поэтому на основании замечаний 3 и 4 и геометрической интерпретации геодезических в $(SO_0(2,1),d)$ из п. 1) §4 кривая в L^2, симметричная проекции (40) отрезка (39) относительно отрезка $x(0)x(t_1)$, представляется в виде $p(\gamma_1(t))$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где γ_1 — некоторая геодезическая в $(SO_0(2,1),d)$ такая, что $\gamma_1(0) = \gamma(0)$, $\gamma_1(t_1) = \gamma(t_1)$. Следовательно, каждое продолжение отрезка (39) не будет кратчайшей.

Предположим, что есть кратчайшая $\gamma_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_2 < t_1$, в $(SO_0(2,1),d)$, соединяющая точки $\gamma(0) = e$ и $\gamma(t_1)$. Тогда вследствие замечаний 3 и 4 можно считать, что кривые (40) и $x_2(t) = p(\gamma_2(t))$, $0 \leqslant t \leqslant t_2$, лежат по одну сторону от кратчайшей $x(0)x(t_1)$ и соединяют концы этой кратчайшей. Следовательно, на основании предложения 3 двуугольник P и двуугольник P_2, ограниченный кратчайшей $x(0)x(t_1)$ и кривой $x_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_2$, выпуклые, причем пересечение их границ — кратчайшая $x(0)x(t_1)$, так как $t_2 < t_1$. Поэтому вследствие последнего неравенства кривая $x_2(t)$, $0 < t < t_2$, лежит внутри P и $S(t_2) < S(t_1) = \pi$, где $S(t_2)$ — площадь двуугольника P_2. Следовательно, на основании теоремы Гаусса–Бонне результаты параллельных переносов в L^2 для всех ненулевых касательных векторов вдоль границ P и P_2 будут разными. Вследствие геометрической интерпретации геодезических в $(SO_0(2,1),d)$ $\gamma_2(t_2) \neq \gamma(t_1)$, противоречие.

2) На основании следствия 3 и первого равенства в (44) условие а) выполняется, только если

$$\beta^2 > 1, \quad S\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}\right) = |\beta|\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}} - 2\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow |\beta| \geqslant \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Если же $0 < |\beta| < \frac{3}{\sqrt{5}}$, то вследствие предложения 4 существует единственное $t_1 > 0$, для которого выполняется условие б). □

Далее для каждого числа $\beta \neq 0$ найдем число $t_1 = t_1(\beta)$, удовлетворяющее условиям предложения 5.

II) На основании первой формулы в (44) должно быть

$$\pi = |\beta|t_1 - 2\psi, \quad \frac{|\beta|t_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{|\beta|t_1}{2} < \pi. \tag{49}$$

Из формул (49), (33) и последнего равенства в (44) находим, что

$$\sin\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \cos\psi = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{ch}(t_1\sqrt{1-\beta^2}/2)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t_1\sqrt{1-\beta^2}/2)-\beta^2}}, \tag{50}$$

$$-\cos\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \sin\psi = \frac{|\beta|\,\mathrm{sh}(t_1\sqrt{1-\beta^2}/2)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t_1\sqrt{1-\beta^2}/2)-\beta^2}}. \tag{51}$$

III) На основании (31) и первой формулы в (44) должны быть те же формулы (49) при $|\beta| = 1$ и

$$\sin\left(\frac{t_1}{2}\right) = \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+(t_1/2)^2}}, \tag{52}$$

$$-\cos\left(\frac{t_1}{2}\right) = \sin\psi = \frac{t_1/2}{\sqrt{1+(t_1/2)^2}}, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{t_1}{2} < \pi. \tag{53}$$

IV) Наименьшее положительное t_0, при котором $x(t_0) = w_0$, равно $2\pi/\sqrt{\beta^2-1}$. При этом $\lim_{t\to t_0-0}\psi(t) = \pi$ и вследствие (44)

$$S(t_0) = (2\pi|\beta|/\sqrt{\beta^2-1}) - 2\pi.$$

$S(t_0) = 2\pi$ (соответственно $S(t_0) = \pi$), когда $|\beta| = 2/\sqrt{3}$ (соответственно $|\beta| = 3/\sqrt{5}$). Рассмотрим три случая: a) $|\beta| \geqslant 3/\sqrt{5}$; b) $1 < |\beta| \leqslant 2/\sqrt{3}$; c) $2/\sqrt{3} < |\beta| < 3/\sqrt{5}$.

a) В этом случае вследствие предложения 5

$$t_1 = 2\pi/\sqrt{\beta^2-1}. \tag{54}$$

b) В этом случае найдется единственное t_1 такое, что $0 < t_1 \leqslant \pi/\sqrt{\beta^2-1}$ и $S(t_1) = \pi$. Тогда вследствие (32) и предложения 4

$$\pi = |\beta|t_1 - 2\psi, \quad 0 < \psi \leqslant \pi/2, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{|\beta|t_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi \leqslant \pi, \tag{55}$$

$$\sin\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \cos\psi = \frac{\sqrt{\beta^2-1}\cos(t_1\sqrt{\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2-\cos^2(t_1\sqrt{\beta^2-1}/2)}}, \tag{56}$$

$$-\cos\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \sin\psi = \frac{|\beta|\sin(t_1\sqrt{\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2-\cos^2(t_1\sqrt{\beta^2-1}/2)}}. \tag{57}$$

c) Получаем те же формулы (56), (57), но на этот раз

$$\pi/\sqrt{\beta^2-1} < t_1 < 2\pi/\sqrt{\beta^2-1}, \ \ \pi/2 < \psi < \pi, \ \ \pi < \frac{|\beta|t_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi < \frac{3\pi}{2}. \tag{58}$$

Теорема 6. *Пусть* (39), *где* $t_1 = t_1(|\beta|)$, *— непродолжаемая кратчайшая в* $(SO_0(2,1), d)$. *Тогда* $t_1(|\beta|)$ *— строго убывающая функция от* $|\beta| > 0$.

Доказательство. Вследствие п. а) предложения 5 и формулы (54) это утверждение верно при $|\beta| \geqslant 3/\sqrt{5}$. Если $0 < |\beta| < 3/\sqrt{5}$, то верна вторая формула в (49). Вследствие нее и (47)

$$t_1 + |\beta|\frac{dt_1}{d|\beta|} = 2\psi'(t_1) \cdot \frac{dt_1}{d|\beta|} = \frac{2|\beta|}{n+2} \cdot \frac{dt_1}{d|\beta|}, \quad t_1 = \frac{-|\beta|n}{n+2} \cdot \frac{dt_1}{d|\beta|}.$$

Отсюда и из вторых формул в (31), (32), (33) вытекает, что $dt_1/d|\beta| < 0$, так как $0 < t_1 < 2\pi/\sqrt{\beta^2 - 1}$, если $1 < |\beta| < 3/\sqrt{5}$ и, следовательно, теорема. □

Замечание 7. Каноническая проекция $p : L_1^2 \to L^2$ является главным расслоением со слоем $SO(2)$. Поскольку L^2 диффеоморфно $\mathbb{R}^2$, на L^2 существует гладкое единичное векторное поле. Поэтому расслоение p тривиально и L_1^2 и $SO_0(2,1)$ диффеоморфны $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Следовательно, фундаментальные группы групп Ли $SO_0(2,1)$ и $Sl(2)$ изоморфны $(\mathbb{Z}, +)$. Представляет интерес задача найти кратчайшие для локально изометричных эпиморфных накрывающих групп Ли $Sl(2) \to SO_0(2,1)$ и $\tilde{S}l(2) \to Sl(2)$, где $\tilde{S}l(2)$ односвязно.

§6. Множества раздела и сопряженные множества в $(SO_0(2,1), d)$

Для субриманова многообразия (M, d) без анормальных геодезических (как в случае $(SO_0(2,1), d)$) в отличие от римановых многообразий экспоненциальное отображение Exp и его ограничение Exp_x определены не на TM и T_xM, а только на D и $D(x)$, где D — распределение на M, участвующее в определении метрики d. В остальном множества раздела и сопряженные множества для субриманова многообразия определяются так же, как для риманова [9].

Определение 1. Множество раздела $C(x)$ (соответственно сопряженное множество $S(x)$) для точки x субриманова многообразия M (без анормальных геодезических) есть множество всех концов $y \in M$ непродолжаемых за y кратчайших, соединяющих точку x с точкой y (соответственно образ множества критических значений отображения Exp_x относительно Exp_x).

Теорема 7. *Для любого элемента* $g \in (SO_0(2,1),d)$, $C(g) = gC(e)$ *и* $S(g) = gS(e)$. *Кроме того,* $S(g) \subset C(g)$,

$$C(e) = \{\gamma_\beta(t_1(\beta)) : \beta \in \mathbb{R}\}, \tag{59}$$

$$S(e) = \{\gamma_\beta(t_1(\beta)) : \beta^2 \geqslant 9/5\} = SO(2) \setminus \{e\}; \tag{60}$$

$S(e)$ *диффеоморфно* $\mathbb{R}$;

$$\overline{S(e)} = S(e) \cup \{e\} = SO(2), \tag{61}$$

$\overline{S(e)}$ *диффеоморфно окружности* S^1;

$$\overline{C(e) \setminus S(e)} = (C(e) \setminus S(e)) \cup \Big\{\gamma_\beta(t_1(\beta)) = \gamma_{-\beta}(t_1(-\beta)) : \beta = \frac{3}{\sqrt{5}}\Big\}, \tag{62}$$

$\overline{C(e) \setminus S(e)}$ *диффеоморфно вещественной проективной плоскости с удаленной точкой* $RP^2 \setminus \{\infty\}$; $\overline{C(e)}$ *гомеоморфно* $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cup \mathbb{R}$, *где* $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cap \mathbb{R}$ *одноточечно*; $\overline{C(e)}$ *гомеоморфно* $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cup S^1$, *где* $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cap S^1$ *одноточечно.*

Доказательство. Первое утверждение — следствие левой инвариантности метрики d на $SO_0(2,1)$. Включение $S(g) \subset C(g)$, формулы (59), (60), равенство в фигурной скобке из (62) и диффеоморфность $S(e) \cong \mathbb{R}$ — следствия доказательства предложения 5 и замечания 4. Формула (61) и диффеоморфность $\overline{S(e)} \cong S^1$ вытекают из формулы (60). Равенство (62) вытекает из формул (59), (60), а $\overline{C(e) \setminus S(e)} \cong RP^2 \setminus \{\infty\}$ — из равенств $\gamma_{(\beta,\phi_0)}(t_1(\beta)) = \gamma_{(-\beta,-\beta t_1+\phi_0+\pi)}(t_1(-\beta))$ при $|\beta| \leqslant 3/\sqrt{5}$. Из уже доказанных утверждений легко получить остальные. $\square$

Замечание 8. Из (61) и равенств $C(g) = gC(e)$, $S(g) = gS(e)$ следует, что $g \in gSO(2) = \overline{S(g)} \subset \overline{C(g)}$ для всех $g \in SO_0(2,1)$, в то время как $x \notin \overline{C(x)}$ и $x \notin \overline{S(x)}$ для любой точки x произвольного гладкого риманова многообразия. В этом состоит коренное различие римановых и субримановых многообразий.

Список литературы

[1] Sasaki S., *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **10** (1958), no. 3, 338–354; II, **14** (1962), no. 2, 146–155.

[2] Бессе А. Л., *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, Мир, М., 1981.

[3] Berestovskii V. N., Guijarro L., *A metric characterization of Riemannin submersions*, Ann. Global Anal. Geom. **18** (2000), no. 6, 577–588.

[4] Берестовский В. Н., Зубарева И. А., *Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных метрик на некоторых группах Ли*, Сиб. мат. ж. **42** (2001), №4, 731–748.
[5] Берестовский В. Н., *Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой*, Сиб. мат. ж. **55** (2014), №5, 959–970.
[6] Погорелов А. В., *Дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1969.
[7] Хелгасон С., *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964.
[8] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1967.
[9] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971.

Поступило 10 июня 2014 г.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск
пр. Академика Коптюга, 4
Россия
E-mail: vberestov@inbox.ru