O. M. Fomenko, On the value distribution for $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$, *Algebra i Analiz*, 2005, Volume 17, Issue 6, 184–206

https://www.mathnet.ru/eng/aa718

Алгебра и анализ
Том 17 (2005), №6

Посвящается 90-летию со дня рождения
Юрия Владимировича Линника

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$

© О. М. ФОМЕНКО

Вычисляются моменты чисто мнимого порядка величины $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$, $f \in S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))^+$, где $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ — симметрический квадрат L-функции Гекке параболической формы f, $S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))^+$ — множество голоморфных собственных форм Гекке f веса k относительно $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Исследуется (в аспекте по весу) предельное распределение величины $\log L(1, \mathrm{sym}^2 f)$, $f \in S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))^+$ (изучаются предельная функция распределения, предельная характеристическая функция и ее эйлеровское произведение; оценивается скорость сходимости частот к предельному распределению).

В качестве следствия получены новые факты о предельном распределении величины $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$ не только в случае голоморфных собственных форм Гекке f, но и в случае собственных форм Гекке–Маасса f.

§1. Введение. Результаты

Рассмотрим пространство $S_k(\Gamma)$ голоморфных параболических форм

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e(nz)$$

четного веса $k \geqslant 12$ относительно группы $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел, $z = x + iy$, $y > 0$, и $e(\xi) := e^{2\pi i \xi}$; $S_k(\Gamma)^+$ — множество собственных форм Гекке из этого пространства с $a_f(1) = 1$. Известно, что $S_k(\Gamma) = \varnothing$ в случае нечетного k или четного $k < 12$; для

Работа частично поддержана РФФИ (грант 05-01-00930).

четного $k \geqslant 12$ имеем

$$\dim S_k(\Gamma) = \# S_k(\Gamma)^+ = \begin{cases} [k/12], & \text{если } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ [k/12]-1, & \text{если } k \equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Ниже предполагаем, что $f \in S_k(\Gamma)^+$. Положим

$$\lambda_f(n) = a_f(n)/n^{\frac{k-1}{2}};$$

$\lambda_f(n)$ является собственным значением оператора Гекке $T_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ Для простого p имеем (Делинь)

$$\lambda_f(p) = \alpha_f(p) + \overline{\alpha_f(p)}, \quad \alpha_f(p)\overline{\alpha_f(p)} = 1,$$

поэтому

$$\lambda_f(p) = 2\cos\varphi_f(p), \quad \varphi_f(p) \in [0, \pi].$$

Рассмотрим L-функцию Гекке

$$\begin{aligned} L(s, f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s} \\ &= \prod_p (1 - \alpha_f(p)p^{-s})^{-1}(1 - \overline{\alpha_f(p)}p^{-s})^{-1} \\ &= \prod_p (1 - \lambda_f(p)p^{-s} + p^{-2s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \end{aligned}$$

$L(s, f)$ является целой функцией и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа.

Для $f \in S_k(\Gamma)^+$ рассмотрим также симметрический квадрат $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ L-функции Гекке $L(s, f)$:

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \prod_p (1 - \alpha_f(p)^2 p^{-s})^{-1}(1 - p^{-s})^{-1}(1 - \overline{\alpha_f(p)}^2 p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

$L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ является целой функцией и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа. Легко видеть, что

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n^2) n^{-s},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Известно, что $L(1, \mathrm{sym}^2 f) > 0$; более того,

$$\frac{1}{\log k} \ll L(1, \mathrm{sym}^2 f) \ll \log^3 k \tag{1.1}$$

(доказательство оценки снизу, которая является глубоким фактом, см. в [1]).

Сходно определяются автоморфные L-функции для голоморфных параболических форм целого веса $k \geqslant 2$ и ступени N относительно группы $\Gamma_0(N)$; при этом аналогом множества $S_k(\Gamma)^+$ будет $S_k(\Gamma_0(N))^+$, множество новых форм веса k и ступени N относительно $\Gamma_0(N)$.

Автоморфные L-функции вводятся и для параболических собственных форм Гекке–Маасса; заметим, что в этом случае аналог результата Делиня еще не доказан.

В настоящей работе изучается предельное распределение для значений $L(1, \operatorname{sym}^2 f)$, $f \in S_k(\Gamma)^+$, $k \to \infty$. Впервые подобную задачу для L-функций Дирихле рассмотрели С. Човла и П. Эрдеш [2]. Пусть $L(s, \chi_D)$ — L-функция Дирихле с квадратичным характером $\chi_D(n){=}(-D/n)$, где $(-D/n)$ — символ Кронекера. С. Човла и П. Эрдеш доказали, что предел

$$\#\{D, D \leqslant N, L(1, \chi_D) \leqslant x\}/N$$

при $N \to \infty$ существует для всех вещественных значений x и является непрерывной функцией распределения. М. Б. Барбан [3, 4] применил к этой задаче другой метод. Используя неравенство большого решета Ю. В. Линника, он вычислил моменты целого положительного порядка величины $L(1, \chi_D)$. Опираясь на этот результат, М. Б. Барбан нашел характеристическую функцию предельного распределения, однако не доказал своим методом, что предельная функция распределения непрерывна на всей вещественной прямой.

А. С. Файнлейб [5, 6] использовал метод М. Б. Барбана для вычисления моментов чисто мнимого порядка величины $L(1, \chi_D)$. Это позволило исследовать природу предельного распределения для величины $\log L(1, \chi_D)$ (разложить предельную характеристическую функцию в эйлеровское произведение, изучить ее свойства и свойства предельной функции распределения) и, как следствие, более глубоко исследовать предельную функцию распределения, рассмотренную в работах С. Човлы и П. Эрдеша и М. Б. Барбана. В частности, удалось оценить скорость сходимости частот к предельному распределению.

Близкие результаты несколько иным методом получил П. Д. Т. А. Эллиотт [7].

Прогресс в теории автоморфных форм позволил получить сходные предельные законы для автоморфных L-функций. В случае $L(1, \operatorname{sym}^2 f)$ предельные законы были доказаны

1) для собственных форм Гекке–Маасса относительно Γ (в аспекте по дискретному спектру лапласиана) [8];

2) для голоморфных новых форм относительно $\Gamma_0(N)$ (в аспекте по ступени) [9, 10];

3) для голоморфных собственных форм Гекке относительно Γ (в аспекте по весу) [11].

В [12] был получен предельный закон (в аспекте по ступени) для $L(1, f)$, f — голоморфная новая форма относительно $\Gamma_0(N)$. Все эти работы использовали подход Барбана — предельное распределение в них изучалось на основе вычисления моментов целого положительного порядка значений соответствующих L-функций в точке $s = 1$. Это, в свою очередь, требовало доказательства аналогов неравенства большого решета для коэффициентов Фурье параболических форм.

Подход работы [6] (также требующий неравенств типа большого решета) был использован Е. П. Голубевой [13] для получения новых результатов о распределении значений $L(1, f)$ в аспекте по ступени. В работе [13] была также открыта интересная связь p-множителя предельной характеристической функции величины $\log L(1, f)$ с p-адической мерой Планшереля (p-аналогом меры Сато–Тейта); подробнее об этой мере сказано ниже.

В настоящей работе мы, используя подходы из [6] и особенно из [13], исследуем распределение значений $\log L(1, \mathrm{sym}^2 f)$, $f \in S_k(\Gamma)^+$, $k \to \infty$. В качестве следствия, получена значительно более полная (по сравнению с [11]) информация о распределении значений $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$, $f \in S_k(\Gamma)^+$, $k \to \infty$.

Прежде чем формулировать наши результаты, определим общую функцию делителей $d_z(n)$, где z — произвольное комплексное число [14]. Функция $d_z(n)$ вводится соотношением

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_z(n) n^{-s} := \zeta^z(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-z} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1),$$

причем ветвь функции $\zeta^z(s)$ определяется условием

$$\zeta^z(s) = \exp\{z \log \zeta(s)\} = \exp\left(z \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} p^{-js}\right) \quad (\mathrm{Re}\, s > 1).$$

Из определения следует, что $d_z(n)$ является мультипликативной функцией, обобщающей классическую функцию делителей $d_k(n)$ ($k \geqslant 2$ — целое число); напомним, что $d_2(n) =: d(n)$.

Теорема 1. *При* $|w| \leqslant (\log k / \log^2 \log k)^{1/3}$, $w \in \mathbb{R}$, *имеем*

$$\begin{aligned}\widehat{G}_1(w) &:= \frac{1}{\# S_k(\Gamma)^+} \sum_{f \in S_k(\Gamma)^+} L^{iw}(1, \mathrm{sym}^2 f) \\ &= \widehat{G}(w) + O(\exp(-c_1 \log k / \log\log k)),\end{aligned}$$

где

$$\widehat{G}(w)=\prod_p \widehat{G}_p(w)$$

и

$$\widehat{G}_p(w)=\sum_{\substack{m>k\geqslant 0\\ l\geqslant 0}}\frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)d_{iw}(p^l)}{p^{m+k+l}}\Big(\frac{1}{p^{m-k}}-\frac{1}{p^{m-k-1}}\Big)$$
$$+\sum_{m\geqslant 0,l\geqslant 0}\frac{d_{iw}^2(p^m)d_{iw}(p^l)}{p^{2m+l}};$$

c_1 *— положительная константа.*

Теорема 2. 1) *Равномерно для всех вещественных значений x имеет место соотношение*

$$\Big|\frac{\#\{f, f\in S_k(\Gamma)^+, \log L(1,\operatorname{sym}^2 f)\leqslant x\}}{\#S_k(\Gamma)^+}-G(x)\Big|$$
$$\ll(\log^2\log k/\log k)^{1/3},$$

где $G(x)$ — функция распределения, определенная характеристической функцией $\widehat{G}(w)$;

2) *p-множитель $\widehat{G}_p(w)$ характеристической функции $\widehat{G}(w)$ может быть преобразован к виду*

$$\widehat{G}_p(w)=\int_0^\pi\Big(1-\frac{2\cos 2\varphi}{p}+\frac{1}{p^2}\Big)^{-iw}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-iw}\mu_p(\varphi),$$

где мера $\mu_p(\varphi)$ имеет вид

$$\mu_p(\varphi):=\frac{1}{\pi}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\frac{1-\cos 2\varphi}{1-\frac{2\cos 2\varphi}{p}+\frac{1}{p^2}}d\varphi;$$

3) *функция распределения $G(x)$ имеет непрерывную на всей вещественной прямой плотность $p_G(x)$; более того, $G(x)$ может быть аналитически продолжена в некоторую полуплоскость $\operatorname{Im} z>-\delta$, $\delta>0$.*

Аналогичные результаты справедливы для $L(1,\operatorname{sym}^2 f)$ в аспекте по ступени.

Мера $\mu_p(\varphi)$ ранее появилась при изучении распределения углов $\varphi_f(p)$ p-х коэффициентов $\lambda_f(p)$ собственных форм Гекке f [15–18]. Рассмотрим k-аспект. В работах [16, 17] было доказано: если $f\in S_k(\Gamma)^+$, причем $\lambda_f(p)=2\cos\varphi_f(p)$ и $\varphi_f(p)\in[0,\pi]$, то при $k\to\infty$ множество

$$\{\varphi_f(p), f\in S_k(\Gamma)^+\}$$

становится равномерно распределенным по мере $\mu_p(\varphi)$.

Следствие 1. 1) *При $x > 0$ имеет место соотношение*

$$\left|\frac{\#\{f, f \in S_k(\Gamma)^+, L(1, \mathrm{sym}^2 f) \leqslant x\}}{\#S_k(\Gamma)^+} - F(x)\right| \ll (\log^2 \log k / \log k)^{1/3}, \tag{1.2}$$

равномерное по x, где $F(x) = G(\log x)$;

2) *функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей вещественной прямой; более того, она имеет плотность*

$$p_F(x) = \begin{cases} p_G(\log x)\frac{1}{x}, & \textit{если} \quad x > 0, \\ 0, & \textit{если} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Предельный закон (1.2) был доказан в [11], но без оценки скорости сходимости к предельному распределению. Сходимость частот к $F(x)$ при $k \to \infty$ была получена в [11] лишь для точек непрерывности $F(x)$, при этом непрерывность $F(x)$ на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$ не была доказана.

Приведем теперь результаты В. Луо [8]. Пусть $\{f_j(z)\}_{j \geqslant 1}$ — ортонормированный базис Гекке пространства $L_0^2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$, $\mathbb{H} = \{z, z = x + iy, y > 0\}$, состоящий из параболических форм Маасса $f_j(z)$ с собственным значением лапласиана $\lambda_j = 1/4 + t_j^2$ $(t_j \geqslant 0)$, n-м коэффициентом Фурье $a_j(n)$ и собственным значением оператора Гекке T_n $\lambda_j(n)$; $a_j(n) = a_j(1)\lambda_j(n)$. Разложение Фурье формы $f_j(z)$ имеет вид

$$f_j(z) = \cosh^{1/2}(\pi t_j) y^{1/2} \sum_{n \neq 0} a_j(n) K_{it_j}(2\pi |n| y) e(nx),$$

где

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh \tau} \cosh(\nu \tau) d\tau$$

— модифицированная функция Бесселя. В. Луо доказал: при $x > 0$ соотношение

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\#\{j, t_j \leqslant T, L(1, \mathrm{sym}^2 f_j) \leqslant x\}}{\#\{j, t_j \leqslant T\}} = F(x) \tag{1.3}$$

имеет место в каждой точке непрерывности $F(x)$, где $F(x)$ — функция распределения.

С помощью наших результатов можно точнее описать предельное распределение (1.3). Имеет место

Следствие 2. *Функция распределения F из предельного закона Луо* (1.3) *совпадает с функцией распределения F из следствия* 1. *Для F из* (1.3) *справедливы поэтому утверждения п.* 2) *следствия* 1.

Действительно, два набора моментов целого положительного порядка $m = 1, 2, 3, \ldots$, определяющих предельные функции распределения F в (1.2) и F в (1.3), полностью совпадают и оцениваются сверху должным образом [11, 8]. Затем применяется классическая теорема моментов (см., например, леммы 5.1 и 5.7 из обзора М. Б. Барбана [4]), гарантирующая единственность F.

Напрямую, без обращения к голоморфному случаю, уточнить предельный закон (1.3) было бы затруднительно.

Обозначения. К обозначениям, введенным выше, добавим еще несколько. $\mathbb{R}$ означает поле вещественных чисел; $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел; $w \in \mathbb{R}$;
$c', c'', c_2, c_3, c_4, \ldots$ — некоторые положительные постоянные;
ε — сколь угодно малое положительное фиксированное число;
$s = \operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s =: \sigma + it$;

$$S(k \leqslant K) := \bigcup_{\substack{12 \leqslant k \leqslant K \\ k \text{ четное}}} S_k(\Gamma)^+; \quad N_0 := \# S_k(\Gamma)^+; \quad \sum_f \cdots := \sum_{f \in S_k(\Gamma)^+} \ldots$$

§2. Доказательство теоремы 1. Часть 1

В этом параграфе мы приведем леммы, необходимые для доказательства теоремы 1. Введем следующее обозначение: при $\sigma \geqslant 1/2$

$$N(\sigma, H, \operatorname{sym}^2 f) := \#\{\rho = \beta + i\gamma, \quad L(\rho, \operatorname{sym}^2 f) = 0, \quad \beta \geqslant \sigma, \quad |\gamma| \leqslant H\}.$$

Лемма 1. *Для $\sigma \geqslant 3/4$, $K \geqslant 12$ и некоторой положительной константы b имеем*

$$\sum_{f \in S(k \leqslant K)} N(\sigma, \log^3 K, \operatorname{sym}^2 f) \ll_{\varepsilon} K^{b(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Доказательство этой леммы здесь не приводится. Сделаем лишь некоторые пояснения. Образцом для леммы 1 служит аналогичный факт в теории большого решета Ю. В. Линника (см., например, книгу Г. Монтгомери [19]). В. Луо [8] адаптировал классическое доказательство к случаю $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$, где f — параболическая собственная форма Гекке–Маасса. При доказательстве леммы 1 неравенство большого решета для $\{\lambda_f(n^2)\}_{f \in S(k \leqslant K)}$ играет ключевую роль. Приведем это неравенство здесь, отсылая за доказательством к работе автора [11]:

$$\sum_{f \in S(k \leqslant K)} \Big| \sum_{n \leqslant N} a_n \lambda_f(n^2) \Big|^2 \ll_{\varepsilon} \big(N (\log K)^{c_2} + K^5 N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big) \sum_{n \leqslant N} |a_n|^2,$$

где $\{a_n\}_{n \leqslant N}$ — произвольная последовательность комплексных чисел.

Ниже мы выбираем ветвь $\log L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ посредством соотношения

$$\log L(s, \operatorname{sym}^2 f) = \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_f(p)^{2j} + 1 + \overline{\alpha_f(p)}^{2j})}{j p^{js}} \quad (\sigma > 1).$$

Аналогично через соотношение

$$L^z(s, \operatorname{sym}^2 f) = \exp\{z \log L(s, \operatorname{sym}^2 f)\}$$

выбираем ветвь функции $L^z(s, \operatorname{sym}^2 f)$, $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \eta < \frac{1}{2}$, $K \geqslant 12$. *Если* $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ $(f \in S(k \leqslant K))$ *не имеет нулей в прямоугольнике*

$$1 - \eta \leqslant \sigma < 1, \quad |t| \leqslant \log^3 K,$$

то в прямоугольнике

$$1 - \eta/2 \leqslant \sigma < 1, \quad |t| \leqslant \log^2 K$$

справедлива оценка

$$\log L(s, \operatorname{sym}^2 f) = O(\log^{c_3(1-\sigma)} K \cdot \log\log K).$$

Доказательство леммы основано на использовании теоремы Бореля–Каратеодори и теоремы Адамара о трех кругах. См. доказательство сходной леммы работы [3, лемма 3].

Определим коэффициенты $\nu(n, w, f)$ следующим разложением:

$$L^{iw}(s, \operatorname{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n, w, f)}{n^s} \quad (\sigma > 1). \tag{2.1}$$

Лемма 3. *Пусть* $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$, $f \in S_k(\Gamma)^+$, *не имеет нулей в прямоугольнике*

$$1 - \eta \leqslant \sigma < 1, \quad |t| \leqslant \log^3 k.$$

Тогда при $|w| \leqslant \log k / \log^2 \log k$ *имеем*

$$L^{iw}(1, \operatorname{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n, w, f)}{n} \exp(-n/k)$$
$$+ O\Big(\exp\Big(\frac{-c' \log k}{\log\log k} + c''|w| \log\log k \Big)\Big).$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n, w, f)}{n} \exp(-n/k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} L^{iw}(s+1, \operatorname{sym}^2 f) \Gamma(s) k^s ds.$$

По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1)} L^{iw}(s+1,\operatorname{sym}^2 f)\Gamma(s)k^s ds = L^{iw}(1,\operatorname{sym}^2 f) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^{iw}(s+1,\operatorname{sym}^2 f)\Gamma(s)k^s ds,$$

где γ — ломаная с вершинами в точках

$$\begin{array}{ll} (\log\log k)^{-1} - i\infty, & (\log\log k)^{-1} - i\log^2 k, \\ -(\log\log k)^{-1} - i\log^2 k, & -(\log\log k)^{-1} + i\log^2 k, \\ (\log\log k)^{-1} + i\log^2 k, & (\log\log k)^{-1} + i\infty. \end{array}$$

Последний интеграл оцениваем с помощью леммы 2 и известных оценок для $\Gamma(s)$. •

Лемма 4. *Пусть $f \in S_k(\Gamma)^+$. При $|w| \leqslant \log k/\log^2\log k$ имеем*

$$L^{iw}(1,\operatorname{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n,w,f)}{n}\exp(-n/k) + O(\exp(c_4\log k/\log\log k)).$$

Доказательство леммы довольно просто; см. доказательство аналогичного результата в работе [13, лемма 4].

Лемма 5. *Пусть $\delta(n) = n^{1/2}\log^2 n$. Имеет место соотношение*

$$\sum_f \lambda_f(n) = \begin{cases} N_0\frac{1}{n_1^{1/2}} + O(\delta(n)), & \text{если } n = n_1^2, \\ O(\delta(n)), & \text{если } n \neq n_1^2. \end{cases}$$

Доказательство, использующее формулу следа Айхлера–Сельберга, см. в работах [16, 17].

§3. Доказательство теоремы 1. Часть 2

Вычислим коэффициенты $\nu(n,w,f)$ из (2.1). При $\sigma > 1$ имеем

$$L^{iw}(s,\operatorname{sym}^2 f) = \prod_p \sum_{\substack{m\geqslant 0, k\geqslant 0\\ l\geqslant 0}} \frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)d_{iw}(p^l)\alpha_f(p)^{2m}\overline{\alpha_f(p)}^{2k}}{p^{(m+k+l)s}}.$$

Последнее произведение можно записать в виде

$$\prod_p \Bigg\{ \sum_{\substack{m>k\geqslant 0\\ l\geqslant 0}} \frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)d_{iw}(p^l)\big(\alpha_f(p)^{2(m-k)}+\overline{\alpha_f(p)}^{2(m-k)}\big)}{p^{(m+k+l)s}} + \sum_{m\geqslant 0, l\geqslant 0} \frac{d_{iw}^2(p^m)d_{iw}(p^l)}{p^{(2m+l)s}} \Bigg\}.$$

Известна формула

$$\lambda_f(p^\nu) = \frac{\alpha_f(p)^{\nu+1} - \overline{\alpha_f(p)}^{\nu+1}}{\alpha_f(p) - \overline{\alpha_f(p)}},$$

в силу которой при $m-k \geqslant 2$ имеем

$$\alpha_f(p)^{m-k} + \overline{\alpha_f(p)}^{m-k} = \lambda_f(p^{m-k}) - \lambda_f(p^{m-k-2}).$$

Таким образом,

$$L^{iw}(s,\mathrm{sym}^2 f) = \prod_p \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu(p^r,w,f)}{p^{rs}} \right)$$
$$= \prod_p \Bigg\{ \sum_{\substack{m>k\geqslant 0\\ l\geqslant 0}} \frac{d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)d_{iw}(p^l)}{p^{(m+k+l)s}} \big(\lambda_f(p^{2(m-k)}) - \lambda_f(p^{2(m-k)-2})\big) + \sum_{m\geqslant 0, l\geqslant 0} \frac{d_{iw}^2(p^m)d_{iw}(p^l)}{p^{(2m+l)s}} \Bigg\}.$$

Поэтому имеем

$$\nu(n,w,f) = \prod_{p^r \| n} \nu(p^r,w,f),$$

где

$$\nu(p^r,w,f) = 1, \quad \text{если} \quad r=0;$$
$$\nu(p^r,w,f) = d_{iw}(p)\lambda_f(p^2), \quad \text{если} \quad r=1;$$
$$\nu(p^r,w,f) = \sum_{\substack{m>k\geqslant 0, l\geqslant 0\\ m+k+l=r}} d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)d_{iw}(p^l)\big(\lambda_f(p^{2(m-k)}) - \lambda_f(p^{2(m-k)-2})\big) + \sum_{\substack{m\geqslant 0, l\geqslant 0\\ 2m+l=r}} d_{iw}^2(p^m)d_{iw}(p^l),$$

если $r \geqslant 2$.

Из леммы 1 следует, что количество $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$, $f \in S_k(\Gamma)^+$, имеющих нуль в прямоугольнике

$$1 - \eta \leqslant \sigma < 1, \quad |t| \leqslant \log^3 k,$$

оценивается как $O(k^{1-\theta})$, если величина η достаточно мала; здесь θ — некоторое положительное число. Поэтому, в силу лемм 3 и 4, при $|w| \leqslant c_5 \log k / \log^2 \log k$ имеем

$$\sum_f L^{iw}(1, \operatorname{sym}^2 f) = \sum_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n,w,f)}{n} \exp(-n/k) + O(k \exp(-c_6 \log k / \log\log k)). \tag{3.1}$$

Пользуясь значениями коэффициентов $\nu(n,w,f)$ и леммой 5, получаем

$$\sum_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n,w,f)}{n} \exp(-n/k) = N_0 \sum\nolimits_1 + O\Big(\sum\nolimits_2\Big), \tag{3.2}$$

где

$$\sum\nolimits_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n,w)}{n} \exp(-n/k),$$

$$\frac{A(n,w)}{n} = \prod_{p^r \| n} \frac{A(p^r, w)}{p^r} = \prod_{p^r \| n} \Bigg(\sum_{\substack{m > k \geqslant 0, l \geqslant 0 \\ m+k+l=r}} \frac{d_{iw}(p^m) d_{iw}(p^k) d_{iw}(p^l)}{p^{m+k+l}} \Big(\frac{1}{p^{m-k}} - \frac{1}{p^{m-k-1}}\Big) + \sum_{\substack{m \geqslant 0, l \geqslant 0 \\ 2m+l=r}} \frac{d_{iw}^2(p^m) d_{iw}(p^l)}{p^{2m+l}} \Bigg);$$

$$\sum\nolimits_2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(n) d_3^2(n)}{n} \exp(-n/k) \times \prod_{p^r \| n} \Bigg(\sum_{\substack{m \geqslant k \geqslant 0, l \geqslant 0 \\ m+k+l=r}} d_{|w|}(p^m) d_{|w|}(p^k) d_{|w|}(p^l) \Bigg), \tag{3.3}$$

где

$$\delta(n) = n^{1/2} \log^2 n.$$

Докажем сходимость ряда

$$\widehat{G}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n,w)}{n}. \tag{3.4}$$

Его p-множитель $\widehat{G}_p(w)$ имеет вид

$$\widehat{G}_p(w) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A(p^r, w)}{p^r} = 1 + \frac{d_{iw}(p)p^{-1}}{p} + \frac{A(p^2, w)}{p^2} + \sum_{r \geqslant 3}^{\infty} \frac{A(p^r, w)}{p^r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A'(p^r, w)}{p^r},$$

где

$$\begin{aligned} A'(p^0, w) &= 1, \\ A'(p, w) &= 0, \\ A'(p^2, w) &= d_{iw}(p) + A(p^2, w), \\ A'(p^r, w) &= A(p^r, w) \quad (r \geqslant 3). \end{aligned}$$

Напомним формулу для $d_z(n)$ [14]:

$$d_z(p^\alpha) = \frac{z(z+1)\dots(z+\alpha-1)}{\alpha!};$$

по мультипликативности

$$d_z(n) = \prod_{p^\alpha \| n} \frac{z(z+1)\dots(z+\alpha-1)}{\alpha!}.$$

С помощью этой формулы получаем

$$|A'(p^2, w)| \leqslant |w| + |A(p^2, w)| \leqslant \begin{cases} \sum\limits_{m+k+l=2} d_{|w|}(p^m)d_{|w|}(p^k)d_{|w|}(p^l) = d_{3|w|}(p^2), & \text{если } |w| \geqslant 1, \\ \sum\limits_{m+k+l+f=2} d_{|w|}(p^m)d_{|w|}(p^k)d_{|w|}(p^l)d_{|w|}(p^f) = d_{4|w|}(p^2), & \text{если } |w| < 1; \end{cases}$$

для $r \geqslant 3$

$$|A'(p^r, w)| \leqslant \sum_{m+k+l=r} d_{|w|}(p^m)d_{|w|}(p^k)d_{|w|}(p^l) = d_{3|w|}(p^r), \quad \text{если } |w| \geqslant 0.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'(n, w)}{n} = \prod_p \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{A'(p^r, w)}{p^r} \right). \tag{3.5}$$

По доказанному выше,

$$|A'(n, w)| \leqslant \begin{cases} d_{3|w|}(n), & \text{если } |w| \geqslant 1, \\ d_{4|w|}(n), & \text{если } |w| < 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$A'(n,w) \underset{\varepsilon,|w|}{\ll} n^{\varepsilon}.$$

Суммирование слева в (3.5) идет на самом деле по квадратополным числам n, т. е. по числам n, обладающим свойством: $p|n \Rightarrow p^2|n$ для всех p. Их количество в интервале $n \leqslant x$ равно

$$\frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}x^{1/2} + O(x^{1/3}).$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'(n,w)}{n}$$

сходится, а с ним сходится и ряд (3.4).

Ниже мы для определенности будем предполагать, что $|w| \geqslant 1$. Мы также предполагаем пока, что $|w| \leqslant \log k/\log^2 \log k$.

Разбивая интервал суммирования для $\sum_1$ на части $(n \leqslant k^{1/2}, n > k^{1/2})$, имеем

$$\sum\nolimits_1 = \widehat{G}(w) + O\biggl(\sum_{n>k^{1/2}} \frac{|A(n,w)|}{n}\biggr)$$
$$+ O\biggl(\frac{1}{k^{1/2}} \sum_{n\leqslant k^{1/2}} \frac{|A(n,w)|}{n}\biggr) =: \widehat{G}(w) + O\Bigl(\sum\nolimits_3\Bigr) + O\Bigl(\sum\nolimits_4\Bigr).$$

Оценим сумму $\sum_3$. Имеем

$$\sum\nolimits_3 \leqslant \frac{1}{k^{\frac{1}{2}\eta'}} \sum_{n>k^{1/2}} \frac{|A(n,w)|}{n^{1-\eta'}} \leqslant \frac{1}{k^{\frac{1}{2}\eta'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A(n,w)|}{n^{1-\eta'}},$$

где $\eta' = \log^{-1}\log k$. Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A(n,w)|}{n^{1-\eta'}} = \prod_p \Bigl(1 + \frac{|A(p,w)|}{p^{1-\eta'}} + \frac{|A(p^2,w)|}{p^{2(1-\eta')}} + \dots\Bigr)$$
$$\leqslant \prod_p \Bigl(1 + \frac{|w| + |A(p^2,w)|}{p^{2(1-\eta')}} + \frac{|A(p^3,w)|}{p^{3(1-\eta')}} + \dots\Bigr),$$

имеем
$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A(n,w)|}{n^{1-\eta'}} &\leqslant \prod_p \left(\left(1 - \frac{1}{p^{1-\eta'}}\right)^{-3|w|} - \frac{3|w|}{p^{1-\eta'}} \right) \\
&= \prod_{p<|w| \log\log k} \left(\left(1 - \frac{1}{p^{1-\eta'}}\right)^{-3|w|} - \frac{3|w|}{p^{1-\eta'}} \right) \\
&\quad \times \prod_{p \geqslant |w| \log\log k} \left(\left(1 - \frac{1}{p^{1-\eta'}}\right)^{-3|w|} - \frac{3|w|}{p^{1-\eta'}} \right) \\
&=: \prod\nolimits_1 \cdot \prod\nolimits_2 .
\end{aligned}
$$

Оцениваем $\prod_1$:
$$
\begin{aligned}
\prod\nolimits_1 &\leqslant \prod_{p<|w| \log\log k} \exp\left(-3|w| \log\left(1 - \frac{1}{p^{1-\eta'}}\right)\right) \\
&\leqslant \prod_{p<|w| \log\log k} \exp(c_7 |w| / p^{1-\eta'}) \\
&\ll \exp\left(c_7 |w| \sum_{p<|w| \log\log k} 1/p^{1-\eta'} \right) \\
&\ll \exp\left(c_8 |w| \sum_{p<|w| \log\log k} 1/p \right) \\
&\ll \exp(c_9 |w| \log\log\log k) \\
&\ll \exp(c_9 \log k \cdot \log\log\log k / \log^2 \log k).
\end{aligned}
$$

Оцениваем $\prod_2$. Применяя неравенство
$$
d_{|w|}(p^l) \leqslant |w|^l \quad (|w| \geqslant 1),
$$
имеем
$$
\begin{aligned}
\prod\nolimits_2 &\leqslant \prod_{p \geqslant |w| \log\log k} \left(1 + O\left(\frac{|w|^2}{p^{2(1-\eta')}}\right)\right) \\
&\ll \prod_{p \geqslant |w| \log\log k} \exp(c_{10} |w|^2 / p^{2(1-\eta')}) \\
&\ll \exp\left(c_{10} |w|^2 \sum_{p \geqslant |w| \log\log k} 1/p^{2(1-\eta')} \right) \\
&\ll \exp(c_{11} |w|^{1+2\eta'} / \log\log k) \\
&\ll \exp(c_{12} |w| / \log\log k) \ll \exp(c_{12} \log k / \log^3 \log k).
\end{aligned}
$$

Используя полученные оценки для $\prod_1$ и $\prod_2$, имеем

$$\sum\nolimits_3 \ll \exp(-c_{13}\log k/\log\log k).$$

Переходим к сумме $\sum_4$, при оценивании которой нам придется предположить, что

$$|w| \leqslant \left(\frac{\log k}{\log^2\log k}\right)^{1/3}.$$

Член

$$\frac{|A(n,w)|}{n} = \prod_{p\|n} \frac{|A(p,w)|}{p} \cdot \prod_{\substack{p^r\|n\\ r\geqslant 2}} \frac{|A(p^r,w)|}{p^r}$$

представим в виде

$$\frac{|A(n,w)|}{n} = \prod_{p\|n} \frac{|w|p^{-1}}{p} \cdot \prod_{\substack{p^r\|n\\ r\geqslant 2}} \frac{|A(p^r,w)|}{p^r},$$

откуда следует неравенство

$$\sum\nolimits_4 \leqslant \frac{1}{k^{1/2}} \sum_{n_0\leqslant k} \frac{C(n_0,w)}{n_0}.$$

Суммирование $\sum\limits_{n_0\leqslant k}\cdots$ идет по квадратополным $n_0 \leqslant k$ и $C(n_0,w) \leqslant 2 \times d_{3|w|}(n_0)$. Каждое квадратополное число n_0 представимо в виде $n_0 = a^3b^2$, где $\mu^2(a) = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_4 &\ll k^{-1/2} \sum_{n_0\leqslant k^{1/2}} \frac{d_{3|w|}(n_0)}{n_0} + k^{-1/2} \sum_{k^{1/2}<n_0\leqslant k} \frac{d_{3|w|}(n_0)}{n_0} \\
&\ll k^{-1/2} \sum_{n_0\leqslant k^{1/2}} d_{3|w|}(n_0) + k^{-1} \sum_{n_0\leqslant k} d_{3|w|}(n_0) \\
&\ll k^{-1/2}\Bigg(\sum_{n\leqslant k^{1/6}} d^3_{3|w|}(n)\Bigg)\Bigg(\sum_{n\leqslant k^{1/4}} d^2_{3|w|}(n)\Bigg) \\
&\quad + k^{-1}\Bigg(\sum_{n\leqslant k^{1/3}} d^3_{3|w|}(n)\Bigg)\Bigg(\sum_{n\leqslant k^{1/2}} d^2_{3|w|}(n)\Bigg) \\
&=: k^{-1/2} I_1 \cdot I_2 + k^{-1} I_3 \cdot I_4.
\end{aligned}$$

Приведем неравенство К. К. Марджанишвили [20]: при $x \geqslant 1$ и целых $l \geqslant 1$ и $\alpha \geqslant 2$

$$x^{-1} \sum_{1\leqslant m\leqslant x} d^l_\alpha(m) < A^{(l)}_\alpha (\log x + \alpha^l - 1)^{\alpha^l - 1},$$

где

$$A_\alpha^{(l)} := \frac{\alpha^l}{(\alpha!)^{(\alpha^l-1)/(\alpha-1)}}.$$

Пользуясь этим неравенством, имеем

$$I_1 \ll k^{1/6}(\log k + |3w|^3)^{|3w|^3} \ll k^{1/6}\exp(c_{14}\log k/\log\log k),$$
$$I_1 I_2 \ll k^{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}\exp(c_{15}\log k/\log\log k),$$
$$I_3 I_4 \ll k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\exp(c_{16}\log k/\log\log k).$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_4 \ll k^{-1/12}\exp(c_{17}\log k/\log\log k).$$

Следовательно, при $|w| \leqslant (\log k/\log^2\log k)^{1/3}$

$$\sum\nolimits_1 = \widehat{G}(w) + O(\exp(-c_{13}\log k/\log\log k)). \tag{3.6}$$

Обратимся, наконец, к сумме $\sum_2$ (3.3). Можно предположить, что $|w| \leqslant \log k/\log^2\log k$. Имеем

$$\prod_{p^r\| n}\Bigg(\sum_{\substack{m\geqslant k\geqslant 0, l\geqslant 0\\ m+k+l=r}} d_{|w|}(p^m)d_{|w|}(p^k)d_{|w|}(p^l)\Bigg) \leqslant d_{3|w|}(n),$$

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &\ll \sum_{n\geqslant 1} n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^2 d_3^2(n)d_{3|w|}(n)\exp(-n/k)\\ &\ll_\varepsilon \sum_{n\leqslant k\log^2 k} n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}d_{3|w|}(n) + k^{-1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{d_{3|w|}(n)}{n^2}\\ &=: S_1 + S_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{n\leqslant k\log^2 k} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\frac{d_{3|w|}(n)}{n} \ll k^{\frac{51}{100}}\prod_{p\leqslant k\log^2 k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-3|w|}\\ &\ll k^{\frac{51}{100}}\exp\Bigg(c_{18}|w|\sum_{p\leqslant k\log^2 k} 1/p\Bigg) \ll k^{\frac{51}{100}}\exp(c_{19}\log k/\log\log k);\end{aligned}$$

$$S_2 \ll k^{-1}c_{20}^{|w|}.$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_2 \ll k^{\frac{51}{100}}\exp(c_{19}\log k/\log\log k). \tag{3.7}$$

Собирая соотношения (3.1), (3.2), (3.6) и (3.7), доказываем теорему 1 в случае $|w| \geqslant 1$. Для $|w| < 1$ доказательство аналогично, но проще. •

§4. Доказательство теоремы 2

Докажем сначала п. 2) теоремы 2.

Лемма 6.

$$\widehat{G}_p(w)=\int_0^\pi\Big(1-\frac{2\cos2\varphi}{p}+\frac{1}{p^2}\Big)^{-iw}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-iw}\mu_p(\varphi).$$

Доказательство. Преобразуем интеграл к виду, указанному в теореме 1. Имеем

$$\frac{1+p^{-1}}{\pi}\int_0^\pi\frac{(1-\cos2\varphi)d\varphi}{\big(1-\frac{2\cos2\varphi}{p}+\frac{1}{p^2}\big)\big(1-\frac{2\cos2\varphi}{p}+\frac{1}{p^2}\big)^{iw}\big(1-\frac{1}{p}\big)^{iw}}$$
$$=\frac{1+p^{-1}}{\pi}\int_0^\pi(1-\cos2\varphi)\sum_{j=0}^\infty\frac{\exp(2ij\varphi)}{p^j}\sum_{n=0}^\infty\frac{\exp(-2in\varphi)}{p^n}$$
$$\times\sum_{m=0}^\infty\frac{d_{iw}(p^m)\exp(2im\varphi)}{p^m}\sum_{k=0}^\infty\frac{d_{iw}(p^k)\exp(-2ik\varphi)}{p^k}\sum_{l=0}^\infty\frac{d_{iw}(p^l)}{p^l}d\varphi.$$

Вычислим коэффициент при $d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)d_{iw}(p^l)$, где $m>k\geqslant0$, $l\geqslant0$; он равен

$$\frac{2(1+p^{-1})}{\pi p^{m+k+l}}\int_0^\pi(1-\cos2\varphi)\cos((2m-2k)\varphi)$$
$$\times\Bigg(2\sum_{r=1}^\infty\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant0\\ j+n=r}}\cos((2j-2n)\varphi)+\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{p^{2r}}\Bigg)d\varphi.$$

Используя тот факт, что

$$\int_0^\pi\cos(t\varphi)d\varphi=\begin{cases}\pi, & \text{если } t=0,\\ 0, & \text{если } t\neq0,\end{cases}$$

имеем

$$\frac{2(1+p^{-1})}{\pi p^{m+k+l}}\int\limits_0^\pi 1\cdot\cos((2m-2k)\varphi)$$
$$\times\Bigg(2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos((2j-2n)\varphi)+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^{2r}}\Bigg)d\varphi$$
$$=\frac{2(1+p^{-1})}{p^{m+k+l}}\frac{1}{p^{m-k}}\frac{1}{1-p^{-2}}. \tag{4.1}$$

Сходно,

$$-\frac{2(1+p^{-1})}{\pi p^{m+k+l}}\int\limits_0^\pi \cos 2\varphi\cdot\cos((2m-2k)\varphi)$$
$$\times\Bigg(2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos((2j-2n)\varphi)+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^{2r}}\Bigg)d\varphi$$
$$=-\frac{1+p^{-1}}{\pi p^{m+k+l}}\int\limits_0^\pi(\cos((2m-2k+2)\varphi)+\cos((2m-2k-2)\varphi))$$
$$\times\Bigg(2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p^r}\sum_{\substack{j>n\geqslant 0\\ j+n=r}}\cos((2j-2n)\varphi)+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{p^{2r}}\Bigg)d\varphi$$
$$=-\frac{1}{p^{m+k+l}}\bigg(\frac{1}{p^{m-k+1}}+\frac{1}{p^{m-k-1}}\bigg)\frac{1}{1-p^{-1}}. \tag{4.2}$$

Складывая (4.1) и (4.2), находим, что коэффициент при $d_{iw}(p^m)d_{iw}(p^k)$ $\times d_{iw}(p^l)$, где $m>k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$, равен

$$\frac{1}{p^{m+k+l}}\bigg(\frac{1}{p^{m-k}}-\frac{1}{p^{m-k-1}}\bigg).$$

Аналогичные вычисления показывают, что коэффициент при $d_{iw}^2(p^m)$ $\times d_{iw}(p^l)$, где $m\geqslant 0$, $l\geqslant 0$, равен

$$\frac{1}{p^{2m+l}}.$$

Лемма 6 доказана. •

Нам потребуется еще несколько лемм.

Лемма 7. *При $|w| \geqslant C$, где константа $C > 0$ достаточно велика, имеем*

$$\widehat{G}(w) = O(\exp(-c_{21}|w|/\log^2|w|)).$$

Доказательство. Сначала в предположении $p \geqslant |w|\log|w|$ получим соотношение

$$\widehat{G}_p(w) = \exp\Big(-w^2/2p^2 + O\Big(\frac{|w|}{p^2} + \frac{|w|^3}{p^3}\Big)\Big). \tag{4.3}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\widehat{G}_p(w) = 1 &+ \frac{iw + d_{iw}(p^2)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right) + d_{iw}^2(p)\left(\frac{1}{p}-1\right)}{p^2} \\ &+ \frac{d_{iw}^2(p) + d_{iw}(p^2)}{p^2} + O\Big(\sum_{r\geqslant 3}\frac{d_{3|w|}(p^r)}{p^r}\Big) \\ &= 1 + \frac{iw}{p^2} + \frac{iw(iw+1)}{2p^2} + O\Big(\frac{|w|^3}{p^3}\Big) \\ &= 1 - \frac{w^2}{2p^2} + \frac{3}{2}\frac{iw}{p^2} + O\Big(\frac{|w|^3}{p^3}\Big),\end{aligned}$$

откуда сразу следует (4.3).

Имеем

$$|\widehat{G}(w)| = \Big|\prod_{p<|w|\log|w|}\widehat{G}_p(w)\Big|\cdot\Big|\prod_{p\geqslant|w|\log|w|}\widehat{G}_p(w)\Big| =: \prod{}'\cdot\prod{}''.$$

По лемме 6,

$$\begin{aligned}\prod{}' &\leqslant \prod_{p<|w|\log|w|}\frac{1+p^{-1}}{(1-p^{-1})^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi \\ &= \prod_{p<|w|\log|w|}\frac{1-p^{-2}}{(1-p^{-1})^3} \ll \log^3|w|.\end{aligned}$$

По (4.3),

$$\begin{aligned}\prod{}'' &\ll \exp\Big(-\frac{w^2}{2}\sum_{p\geqslant|w|\log|w|}\frac{1}{p^2} + c_{22}|w|\sum_{p\geqslant|w|\log|w|}\frac{1}{p^2} + c_{23}|w|^3\sum_{p\geqslant|w|\log|w|}\frac{1}{p^3}\Big) \\ &\ll \exp(-c_{21}|w|/\log^2|w|).\end{aligned}$$

Лемма доказана. •

Лемма 8. 1) *При* $|w| \leqslant c/\log\log k$, *где* $c > 0$ — *достаточно малая константа, имеем*

$$\widehat{G}_1(w) = \frac{1}{N_0}\sum_f L^{iw}(1, \mathrm{sym}^2 f) = 1 + O(|w|\log\log k);$$

2) *при* $|w| \leqslant \frac{1}{8}$ *имеем*

$$\widehat{G}(w) = 1 + O(|w|).$$

Доказательство. П. 1) доказывается с помощью равенства

$$L^{iw}(1, \mathrm{sym}^2 f) = 1 + iw\log L(1, \mathrm{sym}^2 f) + \dots$$

и оценки

$$\log L(1, \mathrm{sym}^2 f) = O(\log\log k),$$

являющейся следствием (1.1).

П. 2) есть очевидное следствие оценки

$$|\widehat{G}_p(w) - 1| \leqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-4|w|} - 1 - \frac{4|w|}{p} = \sum_{r\geqslant 2}\frac{d_{4|w|}(p^r)}{p^r} \leqslant 8|w|/p^2,$$

где $p \geqslant 2$ — любое простое число. •

Наконец, нам потребуется следующая лемма, в которой оценивается близость распределений по разности их характеристических функций.

Лемма 9. *Пусть* $G^*(x)$, $G(x)$ — *функции распределения,* $\widehat{G}^*(w)$, $\widehat{G}(w)$ — *соответствующие характеристические функции. Тогда при любом* $T > 0$

$$\sup_x |G^*(x) - G(x)| \ll \sup_{\xi\geqslant T}\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}|\widehat{G}(w)|dw + \int_0^T \frac{|\widehat{G}^*(w) - \widehat{G}(w)|}{w}dw.$$

Доказательство этого обобщения известного неравенства Эссеена можно найти в [21].

Переходим к доказательству п. 1) теоремы 2. Рассмотрим функции распределения (частоты)

$$G_1(x) := \frac{\#\{f, f \in S_k(\Gamma)^+, \log L(1, \mathrm{sym}^2 f) \leqslant x\}}{N_0}$$

и соответствующие характеристические функции

$$\widehat{G}_1(w) = \frac{1}{N_0}\sum_f L^{iw}(1, \mathrm{sym}^2 f).$$

Напомним, что $k \geqslant 12$, $k \equiv 0 \pmod 2$. Из теоремы 1 следует, что функция $\widehat{G}(w)$ является пределом характеристических функций $\widehat{G}_1(w)$ при $k \to \infty$. Из доказанного выше следует также, что $\widehat{G}(w)$ непрерывна. Поэтому $\widehat{G}(w)$ является характеристической функцией некоторой функции распределения $G(x)$. По лемме 9,

$$G_1(x) = G(x) + O\biggl(\sup_{\xi \geqslant T} \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |\widehat{G}(w)| dw\biggr) + O\biggl(\int_0^T \frac{|\widehat{G}_1(w) - \widehat{G}(w)|}{w} dw\biggr),$$

где

$$T := (\log k / \log^2 \log k)^{1/3}.$$

По лемме 7,

$$\sup_{\xi \geqslant T} \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |\widehat{G}(w)| dw \ll \frac{1}{T}.$$

Разобьем интеграл $\int_0^T \ldots$ на два:

$$\int_0^T \frac{|\widehat{G}_1(w) - \widehat{G}(w)|}{w} dw$$

$$= \int_0^{(\log k)^{-1}} \frac{|\widehat{G}_1(w) - \widehat{G}(w)|}{w} dw + \int_{(\log k)^{-1}}^T \frac{|\widehat{G}_1(w) - \widehat{G}(w)|}{w} dw.$$

По лемме 8,

$$\int_0^{(\log k)^{-1}} \frac{|\widehat{G}_1(w) - \widehat{G}(w)|}{w} dw \ll \frac{\log \log k}{\log k}.$$

По теореме 1,

$$\int_{(\log k)^{-1}}^T \frac{|\widehat{G}_1(w) - \widehat{G}(w)|}{w} dw \ll \exp(-c_{24} \log k / \log \log k).$$

П. 1) доказан.

Докажем п. 3) теоремы. По лемме 7,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{G}(w)| dw < \infty;$$

следовательно, функция распределения $G(x)$ имеет непрерывную на всей вещественной прямой плотность

$$p_G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}(w) e^{-iwx} dw.$$

Утверждение об аналитической продолжимости $G(x)$ в некоторую полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > -\delta$, $\delta > 0$, доказывается с помощью соображений работы [7, с. 195]. •

Список литературы

[1] Hoffstein J., Lockhart P., *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero* (*with an appendix by D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, An effective zero free region*), Ann. of Math. (2) **140** (1994), 161–181.

[2] Chowla S., Erdös P., *A theorem on the distribution of values of L-functions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **15** (1951), 11–18.

[3] Барбан М. Б., *„Большое решето" Ю. В. Линника и предельная теорема для числа классов идеалов мнимого квадратичного поля*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **26** (1962), №4, 573–580.

[4] Барбан М. Б., *Метод „большого решета" и его применения в теории чисел*, Успехи мат. наук **21** (1966), №1, 51–102.

[5] Файнлейб А. С., *О предельной теореме для числа классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя*, Докл. АН СССР **184** (1969), №5, 1048–1049.

[6] Файнлейб А. С., *О распределении числа классов положительных квадратичных форм*, Науч. тр. Ташкент. ун-та, вып. 418, Ташкент, 1972, с. 272–279.

[7] Elliott P. D. T. A., *The distribution of the quadratic class number*, Лит. мат. сб. **10** (1970), №1, 189–197.

[8] Luo W., *Values of symmetric square L-functions at* 1, J. Reine Angew. Math. **506** (1999), 215–235.

[9] Royer E., *Statistique de la variable aléatoire* $L(\mathrm{sym}^{(2)} f, 1)$, Math. Ann. **321** (2001), no. 3, 667–687.

[10] Фоменко О. М., *Поведение автоморфных L-функций в точках* $s = 1$ *и* $s = 1/2$, Зап. науч. семин. ПОМИ **302** (2003), 149–167.

[11] Фоменко О. М., *Автоморфные L-функции в аспекте по весу*, Зап. науч. семин. ПОМИ **314** (2004), 221–246.

[12] Фоменко О. М., *О распределении значений* $L(1, f)$, Зап. науч. семин. ПОМИ **302** (2003), 135–148.

[13] Голубева Е. П., *Распределение значений L-функций Гекке в точке* 1, Зап. науч. семин. ПОМИ **314** (2004), 15–32.

[14] Ivić A., *The Riemann zeta-function*, Wiley, New York etc., 1985.

[15] Sarnak P., *Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators*, Analytic Number Theory and Diophantine Problems (Stillwater, OK, 1984), Progr. Math., vol. 70, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, pp. 321–331.

[16] Serre J.-P., *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke* T_p, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102.

[17] Conrey J. B., Duke W., Farmer D. W., *The distribution of the eigenvalues of Hecke operators*, Acta Arith. **78** (1997), no. 4, 405–409.

[18] Голубева Е. П., *Распределение собственных чисел операторов Гекке*, Зап. науч. семин. ПОМИ **314** (2004), 33–40.

[19] Монтгомери Г., *Мультипликативная теория чисел*, Мир, М., 1974.

[20] Марджанишвили К. К., *Оценка одной арифметической суммы*, Докл. АН СССР **22** (1939), №7, 391–393.

[21] Файнлейб А. С., *Обобщение неравенства Эссеена и его применение в вероятностной теории чисел*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **32** (1968), №4, 859–879.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 10 марта 2005 г.