Н. Н. Тарханов, О матрице Карлемана для эллиптических систем,
Докл. АН СССР, 1985, том 284, номер 2, 294–297

https://www.mathnet.ru/dan8971

2) *для любых* $\epsilon_1 \in E_+^{4n} \times E_\oplus^2$, $\epsilon_2 \in E_+^{4n+2}$ *существуют* $\beta_1, \beta_2 \in E_+^{4n} \times E_\oplus^2$ *такие, что* $\beta_1 \leqslant \epsilon_1$, $\beta_2 \leqslant \epsilon_2$ *и* $(m, \beta_1, \beta_2) \in N_{vu}$.

Отсюда видно, что теорему 1 можно рассматривать как обобщение теоремы сходимости метода штрафных функций в задаче на кратный максмин [3]. Следует отметить, что условия теоремы 1 существенно слабее соответствующих условий в [3], так как здесь требуется лишь ограниченность целевой функции и непустота множеств, по которым берется максимум и минимум. Никаких условий типа компактности и непрерывности здесь не требуется.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Молодцов Д.А.* – ЖВМиМФ, 1980, т. 20, № 5, с. 1117–1129. 2. Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. 3. *Горелик В.А., Федоров В.В.* – ЖВМиМФ, 1975, т. 15, № 3, с. 599–607; № 4, с. 883–894.

УДК 517.55 + 517.95 МАТЕМАТИКА

Н.Н. ТАРХАНОВ

О МАТРИЦЕ КАРЛЕМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 11 VII 1984)

1°. Обозначим $[C^m(K)]^l$, где K – компакт в R^n и $m = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$, пространство векторов-столбцов высоты l, компонентами которых являются ростки m раз непрерывно дифференцируемых функций на K, с топологией равномерной сходимости на K всех компонент вместе с производными до порядка m. Если Ω – открытое подмножество R^n, то $[C^m(\Omega)]^l = \varprojlim_{K \subset \Omega} [C^m(K)]^l$, а $[C^m]^l$ – соответствующий пучок.

Пусть $P = \| P^{ij} \|_{\substack{i, \ldots, k \\ j, \ldots, l}} \in \mathrm{Diff}_p(R^n \times C^l, R^n \times C^k)$ – эллиптический дифференциальный оператор (ДО) порядка p с постоянными коэффициентами в R^n, заданный $(k \times l)$-матрицей скалярных ДО, а ${}^tP$ – транспонированный ДО. Обозначим $C^m(F)_P$ подпространство $[C^m(F)]^l$, состоящее из вектор-функций f, удовлетворяющих $Pf = 0$ в $\operatorname{int} F$. Известно, что $C^{p-1}(\Omega)_P$ – пространство Фреше.

Пучок C_P^ω допускает резольвенту Гильберта, т.е. существуют такие ДО $P^q \in \mathrm{Diff}_{p_q}(R^n \times C^{k_q}, R^n \times C^{k_{q+1}})$, $q = 1, 2, \ldots, N-1$, с постоянными коэффициентами в R^n, что последовательность пучков

$$(1) \qquad 0 \to C_P^\omega \xrightarrow{i} [C^\infty]^l \xrightarrow{P} [C^\infty]^k \xrightarrow{P^1} \ldots \xrightarrow{P^{N-1}} [C^\infty]^{k_N} \to 0, \quad N \leqslant n,$$

точна [1]. Для комплексов (1) в работе [2] построено фундаментальное решение типа свертки, т.е. набор матриц

$$V^q \in [C^\omega(R^n \setminus \{0\})]^{k_q \times k_{q+1}}, \quad q = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$V^q = O(|x|^{p_q-n}\ln|x|) \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

удовлетворяющих "цепной" системе дифференциальных уравнений (ДУ)

$$(2) \qquad P^{q-1}(\partial_x)V^{q-1}(x-y) + V^q(x-y)^t P^{q*}(\partial_y) = \delta(x-y)E_{k_q}, \quad q = 0, 1, \ldots, N,$$

где $P^{-1} \doteq P^N \equiv V^{-1} \equiv V^N \equiv 0$, $P^0 = P$, $\delta(x)$ – функционал Дирака, E_k – единичная $(k \times k)$-матрица, а A^* – эрмитово сопряженная матрице A. Положим $V(x, y) = V^0(x-y)$.

2°. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, а S – замкнутый кусок гладкой гиперповерхности, лежащий в $\bar{\Omega}$. Рассмотрим задачу Коши: определить вектор-функцию $f \in C^{p-1}(\bar{\Omega})_P$ по значениям ее производных до порядка $p-1$ на S,

$$(3) \qquad \begin{aligned} &Pf = 0, \quad x \in \Omega, \\ &\partial^\alpha f|_S = \partial^\alpha f^0, \quad \|\alpha\| \leqslant p-1, \end{aligned}$$

где f^0 – заданная $(p-1)$-струя на S, и мы применяем обычные мультииндексные обозначения для производных.

Известно, что если S не содержит "границу Шилова" множества $\bar{\Omega}$ относительно семейства $C^{p-1}(\bar{\Omega})_P$, то задача (3) некорректна по Адамару: ее решение единственно, но неустойчиво. Одним из возможных компактных множеств корректности по Тихонову [3] задачи Коши (3) является подпространство $C^{p-1}(\mathcal{D})_P$ равномерно ограниченных на каждом компакте из $\mathcal{D}$ вместе с производными до порядка $p-1$ вектор-функций f, где $\mathcal{D}$ – область, содержащая $\bar{\Omega}$. Как только выделен класс корректности по Тихонову, естественно встает вопрос о создании методов эффективного решения задачи (3).

Поскольку вектор-функция f, удовлетворяющая $Pf = 0$ в Ω, обязана быть вещественно аналитической в Ω, то в случае, когда $S \subset \Omega$, задача (1) относится к задачам аналитического продолжения [4]. Действительно, в этом случае с помощью формул Сохоцкого–Племеля для интеграла типа Коши, связанного с ДО P, по $(p-1)$-струе f^0 на S восстанавливаются все производные решения f в каждой точке $x^0 \in \operatorname{int} S$, т.е. аналитический элемент вектор-функции f в точке $x^0 \in S \subset \Omega$. Более подробно, пусть компактно сосредоточенная $(p-1)$-струя $\tilde{f}^0$ на S совпадает с f^0 в окрестности точки x^0, тогда разность предельных значений интеграла $\left\{-\int\limits_S G_P(\partial_x^\alpha V(x, y), \tilde{f}^0(y))\right\}$, когда $x \to x^0$ по нормали к S изнутри и снаружи S, совпадает с $\partial^\alpha f(x^0)$ для всех α.

Здесь $G_P(u, v)$ – оператор Грина ДО P, т.е. бидифференциальный оператор степени $p-1$, определяемый равенством $dG_P(u^*, v) = [u^*(Pv) - ({}^tPu)^*v]\,dx$ для всех $u \in [C^\infty(U)]^k$, $v \in [C^\infty(U)]^l$, где dx – элемент объема, а U – произвольное открытое множество в R^n.

Более общим является случай $S \subset \partial\Omega$. Развивая идею М.М. Лаврентьева, который ввел понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа [5], дадим следующее

Определение. Матрицей Карлемана задачи (3) называется $(l \times k)$-матрица $\Phi(\epsilon, x, y)$, представимая в виде

$$\Phi(\epsilon, x, y) = V(x, y) + g(\epsilon, x, y), \quad (x, y) \in \Omega \times \bar{\Omega},$$

где $(l \times k)$-матрица $g(\epsilon, x, y) \in [C^p(\Omega_y)]^{l\times k} \cap [C^{p-1}(\bar{\Omega}_y)]^{l\times k}$ удовлетворяет $g(\epsilon, x, y)^t P^*(\partial_y) = 0$, и, кроме того,

$$\int\limits_{\partial\Omega\setminus S} \sum_{\|\alpha\| \leqslant p-1} |\partial_y^\alpha \Phi(\epsilon, x, y)|\, ds_y = O(\epsilon) \quad \text{при} \quad \epsilon \to 0$$

равномерно по x на компактных подмножествах Ω.

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (3) (многомерный аналог теоремы о двух константах), а также указать метод эффективного решения этой задачи [5].

Т е о р е м а 1 (формула типа Карлемана). *Если* f *– решение задачи* (3), *то в топологии* $[C^{p-1}(\Omega)]^l$

(4) $\quad f(x) = -\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int\limits_S G_P(\Phi(\epsilon, x, y), f^0(y)), \quad x \in \Omega.$

Отметим, что если $G(\epsilon, x, y)$ – матрица Карлемана для ДО $Q \circ P$, то $G(\epsilon, x, y)^t Q^*(\partial_y)$ – матрица Карлемана для ДО P. Таким образом, достаточно уметь строить матрицы Карлемана для скалярных эллиптических ДО.

Функцию Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и ему близких в случае, когда $\partial\Omega \setminus S$ – часть поверхности конуса, построил Ш. Ярмухамедов [6]. Матрицу Карлемана задачи Коши для уравнений Коши–Римана в случае, когда S – произвольное множество положительной меры на границе выпуклой или линейно-выпуклой с гладкой границей области $\Omega \subset C^n$, построил Л.А. Айзенберг [7]. Мы развиваем здесь идею С.Е. Мергеляна [8], указавшего способ построения функции Карлемана плоской задачи Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S – кусок с гладким краем границы односвязной области Ω, основывавшийся на теоремах об аппроксимации.

3°. Нам нужны для построения матрицы Карлемана аппроксимационные теоремы для решений системы ДУ, транспонированных к эллиптическим, $P^{N-1}f = 0$. Отметим, что ни одна из этих теорем не имеет аналогов ни для какого из ДО P^q, $q < N < 1$, комплекса (1).

Т е о р е м а 2 (типа Рунге). *Пусть* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *– открытые множества в* R^n; *тогда всякую вектор-функцию из* $C^m(\Omega_1)_{P^{N-1}}$, $m \geqslant p_{N-1} - 1$, *можно приблизить в* $[C^m(\Omega_1)]^{k_{N-1}}$ *вектор-функциями из* $C^\infty(\Omega_2)_{P^{N-1}}$ *в том и только том случае, когда дополнение к* Ω_1 *не имеет связных компактных компонент в* Ω_2.

В случае $N = 1$, т.е. для определенных эллиптических ДО, эта теорема содержится в [1], с. 376.

Приведем схему аппроксимации $f \in C^m(\Omega)_{P^{N-1}}$ на компакте $K \subset \Omega$, когда Ω имеет связное дополнение до пополнения R^n одной бесконечно удаленной точкой. Можно считать, что $m = \infty$, иначе применим стандартную регуляризацию. Пусть G – такая область с кусочно-гладкой границей и связным дополнением, что $K \subset G \subset\subset \Omega$. Для $x \in K$ по формуле Коппельмана [2]

(5) $\quad f(x) = -\int\limits_{\partial G_y} G_{P^{N-1}}(V^{N-1}(x-y), f(y)) + P^{N-2}(\partial_x) \int\limits_{G_y} V^{N-2}(x-y) f(y)\,dy.$

Второе слагаемое в правой части (5) уже принадлежит пространству $C^\infty(R^n)_{P^{N-1}}$, осталось аппроксимировать первое слагаемое. Для этого сначала приблизим в $[C^\infty(K)]^{k_{N-1}}$ интеграл по границе интегральными суммами

$$\sum_{\nu=1}^{M} \sum_{\|\beta+\gamma+e_j\| \leqslant p_{N-1}}' \partial_x^\beta V^{N-1}(x-y_\nu) \cdot P^{N-1}_{\beta+\gamma+e_j} \cdot \partial^\gamma f(y_\nu) \cdot \Delta_j s_\nu,$$

где e_j – орт оси x_j, $P^{N-1} = \sum\limits_{\|\alpha\| \leqslant p_{N-1}} P^{N-1}_\alpha \partial^\alpha$, штрих означает, что сумма некоторым образом упорядочена, а $y_\nu \in \Delta s_\nu$ – элементу ∂G. Затем с помощью конечной цепочки переразложений в ряд Тейлора $V^{N-1}(x-y_\nu) = \sum \dfrac{(y_\mu - y_\nu)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha V^{N-1}(x-y_\mu)$, где сходимость также в $[C^\infty(K)]^{k_{N-1}}$, задача сводится к аппроксимации матриц $\partial^\alpha V^{N-1}(x-y_\mu)$, где $|y_\mu| > \sup|y|$, в $[C^\infty(K)]^{k_{N-1}}$ матрицами из $C^\infty(R^n)_{P^{N-1}}$.

А это можно сделать с помощью матриц, построенных из экспоненциальных полиномов, так как $P^{N-1}(\partial_x)V^{N-1}(x-y_\mu)=0$ для $x\neq y_\mu$ согласно (2) и, следовательно, по теореме В.П. Паламодова [1] $V_*^{N-1}(x-y_\mu)$ представляется в шаре радиуса $\sup\limits_K|y|$ с центром в O интегралом с некоторой мерой по множеству экспоненциальных полиномов из $C^\infty(R^n)_{P^{N-1}}$. Так что можно опять приблизить интеграл интегральными суммами.

С л е д с т в и е. *Если $\overline{\partial\Omega\setminus S}$ имеет связное дополнение, то существует матрица Карлемана задачи* (3) $W(\epsilon,x,y)\in[C^\infty(\Omega_x\times R^n_y)]^{l\times k}$, *с точностью до слагаемого вида* $V(x,y)+\varphi(x,y)^tP^{1*}(\partial y)$ *построенная из экспоненциальных полиномов по y с коэффициентами, зависящими от ϵ, x.*

Для доказательства достаточно аппроксимировать по y в топологии $[C^\infty(\overline{\partial\Omega\setminus S})]^{k\times l}$ ядро $V^*(x,y)$ по предложенной выше схеме.

4°. Аналогично можно строить формулу типа Карлемана (4), исходя из произвольного интегрального представления

$$f(x)=-\int\limits_{\partial\Omega_y}G_P(U(x,y),f(y)),\quad x\in\Omega,$$

для решений системы $Pf=0$, где $U(x,y)\in[C^{p-1}(\partial\Omega_y)]^{l\times k}$. Для этого нужно дополнить теорему 2 следующим результатом, доказательство которого также вполне конструктивно может быть проведено на основе формулы Коппельмана (5).

Т е о р е м а 3. *Пусть K – компакт в R^n. Если его лебегова мера равна нулю, то бесконечно дифференцируемые решения системы $P^{N-1}f=0$ в окрестности K плотны в $[C^m(K)]^{k_{N-1}}$ при $0\leqslant m\leqslant p_{N-1}-1$. Если K – допустимый компакт, то любая вектор-функция $f\in C^m(K)_{P^{N-1}}$, $0\leqslant m\leqslant p_{N-1}-1$, приближается в топологии $[C^m(K)]^{k_{N-1}}$ бесконечно дифференцируемыми решениями системы $P^{N-1}f=0$ в окрестности K. Всякую вектор-функцию $f\in[C^m(K)]^{k_{N-1}}$, $m\geqslant p_{N-1}$, удовлетворяющую $\partial^\alpha(Pf)|_K=0$, $\|\alpha\|\leqslant m-p_{N-1}$, можно приблизить в топологии $[C^{m-1}(K)]^{k_{N-1}}$ бесконечно дифференцируемыми решениями $P^{N-1}f=0$ в окрестности K.*

В случае, когда P – скалярный эллиптический ДО (так что $P^{N-1}=P$), теорема 3 принадлежит Б.М. Вайнстоку [9], а для $P=\bar\partial$ – Ш.А. Даутову [10].

Автор выражает признательность Л.А. Айзенбергу за полезное обсуждение.

Институт физики им. Л.В. Киренского
Сибирского отделения Академии наук СССР,
Красноярск

Поступило
24 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паламодов В.П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967. 487 с. 2. *Тарханов Н.Н.* – Изв. вузов. Математика, 1983, № 6, с. 33–42. 3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, изд. 2-е. 288 с. 4. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 296 с. 5. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с. 6. *Ярмухамедов Ш.* – ДАН, 1977, т. 235, № 2, с. 281–283. 7. *Айзенберг Л.А.* – ДАН, 1984, т. 277, № 6. 8. *Мергелян С.Н.* – УМН, 1956, т. 11, № 5, с. 3–26. 9. *Weinstock B.M.* – Proc. Amer. Math. Soc., 1973, vol. 41, № 2, p. 513–517. 10. *Айзенберг Л.А., Даутов Ш.А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск: Наука, 1975. 115 с.