Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 3–25

УДК 563.19
MSC2010 35K05

© М. Х. Бештоков[1], М. З. Худалов[2]

Разностные методы решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений конвекции-диффузии дробного порядка с эффектом памяти

В настоящей работе в прямоугольной области изучаются нелокальные краевые задачи для одномерных по пространству дифференциальных уравнений конвекции-диффузии дробного порядка с эффектом памяти, в которых неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и вместе с тем фигурирует под знаком интеграла. Возникновение интегрального слагаемого в уравнении связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их предыдущих значений, т. е. влияние на текущее состояние системы ее предыстории.

Для численного решения нелокальных краевых задач построены двухслойные монотонные разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Методом энергетических неравенств выведены оценки решений задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность, а также непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных рассматриваемых задач и в силу линейности рассматриваемой задачи сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью сходимости $O(h^2 + \tau^2)$.

Ключевые слова: *краевые задачи, априорная оценка, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, уравнение конвекции-диффузии, эффект памяти.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202101

[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А.

[2] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, 362001, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44 – 46.

Электронная почта: beshtokov-murat@yandex.ru (М. Х. Бештоков), hmz@mail.ru (М. З. Худалов).

Введение

Существует большое количество книг, посвящённых дробному математическому анализу, дробным дифференциальным уравнениям и их применениям в физике, механике, биологии [1–7]. Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес. При решении многих задач в механике, физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами последних могут служить сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт. Решение различных задач для таких сред приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений с дробной производной.

В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений конвекции-диффузии дробного порядка с эффектом памяти и нестандартными краевыми условиями. Рассматриваемые в работе нелокальные условия возникают в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка (см. [8, с. 233]). Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе следует задать условие

$$h\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{$*$}$$

где c — концентрация соли в почвенном растворе, D —диффузивность.

Для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка [9]. Для определения целесообразности режима смены воды может потребоваться решение краевой задачи с условиями на верхней границе толщи, отличающейся от (*). Так как почву следует рассматривать как среду фрактальную, то при написании граничных условий есть смысл также использовать концепцию фрактала

$$C_0\partial_{0t}^{\alpha}u = k\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Разностным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [10–22]. В работах [10–12] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае (α=1), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках.

В работе [11] построен новый разностный аналог (называемый формулой $L2-1$), обеспечивающий порядок аппроксимации дробной производной Капуто $O(\tau^{3-\alpha})$. Доказаны устойчивость предлагаемых схем, а также их сходимость в L_2-норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

Дробные производные включают в себя нелокальную информацию, и, следовательно, их вычисление требует огромных затрат на хранение и вычислительные ресурсы. В работе [13] строится компактная конечно-разностная схема высокого порядка для уравнения субдиффузии дробного порядка, а в [14] предлагается эффективная схема высокого порядка точности для вычисления дробной производной Капуто на основе формулы $L2-1\sigma$, предложенной в [11]. В работе [15] исследуются задачи для многомерных уравнений субдиффузии дробного распределенного порядка. Приводятся численные примеры, показывающие эффективность предложенных разностных схем. В [16] исследуется класс начально-краевых задач пространственно-временных дробных уравнений конвекции-диффузии. Предлагается новый безусловно устойчивый неявный разностный метод, сходящийся с точностью до второго порядка как во временных, так и в пространственных переменных. В работе [17] разработаны разностные схемы второго порядка для решения одномерных и двумерных уравнений дробной диффузии распределенного по времени порядка. Доказаны безусловная устойчивость и сходимость предлагаемой разностной схемы в L_2-норме.

В работах [18–22] методом энергетических неравенств получены априорные оценки решений в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи. В силу линейности рассматриваемых задач полученные априорные оценки позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

Настоящая работа посвящена изучению нелокальных краевых задач для одномерных по пространству дифференциальных уравнений конвекции-диффузии дробного порядка с эффектом памяти, в котором неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и вместе с тем фигурирует под знаком интеграла. Возникновение интегрального слагаемого в уравнении связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их предыдущих значений, т. е. влияние на текущее состояние системы ее предыстории. Для численного решения задач построены двухслойные монотонные разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также — в силу линейности разностных задач — сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью сходимости $O(h^2+\tau^2)$.

1. Постановка нелокальной краевой задачи

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T=\{(x,t):0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\int\limits_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau+f(x,t),$$
$$0<x<l,\quad 0<t\leqslant T, \tag{1}$$
$$k(0)u_x(0,t)=\beta_{11}(t)u(0,t)+\beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-\mu_1(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2}$$

$$-k(l)u_x(l,t)=\beta_{21}(t)u(l,t)+\beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-\mu_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}0<c_0\leqslant k(x),\ \beta_{12}(t),\ \beta_{22}(t)\leqslant c_1,\\ |\beta_{11}(t),\ \beta_{21}(t),\ r(x),\ p(x,t,\tau),\ k_x(x),\ r_x(x)|\leqslant c_2,\\ \partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau\end{gathered} \tag{5}$$

— дробная производная Капуто порядка α, $0<\alpha<1$, $c_i=const>0, i=0,1,2$.

В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1)–(4) существует и обладает нужными по ходу изложения производными.

Будем также использовать положительные постоянные числа M_i, $i=1,2,...,$ зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1)–(4) умножим уравнение (1) скалярно на $U=u+\partial_{0t}^{\alpha}u$:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,U\right)=\left(\left(ku_x\right)_x,U\right)+\left(ru_x,U\right)+\left(\int\limits_0^t pud\tau,U\right)+\left(f,U\right), \tag{6}$$

где $\left(a,b\right)=\int\limits_0^l abdx$, $\left(a,a\right)=\|a\|_0^2$, и a,b — заданные на $[0,l]$ функции.

Пользуясь неравенством Коши с ε и леммой 1 [10], преобразуем слагаемые, входящие в тождество (6). Тогда после несложных преобразований из (6) получаем неравенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2+c_0\|u_x\|_0^2+\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|\sqrt{k}u_x\|_0^2\leqslant\\ \leqslant Uku_x\Big|_0^l+M_1\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_2\int\limits_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_3\|f\|_0^2.\end{gathered} \tag{7}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (7):

$$\begin{gathered}Uku_x\Big|_0^l=\Big(u(l,t)+\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)\Big(\mu_2(t)-\beta_{21}(t)u(l,t)-\beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)+\\ +\Big(u(0,t)+\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)\Big(\mu_1(t)-\beta_{11}u(0,t)-\beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)=\\ =\mu_2(t)u(l,t)+\mu_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-\beta_{21}(t)u^2(l,t)-\beta_{21}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-\\ -\beta_{22}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-\beta_{22}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2+\mu_1(t)u(0,t)+\mu_1(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-\end{gathered}$$

$$-\beta_{11}(t)u^2(0,t)-\beta_{11}u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-\beta_{12}(t)u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-$$
$$-\beta_{12}\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2\leqslant M_4^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\varepsilon_1\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2+\varepsilon_2\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2+$$
$$+M_5^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)-\beta_{22}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2-\beta_{12}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2.$$

Выбирая $\varepsilon_1=\beta_{22}(t),\varepsilon_2=\beta_{12}(t)$, из последнего неравенства получаем

$$Uku_x\Big|_0^l\leqslant M_6\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_7\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big). \tag{8}$$

Учитывая (8), из (7) находим неравенство

$$\partial_{0t}^{\alpha}\left(\|u\|_0^2+\|\sqrt{k}u_x\|_0^2\right)+\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant M_8\left(\|u\|_0^2+\|\sqrt{k}u_x\|_0^2\right)+M_9\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_{10}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big), \tag{9}$$

где
$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2.$$

Действуя оператором дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$ на обе части неравенства (9), из последнего получаем

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\Big)\leqslant M_8D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_9D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+$$
$$+M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{10}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (10) следующим образом:

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^\tau\|u\|_0^2ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_0^2\int_s^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_0^2\Big(-\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\Big|_s^t\Big)ds=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha}\|u\|_0^2ds=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha}\|u\|_0^2d\tau\leqslant\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-\tau)\|u\|_0^2d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\leqslant\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2.$$

Получаем
$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau\leqslant\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2. \tag{11}$$

С помощью (11) из (10) следует

$$\begin{gathered}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2 + \|\partial_{0t}^\alpha u\|_0^2\Big) \leqslant \\ \leqslant M_{12} D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right).\end{gathered} \tag{12}$$

На основании леммы 2 [10] из (12) получаем априорную оценку

$$\begin{gathered}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2 + \|\partial_{0t}^\alpha u\|_0^2\Big) \leqslant \\ \leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right),\end{gathered} \tag{13}$$

где $M = const > 0$, зависящая только от входных данных (1)–(4),

$$D_{0t}^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

— дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $\alpha, 0<\alpha<1$.

Теорема 1. *Если* $k(x) \in C^1[0,l],\ r(x) \in C[0,l],\ q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T),\ u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big),\ \partial_{0t}^\alpha u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (5), *тогда для решения задачи* (1)–(4) *справедлива оценка* (13).

Из справедливости оценки (13) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Дифференциальной задаче (1)–(4) на равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ поставим в соответствие разностную схему второго порядка аппроксимации по h и τ [23]:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y = \varkappa_i\Big(a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x + b_i^- a_i y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^+ a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau} + \varphi^j_i, \tag{14}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \beta_{11} y_0^{(\sigma)} - 0.5h \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{0,s} y^s_0 \bar{\tau} + \tilde{\beta}_{12} \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \tilde{\mu}_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{15}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \beta_{21} y_N^{(\sigma)} - 0.5h \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{N,s} y^s_N \bar{\tau} + \tilde{\beta}_{22} \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N - \tilde{\mu}_2, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{16}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{\beta}_{12} = \beta_{12} + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi^j_0, \\ \tilde{\beta}_{22} = \beta_{22}(t_{j+\sigma}) + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi^j_N,\end{gathered}$$

$$a_i = k(x_{i-0.5}), \quad b_i = \frac{r(x)}{k(x)}, \quad \varphi = f(x_i, t_{j+\sigma}), \quad r_0 = r(0) \leqslant 0,$$

$$r_N = r(l) \geqslant 0, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j, \quad d_i^j = d(x_i, t_{j+\sigma}), \quad a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},$$

$$a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geqslant 1, \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$\varkappa = \frac{1}{1+R}, \quad R = \frac{0.5h|r|}{k} \text{— разностное число Рейнольдса,}$$

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} v^s \bar{\tau} = \sum_{s=1}^{j-1} v^s \tau + 0.5\tau \left(v^0 + v^j + v^{j+\frac{1}{2}} \right), \quad \bar{\tau} = \begin{cases} 0.5\tau, \ j = 0, m, m+\frac{1}{2}, \\ \tau, \ j \neq 0, m, m+\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha} \Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha} \Big] - \frac{1}{2} \Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha} \Big], \quad l \geqslant 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, \ s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, \ 1 \leqslant s \leqslant j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, \ s = j, \end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad p_{i,s}^j = p(x_i, t^{j+\sigma}, \tau_{s+\sigma}), \quad \rho_{i,s}^j = p_{i,s}^{j+\sigma}.$$

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$$

— разностный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [11].

Введем скалярные произведения и норму:

$$\big[u, v\big] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar, \ \hbar = \begin{cases} 0.5h, \ i = 0, N, \\ h, \ i \neq 0, N, \end{cases} \quad \big(u, v\big] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h,$$

$$\big[1, u^2\big] = |[u]|_0^2,$$

Перепишем в операторном виде задачу (14)–(17):

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \tag{18}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{19}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)} =$$

$$= \begin{cases} \tilde{\Lambda} y_i^{(\sigma)} = \varkappa (a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x + b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)} + \sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, \ i = \overline{1, N-1} \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{2}{h} \Big(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_{11} y_0^{(\sigma)} + 0.5h \sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} - \beta_{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 \Big), \ i = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = \frac{2}{h} \Big(-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \beta_{21} y_N^{(\sigma)} + 0.5h \sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} - \beta_{22} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N \Big), \ i = N, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, \ i = \overline{1, N-1}, \\ \varphi^- = \frac{2}{h}\Big(\mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j\Big), \ i = 0, \\ \varphi^+ = \frac{2}{h}\Big(\mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j\Big), \ i = N. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varkappa = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}} \\ \varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, \ r_0 \leqslant 0 \\ \varkappa_N = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, \ r_N \geqslant 0. \end{cases}$$

Умножим (18) скалярно на $\bar{y}$:

$$\Big[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\Big] = \Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\Big] + \Big[\overline{\Phi}, \bar{y}\Big], \tag{20}$$

где $\bar{y} = y^{(\sigma)} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y$. С учетом леммы 1 [11] оценим суммы, входящие в (20):

$$\begin{gathered} \Big[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\Big] = \Big[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y\Big] = \Big[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\Big] + \\ + \Big[1, (\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y)^2\Big] \geqslant \frac{1}{2}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} |[y]|_0^2 + |[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2. \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} \Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\Big] = \Big(\tilde{\Lambda} y^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) + 0.5h\bar{y}_0 \Lambda^- y_0^{(\sigma)} + 0.5h\bar{y}_N \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = \\ = \Big(\varkappa(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, \bar{y}\Big) + \Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y_i^s \bar{\tau}, \bar{y}\right) + \\ + \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_{11} y_0^{(\sigma)} \bar{y}_0 - \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} \bar{y}_N - \beta_{12} \bar{y}_0 \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \\ - \beta_{22} \bar{y}_N \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N + 0.5h\bar{y}_0 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{0,s} y_0^s \bar{\tau} - \beta_{21} y_N^{(\sigma)} \bar{y}_N + 0.5h\bar{y}_N + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{N,s} y_N^s \bar{\tau}. \end{gathered} \tag{22}$$

Оценим суммы, входящие в (22):

$$\begin{gathered} \Big(\varkappa(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, \bar{y}\Big) = \bar{y}\varkappa a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big|_0^N - \Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\Big] = \\ = \bar{y}_N \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}}\bar{y} + \varkappa^{(-1)}\bar{y}_{\bar{x}}\Big] = \\ = \bar{y}_N \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big] - \Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y\Big] - \\ - \Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa^{(-1)} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big] - \Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa^{(-1)} \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}}\Big] \leqslant \end{gathered}$$

$$\leqslant \bar{y}_N \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \varepsilon |[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y]|^2_0 + M^\varepsilon_1 \Big(|[y^{(\sigma)}]|^2_0 + |[y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 \Big) -$$

$$- \frac{1}{1+hM_2} \Big(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2 \Big] - \frac{1}{2(1+hM_2)} \Big(a\varkappa, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y^2_{\bar{x}} \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \bar{y}_N \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \varepsilon |[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y]|^2_0 +$$

$$+ M^\varepsilon_1 \Big(|[y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 \Big) - M_3 \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 - M_4 \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} \|\sqrt{a\varkappa} y_{\bar{x}}]|^2_0, \tag{23}$$

$$\Big(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \bar{y} \Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, \bar{y} \Big) = \Big(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, y^{(\sigma)} \Big) +$$

$$+ \Big(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y \Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)} \Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon |[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y]|^2_0 + M^\varepsilon_5 \Big(|[y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 \Big), \tag{24}$$

$$\left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}, \bar{y} \right) + 0.5h\bar{y}_0 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{0,s} y^s_0 \bar{\tau} + 0.5h\bar{y}_N \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{N,s} y^s_N \bar{\tau} - \beta_{11} y^{(\sigma)}_0 \bar{y}_0 -$$

$$- \beta_{21} y^{(\sigma)}_N \bar{y}_N = - \beta_{12} \bar{y}_0 \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \beta_{22} \bar{y}_N \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N = \left[\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}, y^{(\sigma)} \right] +$$

$$+ \left[\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y \right] - \beta_{11} (y^{(\sigma)}_0)^2 - \beta_{11} y^{(\sigma)}_0 \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \beta_{21} (y^{(\sigma)}_N)^2 -$$

$$- \beta_{21} y^{(\sigma)}_0 \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N - \beta_{12} y^{(\sigma)}_0 \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \beta_{12} \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 \Big)^2 - \beta_{22} y^{(\sigma)}_N \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N -$$

$$- \beta_{22} (\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N)^2 \leqslant \varepsilon_1 |[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y]|^2_0 + M^{\varepsilon_1}_6 \left[1, \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau} \right)^2 \right] +$$

$$+ M^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}_7 \Big(|[y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 \Big) + \varepsilon_2 \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 \Big)^2 + \varepsilon_3 \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N \Big)^2 -$$

$$- \beta_{12} \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 \Big)^2 - \beta_{22} \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N \Big)^2 \leqslant \varepsilon_1 |[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y]|^2_0 + M^{\varepsilon_1}_6 \left[1, \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^2_{i,s} \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} (y^s_i)^2 \bar{\tau} \right] +$$

$$+ M^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}_7 \Big(|[y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 \Big) + \varepsilon_2 \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 \Big)^2 + \varepsilon_3 \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 |[\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y]|^2_0 + M^{\varepsilon_1}_8 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} |[y]|^2_0 \bar{\tau} + M^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}_7 \Big(|[y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 \Big) +$$

$$+ \varepsilon_2 \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 \Big)^2 + \varepsilon_3 \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N \Big)^2 - \beta_{12} \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 \Big)^2 - \beta_{22} \Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N \Big)^2. \tag{25}$$

На основании (23)–(25), исходя из (22), находим оценку

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},\bar y\Big]\leqslant \varepsilon_1|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2+\varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\varepsilon_3\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+$$
$$-\beta_{12}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2-\beta_{22}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M_8^{\varepsilon_1}\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac12}|[y]|_0^2\bar\tau+ \tag{26}$$
$$+M_9^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2+\|y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)-M_3\|y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2-M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}]|_0^2.$$

$$\Big[\overline{\Phi},\bar y\Big]=(\varphi,\bar y)+0.5h\varphi^{-}\bar y_0+0.5h\varphi^{+}\bar y_N=(\varphi,\bar y)+\bar y_0\Big(\mu_1+0.5h\varphi_0\Big)+$$
$$+\bar y_N\Big(\mu_2+0.5h\varphi_N\Big)=(\varphi,\bar y)+\bar y_0\mu_1+0.5h\varphi_0\bar y_0+\bar y_N\mu_2+0.5h\varphi_N\bar y_N=$$
$$=\Big[\varphi,\bar y\Big]+\mu_1\bar y_0+\mu_2\bar y_N=\Big[\varphi,y^{(\sigma)}\Big]+\Big[\varphi,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big]+$$
$$+\mu_1y_0^{(\sigma)}+\mu_1\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0+\mu_2y_N^{(\sigma)}+\mu_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2+\varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\varepsilon_3\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+ \tag{27}$$
$$+M_{10}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big)+M_{11}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2+\|y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+M_{12}^{\varepsilon_1}|[\varphi]|_0^2.$$

Учитывая (21)–(27), из (20) получаем

$$\frac12\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2+|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2+M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}]|_0^2+$$
$$+M_3\|y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2+\beta_{12}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\beta_{22}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_1|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2+2\varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+2\varepsilon_3\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M_{14}^{\varepsilon_1}\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac12}|[y]|_0^2\bar\tau+ \tag{28}$$
$$+M_{15}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2+\|y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+M_{16}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big)+M_{17}^{\varepsilon_1}|[\varphi]|_0^2.$$

Выбирая $\varepsilon_1=\dfrac14$, $\varepsilon_2=\dfrac{\beta_{12}}{2}$, $\varepsilon_3=\dfrac{\beta_{22}}{2}$ из (28) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(|[y]|_0^2+||\sqrt{a\varkappa}y_x]|_0^2\right)+\|y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2+|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant M_{18}\left(|[y^{(\sigma)}]|_0^2+|[\sqrt{a\varkappa}y_x^{(\sigma)}]|_0^2\right)+M_{19}\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac12}|[y]|_0^2\bar\tau+M_{20}\Big(|[\varphi]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\Big). \tag{29}$$

Учитывая, что

$$\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac12}|[y^s]|_0^2\bar\tau=\sum_{s\,=\,0}^{j}|[y^s]|_0^2\bar\tau+0.5\tau|[y^j]|_0^2,$$

перепишем (29) в другой форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(|[y]|_0^2+||\sqrt{a\varkappa}y_x]|_0^2\right)\leqslant M_{21}^{\sigma}\left(|[y^{j+1}]|_0^2+|[\sqrt{a\varkappa}y_x^{j+1}]|_0^2\right)+$$
$$+M_{22}^{\sigma}\left(|[y^{j}]|_0^2+|[\sqrt{a\varkappa}y_x^{j}]|_0^2\right)+M_{23}F^j, \tag{30}$$

где

$$F^j = \sum_{s=0}^{j} |[y^s]|_0^2\bar{\tau} + |[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2.$$

На основании леммы 7 [12] из (30) получаем

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M_{24}\left(|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\leqslant j'\leqslant j} F^{j'}\right). \tag{31}$$

где $M_{24}=const>0$, не зависящая от h и τ, $|[y]|^2_{W_2^1(0,l)}=|[y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2$. Из (31) получим

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M_{24}\left(|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\sum_{s=0}^{j'} |[y^s]|_0^2\bar{\tau} + |[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)\right). \tag{32}$$

Введя обозначение $\mathrm{g}^j = \max\limits_{0\leqslant j'\leqslant j} |[y^{j'}]|_0^2$, с учетом $|[y]|^2_{W_2^1(0,l)}=|[y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2$ из (32) получим

$$\mathrm{g}^{j+1} \leqslant M_{25}\sum_{s=0}^{j}\mathrm{g}^s\tau + M_{26}F_1^j, \tag{33}$$

где

$$F_1^j = |[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right).$$

С помощью леммы 4 (см. [24, стр. 171]) из (33) получаем

$$|[y^{j+1}]|_0^2 \leqslant M\left(|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)\right). \tag{34}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (5), тогда существует такое τ_0, что если $\tau \leqslant \tau_0$, то для решения разностной задачи (14)–(17) справедлива оценка (34).*

Из справедливости оценки (34) следуют единственность и устойчивость решения задачи (14)–(17) по правой части и начальным данным.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (14)–(17). Тогда, подставляя $y_i^j = z_i^j + u_i^j$ в соотношения (14)–(17), получим задачу для z:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} z = \varkappa_i\left(a_i z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x + b_i^- a_i z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^+ a_{i+1} z_{x,i}^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j z_i^s\bar{\tau} + \Psi_i^j, \tag{35}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} = \beta_{11} z_0^{(\sigma)} - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j z_0^s\bar{\tau} + \tilde{\beta}_{12}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} z_0 - \tilde{\nu}_1, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \tag{36}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \beta_{21} z_N^{(\sigma)} - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j z_N^s\bar{\tau} + \tilde{\beta}_{22}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} z_N - \tilde{\nu}_2, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \tag{37}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{38}$$

где $\Psi = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_1 = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(4) разностной схемой (14)–(17) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1)–(4).

Применяя оценку (34) к решению задачи (35)–(38), получаем

$$|[z^{j+1}]|_0^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(|[\Psi^{j'}]|_0^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2}\Big), \tag{39}$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Из справедливости оценки (39) следует сходимость решения разностной задачи (14)–(17) к решению дифференциальной задачи (1)–(4) в смысле нормы $|[z^{j+1}]|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau \leqslant \tau_0$ справедлива оценка

$$|[y^{j+1} - u^{j+1}]|_0^2 \leqslant M\left(h^2+\tau^2\right).$$

4. Постановка нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с оператором Бесселя и априорная оценка в дифференциальной форме

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ рассмотрим краевую задачу с нелокальным условием

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m k\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t),$$
$$0<x<l, \quad 0<t\leqslant T, \tag{40}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m k(x)u_x(x,t) = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{41}$$

$$-k(l)u_x(l,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \beta_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{42}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{43}$$

где $0\leqslant m\leqslant 2$.

При $x=0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)|<\infty$, которое эквивалентно условию (41). Если функции $r(0), q(0,t), f(0,t)$ конечны, то условие (41) равносильно тождеству $k(0)u_x(0,t)=0$ [23, с. 173].

Для получения априорной оценки решения задачи (40)–(43) умножим (40) скалярно на $x^m U$:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u, x^m U\Big) = \Big(\big(x^m k u_x\big)_x, U\Big) + \Big(r u_x, x^m U\Big) + \left(\int\limits_0^t p u d\tau, x^m U\right) + \Big(f, x^m U\Big), \tag{44}$$

где $x^m U = x^m(u + \partial_{0t}^{\alpha}u)$.

Тогда из (44) после некоторых преобразований получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\left(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}\sqrt{k}u_x\|_0^2\right)+c_0\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\frac{1}{2}\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\leqslant\\ \leqslant x^mUku_x|_0^l+M_1\int\limits_0^t\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2d\tau+M_2\left(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}\sqrt{k}u_x\|_0^2\right)+M_3\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2.\end{gathered}\tag{45}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (45):

$$\begin{gathered}x^mUku_x|_0^l=l^m\Big(u(l,t)+\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)k(l,t)u_x(l,t)=\\ =l^m\Big(u(l,t)+\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)\Big(\mu(t)-\beta_1(t)u(l,t)-\beta_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)=\\ =l^mu(l,t)\mu(t)+l^m\mu(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-l^mu^2(l,t)\beta_1(t)-\\ -l^m\beta_1(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-l^m\beta_2(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-l^m\beta_2(t)(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2\leqslant\\ \leqslant-l^m\beta_2(t)(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2-\varepsilon\big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\big)^2+M_4^{\varepsilon}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big)+M_5\mu^2(t).\end{gathered}$$

Выбирая $\varepsilon=l^m\beta_2(t)$, из последнего неравенства следует

$$x^mUku_x|_0^l\leqslant M_4\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big)+M_5\mu^2(t).\tag{46}$$

Учитывая (46), из (45) получаем неравенство

$$\begin{gathered}\partial_{0t}^{\alpha}\left(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}\sqrt{k}u_x\|_0^2\right)+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\leqslant\\ \leqslant M_6\left(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}\sqrt{k}u_x\|_0^2\right)+M_7\int\limits_0^t\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2d\tau+M_8\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu_2(t)\Big).\end{gathered}\tag{47}$$

Применим оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$ к обеим частям неравенства (47). Тогда с помощью леммы 2 [10] из (47) получаем оценку

$$\begin{gathered}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\Big)\leqslant\\ \leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}\big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu_2^2(t)\big)+\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right),\end{gathered}\tag{48}$$

где $M=const>0$, зависит только от входных данных задачи (40)–(43),

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2.$$

Теорема 3. *Если* $k(x)\in C^1[0,l]$, $r(x)\in C[0,l]$, $q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\big(Q_T\big)\cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (5), *тогда для решения задачи* (40)–(43) *справедлива априорная оценка* (48).

Из справедливости оценки (48) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Дифференциальной задаче (40)–(43) на равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ поставим в соответствие разностную схему с порядком аппроксимации $O(\frac{h^2+\tau^2}{x})$ [21]:

$$\begin{gathered}\bar{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}ay^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_x+\frac{b^-}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}a_iy^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)+\\+\frac{b^+}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}a_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\right)+\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}y^s_i\overline{\tau}+\varphi^j_i,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{gathered}\tag{49}$$

$$\varkappa_0a_1y^{(\sigma)}_{x,0}=\frac{0.5h}{m+1}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0-\frac{0.5h}{m+1}\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{0,s}y^s_0\overline{\tau}-\tilde{\mu}_1,\tag{50}$$

$$-\varkappa_Na_Ny^{(\sigma)}_{\bar{x},N}=\tilde{\beta}_1y^{(\sigma)}_N-0.5h\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{N,s}y^s_N\overline{\tau}+\tilde{\beta}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N-\tilde{\mu}_2,\tag{51}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{52}$$

где

$$\tilde{\beta}_1=\tilde{\varkappa}\beta_1(t_{j+\sigma}),\quad \tilde{\beta}_2=\tilde{\varkappa}\beta_2+0.5h,\quad \tilde{\mu}_1=\frac{0.5h}{m+1}\varphi^j_0,\quad \tilde{\mu}_2=\tilde{\varkappa}\mu(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi^j_N,$$

$$\varkappa_0=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k^{j+\sigma}_{0.5}}}\ \text{ при } r_0^{j+\sigma}\leqslant 0,\quad \varkappa_N=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r^{j+\sigma}_N|}{k_{N-0.5}}}\ \text{ при } r_N^{j+\sigma}\geqslant 0,$$

$$r=r^++r^-,\quad |r|=r^+-r^-,\quad r^+=0.5\big(r+|r|\big)\geqslant 0,\quad r^-=0.5\big(r-|r|\big)\leqslant 0,$$

$$a_i=k(x_{i-0.5}),\quad b_i^{\pm}=\frac{\bar{\varkappa}_ir_i^{\pm}}{k_i},\quad d_i^j=\begin{cases}\bar{\varkappa}_iq_i^{j+\sigma}, & i=\overline{1,N-1},\\ q_i^{j+\sigma}, & i=0,N,\end{cases}$$

$$\varphi_i^j=\begin{cases}\overline{\varkappa}_if_i^{j+\sigma},\ i=1,N-1,\\ f_i^{j+\sigma},\ i=0,N,\end{cases}\qquad \hbar=\begin{cases}0.5h,\ i=0,\\ h,\ i=\overline{1,N-1},\end{cases}$$

$$\bar{\varkappa}_i=1+\frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\quad i=\overline{1,N-1},$$

$$\tilde{\varkappa}=1+\frac{0.5hm}{l}=\frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}},\quad \varkappa_i=\frac{1}{1+R_i},\quad R_i=\frac{0.5h|r_i|\bar{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}}.$$

Перепишем (49)–(52) в операторной форме

$$\bar{\bar{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{t_{j+\sigma}}y=\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}+\bar{\Phi},\tag{53}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\tag{54}$$

где

$$\bar{\bar{\varkappa}}=\begin{cases}\bar{\varkappa}_i,\ x\in\omega_h,\\ 1,\ x=0,l,\end{cases}\qquad \bar{\varkappa}_i=1+\frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\quad \overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i,\ (x,t)\in\omega_{h\tau},\\ \varphi^-=\frac{m+1}{0.5h}\tilde{\mu}_1,\ x=0,\\ \varphi^+=\frac{1}{0.5h}\tilde{\mu}_2,\ x=l.\end{cases}$$

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{\sigma} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)_x + \frac{b^-}{x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right) + \\ \qquad + \frac{b^+}{x_i^m}\left(x_{i+0.5}^m a_{i+1} y_x^{(\sigma)}\right) + \sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{m+1}{0.5h}\left(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \frac{0.5h}{m+1} \sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau}\right), \ x = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = -\frac{2}{h}\left(\varkappa_N a_N y_{x,N}^{(\sigma)} + \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} - \right. \\ \qquad \left. - 0.5h \sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} + \tilde{\varkappa}\beta_2 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\right), \ x = l. \end{cases}$$

Умножим теперь (53) скалярно на $x^m\bar{y} = x^m y^{(\sigma)} + x^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y$:

$$\left(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m\bar{y}\right) = \left(\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m\bar{y}\right] + \left(\bar{\Phi}, x^m\bar{y}\right]. \tag{55}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (55), пользуясь неравенством Коши с ε:

$$\begin{gathered} \left(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m\bar{y}\right) = \left(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m y^{(\sigma)}\right] + \left(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y\right] \geqslant \\ \geqslant \left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right] + \left(\bar{\bar{\varkappa}}, \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right], \end{gathered} \tag{56}$$

$$\begin{gathered} \left(\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m\bar{y}\right] = \left(\tilde{\Lambda}y^{(\sigma)}, x^m\bar{y}\right) + 0.5h\Lambda^+ y_N^{(\sigma)} x_N^m \bar{y}_N = \\ = \left(\varkappa(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, \bar{y}\right) + \left(b^-(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}), \bar{y}\right) + \left(b^+(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_x^{(\sigma)}), \bar{y}\right) + \\ + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, x_i^m \bar{y}\right) - x_N^m \bar{y}_N \left(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} - 0.5h \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} + \tilde{\varkappa}\beta_2 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\right) = \\ = -\left(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\right] + \left(b^-(\bar{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}), \bar{y}\right) + \left(b^+ x_{i+0.5}^m a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}\bar{y}\right) + \\ + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, x^m \bar{y}\right) - \tilde{\beta}_1 x_N^m y_N^{(\sigma)} \bar{y}_N + x_N^m 0.5h \bar{y}_N \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} - \\ - \tilde{\varkappa}\beta_2 x_N^m \bar{y}_N \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N + \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\bar{y}_N \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - x_{0.5}^m \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} \bar{y}_0. \end{gathered} \tag{57}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (57):

$$\begin{gathered} -\left(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\right] = -\left(x_{i-0.5}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}}\bar{y} + \varkappa^{(-1)}\bar{y}_{\bar{x}}\right] = \\ -\left(\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\right] - \left(\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y\right] - \\ - \left(\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa^{(-1)} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right] - \left(\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa^{(-1)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_{\bar{x}}\right] \leqslant \end{gathered}$$

$$\leqslant \varepsilon\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) -$$
$$- \frac{1}{1+hM_2}\Big(\bar{x}^m a\varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big] - \frac{1}{2(1+hM_2)}\Big(\bar{x}^m a\varkappa, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}}^2\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) -$$
$$- M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 - M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}\sqrt{a\varkappa} y_{\bar{x}}]|_0^2, \tag{58}$$

$$\Big(b^-(\bar{x}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}), \bar{y}\Big) + \Big(b^+ x^m_{i+0.5} a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}\bar{y}\Big) = \Big(b^-\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) +$$
$$+\Big(b^-\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\Big) + \Big(b^+ x^m_{i+0.5} a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ x^m_{i+0.5} a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big), \tag{59}$$

$$\left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y_i^s \bar{\tau}, x^m \bar{y}\right) - \tilde{\beta}_1 x_N^m y_N^{(\sigma)}\bar{y}_N + x_N^m 0.5h\bar{y}_N \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{N,s} y_N^s \bar{\tau} - \tilde{\varkappa}\beta_2 x_N^m \bar{y}_N \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N =$$
$$= \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y_i^s \bar{\tau}, x^m \bar{y}\right] - \tilde{\beta}_1 x_N^m y_N^{(\sigma)}\bar{y}_N - \tilde{\varkappa}\beta_2 x_N^m \bar{y}_N \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y_i^s \bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)}\right] + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y_i^s \bar{\tau}, x^m \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\right] - \tilde{\beta}_1 x_N^m (y_N^{(\sigma)})^2 -$$
$$- \tilde{\beta}_1 x_N^m y_N^{(\sigma)} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N - \tilde{\varkappa}\beta_2 x_N^m y_N^{(\sigma)} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N - \tilde{\varkappa}\beta_2 x_N^m \Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\Big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + \varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\Big)^2 + M_6^{\varepsilon_1}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}} y^s]|_0^2\bar{\tau} -$$
$$- \tilde{\varkappa}\frac{\beta_2}{2} x_N^m \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} (y_N)^2 - \tilde{\varkappa} x_N^m \beta_2 \Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\Big)^2 + M_7^{\varepsilon_2}\Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big). \tag{60}$$

Учитывая (58)–(60), из (57) получим

$$\Big(\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m \bar{y}\Big] \leqslant \varepsilon_1\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + \varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\Big)^2 +$$
$$+M_7^{\varepsilon_2}\Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) + M_6^{\varepsilon_1}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2\bar{\tau} -$$
$$- M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 - M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}\sqrt{a\varkappa} y_{\bar{x}}]|_0^2 + \Big(\bar{x}_N^m - x_N^m\Big)\bar{y}_N \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} -$$
$$- \tilde{\varkappa}\frac{\beta_2}{2} x_N^m \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} (y_N)^2 - \tilde{\varkappa} x_N^m \beta_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\Big)^2 - x^m_{0.5}\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}\bar{y}_0, \tag{61}$$

$$\Big(\bar{\Phi}, x^m \bar{y}\Big] = \Big(\varphi, x^m \bar{y}\Big) + 0.5h x_N^m \bar{y}_N \varphi^+ = \Big(\varphi, x^m \bar{y}\Big) + x_N^m \tilde{\mu}^2 \bar{y}_N =$$
$$= \Big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\Big) + \Big(\varphi, x^m \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\Big) + x_N^m \tilde{\mu}_2 \bar{y}_N \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} x^{\frac{m}{2}} y]|_0^2 + M_8^{\varepsilon_1}\Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) + M_9^{\varepsilon_1}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + x_N^m \tilde{\mu}_2 \bar{y}_N. \tag{62}$$

На основании (56)–(62) из (55) следует

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right] + M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 + \\
+\left(\bar{\bar{\varkappa}}, \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right] + \tilde{\varkappa}\frac{\beta_2}{2}x_N^m\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 + \tilde{\varkappa}x_N^m\beta_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 \leqslant \\
\leqslant 2\varepsilon_1\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2 + 2\varepsilon_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 + \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)x_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}\bar{y}_N - \\
- x_{0.5}^m\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + M_6^{\varepsilon_1}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\bar{\tau} + M_8(\varepsilon_1)\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N + \\
+M_{11}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right).
\end{gathered}
\tag{63}
$$

Рассмотрим третье, четвертое и седьмое слагаемые в правой части (63)

$$
\begin{gathered}
\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}\bar{y}_N - x_{0.5}^m\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N = \\
= x_{0.5}^m\bar{y}_0\left(\tilde{\mu}_1 - \frac{0.5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{0,s}y_0^s\bar{\tau}\right)\right) + \\
+\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\bar{y}_N\left(\tilde{\mu}_2 - \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} - \tilde{\beta}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right) + x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N = \\
= x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\tilde{\mu}_1 + x_{0.5}^m\tilde{\mu}_1\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\right)^2 + \\
+\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{0,s}y_0^s\bar{\tau} + \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{0,s}y_0^s\bar{\tau}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 + \bar{x}_N^m y_N^{(\sigma)}\tilde{\mu}_2 + \\
+\bar{x}_N^m\tilde{\mu}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N - \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\tilde{\beta}_1(y_N^{\sigma})^2 - \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N - \\
-\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)y_N^{(\sigma)}\tilde{\beta}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N - \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\tilde{\beta}_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 \leqslant \\
\leqslant \varepsilon_3\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\right)^2 + \varepsilon_4\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 + M_{12}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4}\left(\tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\right) + \\
+M_{13}^{\varepsilon_3}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0^s)^2\bar{\tau} + M_{14}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4}\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0)^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right) - \\
-\frac{h}{4(m+1)}x_{0.5}^m\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0^2 - \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 - \\
-\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\right)^2 - \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)\tilde{\beta}_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2.
\end{gathered}
\tag{64}
$$

Учитывая преобразования (64), из (63) при

$$
\varepsilon_1 = \frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{4}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\beta_2 x_N^m}{4}, \quad \varepsilon_3 = \frac{h x_{0.5}^m}{8(m+1)}, \quad \varepsilon_4 = (\bar{x}_N^m - x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}
$$

получаем

$$\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big(x^{\frac{m}{2}}y\big)^2\right] + M_{10}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 + \left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right] +$$
$$+\frac{h}{4(m+1)}x^m_{0.5}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0^2 + \left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x^m_N + (\bar{x}^m_N - x^m_N)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 +$$
$$+\frac{0.5h}{2(m+1)}x^m_{0.5}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x^m_N + (\bar{x}^m_N - x^m_N)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_{15}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + M_{16}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2\bar{\tau} + M_{17}\left(\tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2\right) + \tag{65}$$
$$+M_{18}\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^{\sigma}]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 + \left(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0\right)^2\right),$$

где

$$\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2 + \left(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0\right)^2.$$

Преобразуем первое, четвертое, шестое и восьмое слагаемые в левой части (65) с учетом $x^m_{N-0.5} \geqslant \frac{1}{6}x^m_N$:

$$\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right] + \left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x^m_N + (\bar{x}^m_N - x^m_N)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 +$$
$$+\left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right] + \left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x^m_N + (\bar{x}^m_N - x^m_N)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\bar{\varkappa}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right) + \frac{0.5h}{2}x^m_N\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 + \left(\frac{\bar{\varkappa}}{2}, \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right) +$$
$$+\frac{0.5h}{2}x^m_N\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x^m_N + (\bar{x}^m_N - x^m_N)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 +$$
$$+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x^m_N + (\bar{x}^m_N - x^m_N)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 = \left(\frac{\bar{\varkappa}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right) +$$
$$+\left(\frac{\bar{\varkappa}}{2}, \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right) + \left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}\overline{x}^m_N + \frac{0.5h}{2}\overline{x}^m_N\right)\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 +$$
$$+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}\overline{x}^m_N + \frac{0.5h}{2}\overline{x}^m_N\right)\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 \geqslant \frac{M_{18}}{2}\left(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right) +$$
$$+\frac{h}{4}\overline{x}^m_N\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 + \frac{M_{19}}{2}\left(1, \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right) + \frac{h}{4}\overline{x}^m_N\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4}\left(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right) + \frac{0.5h}{12}x^m_N\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2 + \frac{1}{4}\left(1, \left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\right)^2\right) + \tag{66}$$
$$+\frac{0.5h}{12}x^m_N\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\right)^2 \geqslant \frac{1}{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2 + \frac{1}{12}\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2,$$

где

$$M_{19}=\begin{cases}1, \text{если } m=0, m\geqslant 1,\\ \frac{1}{2}, \text{если } m\in(0,1),\ h\leqslant h_0=\sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}.\end{cases}$$

Учитывая (66), из (65) следует

$$\begin{gathered}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_2^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2+\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\leqslant M_{20}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_2^2+\\ +M_{21}\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2\bar{\tau}+M_{22}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big),\end{gathered}\tag{67}$$

где

$$\|x^{\frac{m}{2}}y]|_2^2=\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}]|_0^2+\left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\right)^2.$$

Повторяя рассуждения (30)–(34), из (67) получим оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}]|_1^2\leqslant M\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0]|_2^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\right)\right),\tag{68}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (4), (44) *тогда существуют такие* τ_0, h_0, *что если* $\tau\leqslant\tau_0, h\leqslant h_0$, *то для решения разностной задачи* (49)–(52) *справедлива оценка* (68).

Из оценки (68) следуют единственность и устойчивость решения задачи (49)–(52) по правой части и начальным данным.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (40)–(43), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (49)–(52). Тогда, подставляя $y_i^j=z_i^j+u_i^j$ в соотношения (49)–(52), получим задачу для z:

$$\begin{gathered}\bar{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}a^j z^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}a^j_i z^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)+\\ +\frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}z^{(\sigma)}_{x,i}\right)+\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}z^s_i\bar{\tau}+\Psi^j_i,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{gathered}\tag{69}$$

$$\varkappa_0 a_1 z^{(\sigma)}_{x,0}=\frac{0.5h}{m+1}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-\frac{0.5h}{m+1}\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{0,s}z^s_0\bar{\tau}-\tilde{\nu}_1,\tag{70}$$

$$-\varkappa_N a_N z^{(\sigma)}_{\bar{x},N}=\tilde{\beta}_1 z^{(\sigma)}_N-0.5h\sum_{s\,=\,0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{N,s}z^s_N\bar{\tau}+\tilde{\beta}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2,\tag{71}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{72}$$

где $\Psi=O\Big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\Big)$, $\tilde{\nu}_1=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2=O\big(h^2+\tau^2\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (40)–(43) разностной схемой (49)–(52) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (40)–(43).

В силу того, что задача (69)–(72) линейна, поэтому, применяя оценку (68) к задаче (69)–(72), получаем оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}]|_1^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \left(\|x^{\frac{m}{2}}\Psi^{j'}\|_0^2 + \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2\right), \tag{73}$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Из оценки (73) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (49)–(52) по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи (49)–(52) к решению (40)–(43) в сеточной норме $\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_2^2$ со скоростью $O\left(h^2+\tau^2\right)$ так, что если существуют такие h_0, τ_0, то при $h \leqslant h_0, \tau \leqslant \tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\|_1 \leqslant M\|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1\left(h^2+\tau^2\right) \leqslant \overline{M}\left(h^2+\tau^2\right),$$

где $\overline{M} = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1) имеет вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \int\limits_0^x q(s,t)u(s,t)ds + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1*}$$

если потребовать выполнения условия $|q(x,t)| \leqslant c_2$.

Список литературы

[1] K. B. Oldham, J. Spanier, “The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order”, *New York: Academic Press*, 1974.

[2] K. S. Miller, B. Ross, “An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations”, *New York: Wiley*, Wiley and Sons, 1993.

[3] I. Podlubny, “Fractional differential equations”, *San. Diego: Academic Press*, 1999.

[4] В. Е. Тарасов, *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка*, Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, М., 2011.

[5] А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003.

[6] В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск., 2008.

[7] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, New York., 1982.

[8] С. В. Нерпин, А. Ф. Чудновский, *Энерго и массообмен в системе почва растение-воздух*, Гидрометеоиздат, Л., 1975.

[9] Р. Р. Нигматуллин, “Особенности релаксации системы с “остаточной” памятью”, *Физ. твердого тела*, **27**:5 (1985), 1583–1585.

[10] A. A. Alikhanov, “Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings”, *Appl. Math.*, **219** (2012), 3938—394.

[11] A. A. Alikhanov, “A new difference scheme for the time fractional diffusion equation”, *J. Comput. Phys*, **280** (2015), 424—438.

[12] M KH. Beshtokov, "To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov-Caputo fractional derivative", *Russian Mathematic*, **62**:10 (2018), 1–14.

[13] C. Ji, Z. Z. Sun, "A High-Order Compact Finite Difference Scheme for the Fractional Subdiffusion Equation", *Journal of Scientific ComputingRussian Mathematic*, **64**:3 (2014), 959–985.

[14] Y. Yan, Z. Z. Sun, J. Zhang, "Fast evaluation of the Caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations: a second-order scheme the Fractional Subdiffusion Equation", *Commun. Comput. Phys.*, **22**:4 (2017), 1028–1048.

[15] G. Gao, A. A. Alikhanov, Z. Z. Sun, "The Temporal Second Order Difference Schemes Based on the Interpolation Approximation for Solving the Time Multi-term and Distributed-Order Fractional Sub-diffusion Equations", *Journal of Scientific Computing*, **73**:1 (2017), 93–121.

[16] X. M. Gu, T. Zh. Huang, C. C. Ji, B. Carpentieri, A. A. Alikhanov, "Fast iterative method with a second-order implicit difference scheme for time-space fractional convection-diffusion equation", *J. Sci. Comp.*, **72** (2017), 957–985.

[17] H. Y. Jian, T. Z. Huang, X. L. Zhao, X. L. Zhao, "A fast second-order accurate difference schemes for time distributed-order and Riesz space fractional diffusion equations", *J. Appl. Anal. and Comp.*, **9**:4 (2019), 1028–1048.

[18] M. KH. Beshtokov, "Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann-Liouville fractional derivative", *Differential Equations*, **54**:6 (2018), 758–774.

[19] М. Х. Бештоков, "Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто", *Дифференц. уравнения*, **55**:7 (2019), 919–928.

[20] M. KH. Beshtokov, V. A. Vodakhova, "Nonlocal boundary value problems for a fractional order convection–diffusion equation", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 459–482.

[21] М. Х. Бештоков, Ф. А. Эржибова, "К краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка", *Математические труды*, **23**:1 (2020), 16–36.

[22] M. KH. Beshtokov, M. Z. Khudalov, "Difference methods of the solution of local and nonlocal boundary value problems for loaded equation of thermal conductivity of fractional order", *Stability, Control and Differential Games*, Springer Nature, 2020.

[23] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1983.

[24] А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Устойчивость разностных схем*, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию
24 декабря 2020 г.

Исследование частично выполнено первым соавтором при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

Beshtokov M. KH.[1], *KHudalov M. Z.*[2] Difference methods for solving nonlocal boundary value problems for fractional-order differential convection-diffusion equations with memory effect. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 3–25.

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
[2] North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Russia

ABSTRACT

In the present paper, in a rectangular domain, we study nonlocal boundary value problems for one-dimensional in space differential equations of convection-diffusion of fractional order with a memory effect, in which the unknown function appears in the differential expression and at the same time appears under the integral sign. The emergence of the integral term in the equation is associated with the need to take into account the dependence of the instantaneous values of the characteristics of the described object on their respective previous values, i.e. the effect of its prehistory on the current state of the system.

For the numerical solution of nonlocal boundary value problems, two-layer monotone difference schemes are constructed that approximate these problems on a uniform grid. Estimates of solutions of problems in differential and difference interpretations are derived by the method of energy inequalities. The obtained a priori estimates imply the uniqueness, as well as the continuous and uniform dependence of the solution on the input data of the problems under consideration and, due to the linearity of the problem under consideration, the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem with the rate $O(h^2 + \tau^2)$.

Key words: *Boundary value problems, a priori estimate, differential equation of fractional order, fractional Caputo derivative, convection-diffusion equation, memory effect.*

References

[1] K. B. Oldham, J. Spanier, "The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order", *New York: Academic Press*, 1974.

[2] K. S. Miller, B. Ross, "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations", *New York: Wiley*, Wiley and Sons, 1993.

[3] I. Podlubny, "Fractional differential equations", *San. Diego: Academic Press*, 1999.

[4] V. E. Tarasov, *Modeli teoreticheskoi fiziki s integro-differentsirovaniem drobnogo poriadka*, Izhevsk: Izhevskii institut komp'iuternykh issledovanii, M., 2011.

[5] A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003.

[6] V. V. Uchaikin, *Metod drobnykh proizvodnykh*, Artishok, Ul'ianovsk., 2008.

[7] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, New York., 1982.

[8] S. V. Nerpin, A. F. Chudnovskii, *Energo i massoobmen v sisteme pochva rastenie-vozdukh*, Gidrometeoizdat, L., 1975.

[9] R. R. Nigmatullin, "Osobennosti relaksatsii sistemy s "ostatochnoi" pamiat'iu", *Fiz. tverdogo tela*, **27**:5 (1985), 1583–1585.

[10] A. A. Alikhanov, "Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings", *Appl. Math.*, **219** (2012), 3938—394.

[11] A. A. Alikhanov, "A new difference scheme for the time fractional diffusion equation", *J. Comput. Phys*, **280** (2015), 424—438.

[12] M KH. Beshtokov, "To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov-Caputo fractional derivative", *Russian Mathematic*, **62**:10 (2018), 1–14.

[13] C. Ji, Z. Z. Sun, "A High-Order Compact Finite Difference Scheme for the Fractional Subdiffusion Equation", *Journal of Scientific ComputingRussian Mathematic*, **64**:3 (2014), 959–985.

[14] Y. Yan, Z. Z. Sun, J. Zhang, "Fast evaluation of the Caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations: a second-order scheme the Fractional Subdiffusion Equation", *Commun. Comput. Phys.*, **22**:4 (2017), 1028–1048.

[15] G. Gao, A. A. Alikhanov, Z. Z. Sun, "The Temporal Second Order Difference Schemes Based on the Interpolation Approximation for Solving the Time Multi-term and Distributed-Order Fractional Sub-diffusion Equations", *Journal of Scientific Computing*, **73**:1 (2017), 93–121.

[16] X. M. Gu, T. Zh. Huang, C. C. Ji, B. Carpentieri, A. A. Alikhanov, "Fast iterative method with a second-order implicit difference scheme for time-space fractional convection-diffusion equation", *J. Sci. Comp.*, **72** (2017), 957–985.

[17] H. Y. Jian, T. Z. Huang, X. L. Zhao, X. L. Zhao, "A fast second-order accurate difference schemes for time distributed-order and Riesz space fractional diffusion equations", *J. Appl. Anal. and Comp.*, **9**:4 (2019), 1028–1048.

[18] M. KH. Beshtokov, "Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann-Liouville fractional derivative", *Differential Equations*, **54**:6 (2018), 758–774.

[19] M. Kh. Beshtokov, "Kraevye zadachi dlia psevdoparabolicheskogo uravneniia s drobnoi proizvodnoi Kaputo", *Differents. uravneniia*, **55**:7 (2019), 919–928.

[20] M. KH. Beshtokov, V. A. Vodakhova, "Nonlocal boundary value problems for a fractional order convection–diffusion equation", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 459–482.

[21] M. Kh. Beshtokov, F. A. Erzhibova, "K kraevym zadacham dlia integro-differentsial'nykh uravnenii drobnogo poriadka", *Matematicheskie trudy*, **23**:1 (2020), 16–36.

[22] M. KH. Beshtokov, M. Z. Khudalov, "Difference methods of the solution of local and nonlocal boundary value problems for loaded equation of thermal conductivity of fractional order", *Stability, Control and Differential Games*, Springer Nature, 2020.

[23] A. A. Samarskii, *Teoriia raznostnykh skhem*, Nauka, M., 1983.

[24] A. A. Samarskii, A. V. Gulin, *Ustoichivost' raznostnykh skhem*, Nauka, M., 1973.