УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак

Институт машиноведения УрО РАН,
620219, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

E-mails: fedotov@imach.uran.ru, lfs@imach.uran.ru

Предложен метод решения задач деформирования нелинейно-упругого тела. На основе модифицированного метода граничных элементов разработан алгоритм определения нелинейной области и итерационная процедура определения напряжённо-деформированного состояния в ней. Процедура является последовательностью вычислений по полученным аналитическим формулам, из которой исключено интегрирование по области.

Ключевые слова: *граничные элементы, аналитические вычисления, нелинейно-упругая деформация.*

1. Задача нелинейно-упругого деформирования. Рассмотрим задачу определения вектора перемещений u_i, тензора деформаций ε_{ij} и тензора напряжений σ_{ij}, которые удовлетворяют в плоской области Ω системе уравнений:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2}$$

определяющим уравнениям:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{3}$$

— в линейно-упругой области,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^a = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ij}^a \tag{4}$$

— в нелинейно-упругой и граничным условиям:

на поверхности S_f:

$$\sigma_{ij}n_j = f_i^*, \tag{5}$$

на поверхности S_u:

$$u_i = u_i^*. \tag{6}$$

Здесь b_i — известные массовые силы; $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$; $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль упругости при сдвиге; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — единичный тензор; n_i — вектор внешней нормали к поверхности; f_i^*

Федотов Владимир Петрович — зав. лабораторией прикладной механики отдела механики машин и технологий ИМАШ УрО РАН; д.т.н., профессор.
Спевак Лев Фридрихович — старший научный сотрудник отдела механики машин и технологий ИМАШ УрО РАН; доцент, к.т.н.

и u_i^* — известные граничные значения поверхностных напряжений и перемещений; σ_{ij}^a — «начальные» напряжения [1], действующие в той части области Ω, где имеют место нелинейные деформации; в каждой задаче σ_{ij}^a задаётся конкретным выражением, соответствующим свойствам материала. Деформации в нелинейной области предполагаются малыми.

Целью решения задачи является определение зоны нелинейной деформации. Для решения нелинейных задач механики используются различные подходы, но все они требуют дискретизации области нелинейности, что делает метод граничных элементов соизмеримым по затратам с методом конечных элементов. Ниже предлагается модификация МГЭ, позволяющая свести решение к итерационной процедуре, не использующей разбиения области нелинейности.

2. Алгоритм решения. Выведем для задачи (1)–(6) граничные интегральные уравнения аналогично тому, как это было сделано для задачи теории упругости [1–3]. Для обобщённой формулировки используем уравнения равновесия (1):

$$\int_\Omega (\sigma_{ij} + b_i) w_i \, d\Omega = 0. \tag{7}$$

Используя формулу Остроградского—Гаусса, в левой части равенства (7) произведём следующие преобразования:

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j} w_i d\Omega = \int_\Omega \big[(\sigma_{ij} w_i)_{,j} - \sigma_{ij} w_{i,j}\big] d\Omega = \int_S \sigma_{ij} n_j w_i \, dS - \int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} \, d\Omega. \tag{8}$$

С учётом этого, а также определяющего уравнения и формулы Коши $\sigma_{ij} n_j = f_i$ уравнение (7) можно привести к следующему виду:

$$\int_\Omega \Big[2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ij}^a\Big] w_{i,j} \, d\Omega = \int_S f_i w_i \, dS + \int_\Omega b_i w_i \, d\Omega. \tag{9}$$

Проведём далее следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big[2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}(u)\delta_{ij}\Big] w_{i,j} \, d\Omega = \\
&\qquad = \int_\Omega \Big[2\mu\varepsilon_{ij}(w) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}(w)\delta_{ij}\Big] u_{i,j} \, d\Omega = \\
&\qquad = \int_\Omega \Big(\Big[2\mu\varepsilon_{ij}(w) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}(w)\delta_{ij}\Big] u_i\Big)_{,j} d\Omega - \\
&\qquad - \int_\Omega \Big[2\mu\varepsilon_{ij}(w) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}(w)\delta_{ij}\Big]_{,j} u_i \, d\Omega = \\
&\qquad\qquad = \int_S \sigma_{ij}(w) n_j u_i \, dS - \int_\Omega \sigma_{ij,j}(w) u_i \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, мы приходим к обратной формулировке:

$$\int_\Omega u_i \sigma_{ij,j}(w) d\Omega + \int_S \big[f_i(u) w_i - u_i f_i(w)\big] dS + \int_\Omega b_i w_i \, d\Omega + \int_\Omega \sigma_{ij}^a w_{i,j} \, d\Omega = 0. \tag{11}$$

В качестве весовой функции, как и в случае задачи линейной теории упругости, выбирается фундаментальное решение уравнения

$$\sigma_{ij,j}(w) + \Delta(\xi, x)e_i = 0, \tag{12}$$

соответствующего классической задаче линейной теории упругости: определить деформацию неограниченной упругой среды, в произвольной точке которой приложена единичная сила. Единичная сосредоточенная нагрузка в направлении каждого из трёх взаимно ортогональных единичных векторов e_i рассматривается в этой задаче как массовая сила

$$b_i^* = \Delta(\xi, x)e_i. \tag{13}$$

Здесь $\Delta(\xi, x)$ — дельта-функция Дирака, ξ — особая точка, $x \in \Omega$ — точка пространства.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$w_i = u_i^* = u_{ki}^*(\xi, x)e_k, \tag{14}$$

где $u_{ij}^*(\xi, x)$ представляет собой перемещение, возникающее в точке x в j-том направлении и соответствующее единичной сосредоточенной нагрузке, действующей в i-том направлении и приложенной в точке ξ. В этом случае

$$w_{i,j} = u_{ki,j}^*(\xi, x)e_k. \tag{15}$$

Поверхностные напряжения, удовлетворяющие уравнению (12), представимы в аналогичном виде:

$$f_j^* = f_{ij}^*(\xi, x)e_i. \tag{16}$$

Учитывая соотношения (12)–(16) и свойство дельта-функции

$$\int_\Omega f(x)\Delta(\xi, x)d\Omega = f(\xi), \tag{17}$$

выражение (11) можно привести к следующему виду:

$$u_i(\xi) = \int_S \big[f_j(x)u_{ij}^*(\xi, x) - u_j(x)f_{ij}^*(\xi, x)\big]dS(x) + \\ + \int_\Omega b_j u_{ij}^*(\xi, x)d\Omega(x) + \int_\Omega \sigma_{kj}^a u_{ik,j}^*(\xi, x)d\Omega(x). \tag{18}$$

Здесь $u_{ij}^*(\xi, x)$ и $f_{ij}^*(\xi, x)$ — известные функции влияния [1].

Для расчёта напряжённо-деформированного состояния на основе модифицированного метода граничных элементов [2–5] построим ниже следующую пошаговую процедуру.

(1) На первом шаге решаем упругую задачу для области Ω. По найденным граничным значениям определяем перемещения $u_i^{(1)}$, деформации $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ и упругие напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ внутри области:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(\xi) &= \int_S \big[f_j(x)u_{ij}^*(\xi, x) - u_j(x)f_{ij}^*(\xi, x)\big]dS(x) + \int_\Omega b_j u_{ij}^*(\xi, x)d\Omega(x), \\ \varepsilon_{ij}^{(1)}(\xi) &= \int_S \big[f_s(x)w_{sij}^*(\xi, x) - u_s(x)g_{sij}^*(\xi, x)\big]dS(x) + \int_\Omega b_s(x)w_{sij}^*(\xi, x)d\Omega(x), \end{aligned} \tag{19}$$

$$w^*_{sij}(\xi,x)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u^*_{is}}{\partial\xi_j}+\frac{\partial u^*_{js}}{\partial\xi_i}\Big),\quad g^*_{sij}(\xi,x)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f^*_{is}}{\partial\xi_j}+\frac{\partial f^*_{js}}{\partial\xi_i}\Big),\tag{20}$$

$$\sigma^{(1)}_{ij}=2\mu\varepsilon^{(1)}_{ij}+\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{(1)}_{kk}\delta_{ij}.\tag{21}$$

Используя условие $\sigma_i=\sigma^e$, где σ_i — интенсивность напряжений, σ^e — предел упругости (линейной), определяем границу $S_{\text{нл}}$ нелинейной зоны $\Omega_{\text{нл}}$. Внутри нелинейной зоны в соответствии с определяющим уравнением (4) вычисляем $\sigma^a_{ij}(\varepsilon^{(1)})$.

(2) На втором шаге, используя уравнение (18), по значениям $u^{(1)}_i$ и $\varepsilon^{(1)}_{ij}$ перемещения в нелинейной области определяем из соотношения

$$u^{(2)}_i(\xi)=\int_S\big[f_j(x)u^*_{ij}(\xi,x)-u_j(x)f^*_{ij}(\xi,x)\big]dS(x)+$$
$$+\int_\Omega b_ju^*_{ij}(\xi,x)d\Omega(x)+\int_{\Omega_{\text{нл}}}\sigma^a_{kj}(\varepsilon^{(1)})u^*_{ik,j}(\xi,x)d\Omega(x)$$

или, что то же самое,

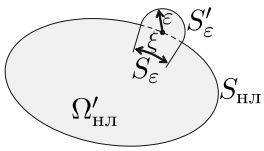
$$u^{(2)}_i(\xi)=u^{(1)}_i(\xi)+\int_{\Omega_{\text{нл}}}\sigma^a_{kj}(\varepsilon^{(1)})u^*_{ik,j}(\xi,x)d\Omega(x).\tag{22}$$

Деформации в нелинейной области на втором шаге в соответствии с (22) вычисляем так:

$$\varepsilon^{(2)}_{pq}(\xi)=\frac{1}{2}\big(u^{(1)}_{p,q}(\xi)+u^{(1)}_{q,p}(\xi)\big)=$$
$$=\varepsilon^{(1)}_{pq}(\xi)+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\text{нл}}}\Big(\big(\sigma^a_{kj}(\varepsilon^{(1)})u^*_{pk,j}(\xi,x)\big)_{,q}+\big(\sigma^a_{kj}(\varepsilon^{(1)})u^*_{qk,j}(\xi,x)\big)_{,p}\Big)d\Omega(x)=$$
$$=\varepsilon^{(1)}_{pq}(\xi)+\int_{S_{\text{нл}}}\Big(\sigma^a_{kj}(\varepsilon^{(1)})\big(u^*_{pk,j}(\xi,x)n_q+u^*_{qk,j}(\xi,x)n_p\big)\Big)dS(x).\tag{23}$$

Напряжения в нелинейной области определяются по деформациям (23). Использование уравнения (23) предполагает, что нам известны значения $\varepsilon^{(1)}_{kj}$ деформаций на границе нелинейной области. В случае, когда часть этой границы лежит на границе S области Ω, определить их из уравнений (20), соответствующих внутренним точкам, невозможно. Получить аналитические выражения, аналогичные граничным интегральным соотношениям в методе граничных элементов, также невозможно ввиду неустранимой сингулярности интегралов от функций $g^*_{sij}(\xi,x)$. Поэтому на первом шаге деформации на границе S определяются путем дифференцирования полученных из решения упругой задачи граничных перемещений $u^{(1)}_i$.

Выражение (23) даёт возможность вычислить деформации внутри нелинейной области. Чтобы аналогичное выражение применить на следующем шаге, необходимо найти значения $\varepsilon^{(2)}_{pq}$ на границе нелинейной области. Устремим в соотношении (23) точку ξ к границе S. Предположим, что нелинейная область может быть представлена так, как показано на рисунке, при этом



Точка на границе нелинейной области

точка ξ рассматривается как внутренняя точка, окруженная сферической поверхностью радиуса ε.

Запишем выражение (23) для области $\Omega'_{\text{нл}}$ и вычислим предел каждого слагаемого при $\varepsilon \to 0$:

$$\varepsilon^{(2)}_{pq}(\xi) = \varepsilon^{(1)}_{pq}(\xi) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S'_{\text{нл}}-S_\varepsilon+S'_\varepsilon}\Big(\sigma^a_{kj}(\varepsilon^{(1)})\big(u^*_{pk,j}(\xi,x)n_q + u^*_{qk,j}(\xi,x)n_p\big)\Big)dS(x) =$$
$$= \varepsilon^{(1)}_{pq}(\xi) + \int_{S_{\text{нл}}}\Big(\sigma^a_{kj}(\varepsilon^{(1)})\big(u^*_{pk,j}(\xi,x)n_q + u^*_{qk,j}(\xi,x)n_p\big)\Big)dS(x) +$$
$$+ \sigma^a_{kj}\big(\varepsilon^{(1)}(\xi)\big)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S'_\varepsilon}\big(u^*_{pk,j}(\xi,x)n_q + u^*_{qk,j}(\xi,x)n_p\big)\,dS(x). \quad (24)$$

Здесь интеграл по границе $S_{\text{нл}}$ вычисляется в смысле главного значения по Коши, а последний интеграл может быть вычислен аналитически с помощью следующих соотношений:

$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{11,1}(\xi,x)n_1 dS(x) = \frac{1}{4}c_1\big((2c_2-1)(\omega-2\pi+\sin\omega\cos\omega)+2\sin\omega\cos^3\omega\big),$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{11,2}(\xi,x)n_1 dS(x) = \frac{1}{2}c_1(c_2+1+\cos^2\omega)\sin^2\omega,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{12,1}(\xi,x)n_1 dS(x) = \frac{1}{2}c_1\sin^2\omega\cos^2\omega,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{12,2}(\xi,x)n_1 dS(x) = -\frac{1}{4}c_1\big(\omega-2\pi+(2\cos^2\omega+1)\sin\omega\cos\omega\big),$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{22,1}(\xi,x)n_1 dS(x) = \frac{1}{4}c_1\big((2c_2+1)(\omega-2\pi+\sin\omega\cos\omega)-2\sin\omega\cos^3\omega\big),$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{22,2}(\xi,x)n_1 dS(x) = \frac{1}{2}c_1(c_2-1-\cos^2\omega)\sin^2\omega,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{11,1}(\xi,x)n_2 dS(x) = \frac{1}{2}c_1(c_2-\sin^2\omega)\sin^2\omega,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{11,2}(\xi,x)n_2 dS(x) = \frac{1}{4}c_1\big((2c_2+1)(\omega-2\pi-\sin\omega\cos\omega)+2\sin^3\omega\cos\omega\big),$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{12,1}(\xi,x)n_2 dS(x) = -\frac{1}{4}c_1\big(\omega-2\pi-(2\sin^2\omega+1)\sin\omega\cos\omega\big),$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{12,2}(\xi,x)n_2 dS(x) = -\frac{1}{2}c_1\sin^2\omega\cos^2\omega,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{22,1}(\xi,x)n_2 dS(x) = \frac{1}{2}c_1(c_2+\sin^2\omega)\sin^2\omega,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u^*_{22,2}(\xi,x)n_2 dS(x) = \frac{1}{4}c_1\big((2c_2-1)(\omega-2\pi-\sin\omega\cos\omega)-2\sin^3\omega\cos\omega\big). \quad (25)$$

Здесь ω — величина внутреннего угла между касательными к границе $S_{\text{нл}}$ с двух сторон в точке ξ. Поскольку правые части уравнений (25) не зависят от ε, то предел в выражении (24) конечен и это выражение можно представить в виде

$$\varepsilon_{pq}^{(2)}(\xi) = \varepsilon_{pq}^{(1)}(\xi) + \alpha_{pq}^{kj}\sigma_{kj}^{a}(\varepsilon^{(1)}) + \\ + \int_{S_{\text{нл}}} \Big(\sigma_{kj}^{a}(\varepsilon^{(1)})\big(u_{pk,j}^{*}(\xi,x)n_q + u_{qk,j}^{*}(\xi,x)n_p\big)\Big)dS(x), \quad (26)$$

где

$$\alpha_{pq}^{kj} = \int_{S'_\varepsilon} \left(u_{pk,j}^{*}\left(\xi_m,x\right)n_q + u_{qk,j}^{*}\left(\xi_m,x\right)n_p\right)dS(x). \quad (27)$$

В случае, когда граница гладкая, соотношения (25) и (27) принимают вид:

$$\int_{S'_\varepsilon} u_{11,1}^{*}(\xi,x)n_1 dS(x) = \frac{1}{4}\pi c_1(1-2c_2), \qquad \int_{S'_\varepsilon} u_{11,1}^{*}(\xi,x)n_2 dS(x) = 0,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u_{11,2}^{*}(\xi,x)n_1 dS(x) = 0, \qquad \int_{S'_\varepsilon} u_{11,2}^{*}(\xi,x)n_2 dS(x) = -\frac{1}{4}\pi c_1(1+2c_2),$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u_{12,1}^{*}(\xi,x)n_1 dS(x) = 0, \qquad \int_{S'_\varepsilon} u_{12,1}^{*}(\xi,x)n_2 dS(x) = \frac{1}{4}\pi c_1,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u_{12,2}^{*}(\xi,x)n_1 dS(x) = \frac{1}{4}\pi c_1, \qquad \int_{S'_\varepsilon} u_{12,2}^{*}(\xi,x)n_2 dS(x) = 0,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u_{22,1}^{*}(\xi,x)n_1 dS(x) = -\frac{1}{4}\pi c_1(1+2c_2), \qquad \int_{S'_\varepsilon} u_{22,1}^{*}(\xi,x)n_2 dS(x) = 0,$$
$$\int_{S'_\varepsilon} u_{22,2}^{*}(\xi,x)n_1 dS(x) = 0, \qquad \int_{S'_\varepsilon} u_{22,2}^{*}(\xi,x)n_2 dS(x) = \frac{1}{4}\pi c_1(1-2c_2),$$
$$\alpha_{11}^{11} = \frac{1}{2}\pi c_1\left(1-2c_2\right), \quad \alpha_{11}^{22} = \frac{1}{2}\pi c_1, \quad \alpha_{11}^{12} = \alpha_{11}^{21} = 0, \quad \alpha_{12}^{11} = \alpha_{12}^{22} = 0,$$
$$\alpha_{12}^{12} = \alpha_{12}^{21} = -\frac{1}{2}\pi c_1 c_2, \quad \alpha_{22}^{11} = \frac{1}{2}\pi c_1, \quad \alpha_{22}^{22} = \frac{1}{2}\pi c_1\left(1-2c_2\right), \quad \alpha_{22}^{12} = \alpha_{22}^{21} = 0. \quad (28)$$

$(n+1)$ На $(n+1)$-ом шаге перемещения вычисляются аналогично (22):

$$u_i^{(n+1)}(\xi) = u_i^{(1)}(\xi) + \int_{\Omega_{\text{нл}}} \sigma_{kj}^{a}(\varepsilon^{(n)})u_{ik,j}^{*}(\xi,x)d\Omega(x). \quad (29)$$

С учётом (24)–(29) деформации внутри нелинейной области определяются из соотношения

$$\varepsilon_{pq}^{(n+1)}(\xi) = \varepsilon_{pq}^{(1)}(\xi) + \int_{S_{\text{нл}}} \Big(\sigma_{kj}^{a}(\varepsilon^{(n)})\big(u_{pk,j}^{*}(\xi,x)n_q + u_{qk,j}^{*}(\xi,x)n_p\big)\Big)dS(x), \quad (30)$$

а на границе нелинейной области — следующим образом:

$$\varepsilon_{pq}^{(n+1)}(\xi) = \varepsilon_{pq}^{(1)}(\xi) + \alpha_{pq}^{kj}\sigma_{kj}^{a}(\varepsilon^{(n)}) + \\ + \int_{S_{\text{нл}}} \Big(\sigma_{kj}^{a}(\varepsilon^{(n)})\big(u_{pk,j}^{*}(\xi,x)n_q + u_{qk,j}^{*}(\xi,x)n_p\big)\Big)dS(x). \quad (31)$$

Итерационный процесс заканчивается, когда $(n+1)$-ое приближение достаточно близко к n-ому.

Реализация итерационной процедуры, основанная на дискретизации границы, очень проста. Для двумерного случая она выглядит следующим образом. Разобьём границу нелинейной области $S_{\text{нл}}$ на прямолинейные элементы e_1, e_2, $\ldots$, e_M. Все величины будем считать постоянными на каждом элементе и отнесёнными к узлу, находящемуся в середине элемента. Начиная со второго шага деформации в узле ξ_m элемента e_m вычисляются из уравнения (31) с учётом (28). Таким образом, итерационная процедура сводится к вычислению значений деформаций в узлах элементов на границе нелинейной области:

$$\varepsilon_{pq}^{(n+1)}(\xi_m) = \varepsilon_{pq}^{(1)}(\xi_m) + \alpha_{pq}^{kj}\sigma_{kj}^{a}(\varepsilon^{(n)}(\xi_m)) + \\ + \sum_{i=1}^{M} \sigma_{kj}^{a}\big(\varepsilon^{(n)}(\xi_i)\big)\left(n_{qi}\int_{e_i} u_{pk,j}^{*}(\xi_m, x)dS(x) + n_{pi}\int_{e_i} u_{qk,j}^{*}(\xi_m, x)dS(x)\right), \quad (32)$$

где n_{qi} и n_{pi} — координаты вектора внешней нормали к элементу e_i. При этом вычисления на каждом шаге будут производиться аналитически с использованием формул интегрирования производных функций влияния [2–5]. После завершения итерационного процесса по найденным значениям деформаций на границе можно вычислить окончательные значения перемещений, деформаций и напряжений внутри нелинейной области. При этом очень важно, что интегрирование по нелинейной области потребуется лишь на последнем этапе, только для вычисления перемещений внутри нелинейной области. Если же определение этих перемещений не входит в задачу исследования, то можно и вовсе обойтись лишь интегрированием по границе с помощью полученных ранее аналитических формул.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бреббия, К.* Методы граничных элементов [Текст] / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
2. *Федотов, В. П.* К аналитическому вычислению интегралов в численно-аналитическом методе решения задач математической физики [Текст] / В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2006. — № 43. — С. 92–99.
3. *Федотов, В. П.* Решение связных диффузионно-деформационных задач на основе алгоритмов параллельного действия [Текст] / В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2007. — 172 с.
4. *Федотов, В. П.* Вычисление напряжений в методе граничных элементов с использованием аналитического вычисления интегралов [Текст] / В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак, В. Б. Трухин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — № 2 (15). — С. 79–84.
5. *Fedotov, V. P.* One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method [Text] / V. P. Fedotov, L. F. Spevak // Engineering Analysis with Boundary Elements — 2008. — Vol. 32, No (10). — P. 883–888.

Поступила в редакцию 01/X/2008;
в окончательном варианте — 17/X/2008.

MSC: 74S15

APPLICATION OF THE MODIFIED BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SOLVING ELASTO-PLASTIC PROBLEMS

V. P. Fedotov, L. F. Spevak

Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences,
620219, Ekaterinburg, Pervomajskaya st., 91.

E-mails: `fedotov@imach.uran.ru, lfs@imach.uran.ru`

Method for solving the problems of elasto-plastic body deformation is proposed. Algorithm for plastic zone determination and iterative procedure for stress-strain state calculation are obtained based on the modified boundary element method. The procedure contains consecutive calculations by derived analytical formula. Integration over the domain being deformed is excluded from the procedure.

Key words: *boundary elements, analytical calculations, nonlinearly elastic deformation.*

Original article submitted 01/X/2008;
revision submitted 17/X/2008.

Fedotov Vladimir Petrovich, Dr. Sci. (Tech.), Head of Applied Mechanics Laboratory, Division of Machines Mechanics and Technology.
Spevak Lev Fridrihovich, Ph. D. (Tech.), Senior Researcher, Division of Machines Mechanics and Technology.