Е. В. Мамонтов, Негладкие решения 2-подмоделей класса E уравнений газовой динамики, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2003, том 6, номер 1, 72–76

Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь–март, 2003. Том VI, № 1(13)

УДК 533:517.958

НЕГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ 2–ПОДМОДЕЛЕЙ КЛАССА E УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ[*)]

Е. В. Мамонтов

Рассматриваются эволюционные инвариантные подмодели с двумя независимыми переменными уравнений газовой динамики. Обсуждается вопрос о структуре сильных и слабых разрывов решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. Уравнения подмоделей переписываются в виде законов сохранения, что позволяет выписать условия на сильных разрывах. Выводятся и анализируются транспортные уравнения — обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию вдоль характеристик слабых разрывов.

Как известно [1], система уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + A \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

где $D = \partial_t + \mathbf{u}\cdot\nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, $A(\rho, p) = \rho c^2$ — заданная функция ($c = c(\rho, p)$ — скорость звука), допускает 11-параметрическую группу Ли.

Инвариантные 2-подмодели (подмодели с двумя независимыми переменными) можно разделить на два класса: эволюционные (класса E) и стационарные (класса S). В настоящей работе анализируются решения с сильными и слабыми разрывами для подмоделей класса E. Системы уравнений класса E имеют вид

$$\begin{gathered} U_t + UU_\xi + b/RP_\xi = a_1, \quad V_t + UV_\xi = a_2, \quad W_t + UW_\xi = a_3, \\ R_t + UR_\xi + RU_\xi = Ra_4, \quad P_t + UP_\xi + A(R,P)U_\xi = A(R,P)a_4, \end{gathered} \tag{1}$$

где $b = b(t) > 0$; функции $a_i = a_i(t, \xi, U, V, W)$ — линейные или квадратичные по переменным U, V, W; $A(R, P) = Rc^2$ — заданная функция ($c = c(R, P)$ — скорость звука). В случае политропного газа $A = \gamma P$. Инвариантные переменные ξ, U, V, W, R, P для каждой подмодели описаны в [2].

Характеристики системы (1) определяются равенствами

$$\frac{d\xi}{dt} = U \equiv \lambda_1, \quad \frac{d\xi}{dt} = U - \sqrt{\frac{bA}{R}} \equiv \lambda_2, \quad \frac{d\xi}{dt} = U + \sqrt{\frac{bA}{R}} \equiv \lambda_3.$$

Назовем характеристики, определяемые равенством $\dfrac{d\xi}{dt} = \lambda_k$, *характеристиками k-го семейства.*

[*)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00550, 00–15–96163).

1. Решения с сильными разрывами. Запишем систему уравнений (1) в виде законов сохранения:

$$\begin{gathered}R_t + (RU)_\xi = Ra_4, \quad (RU)_t + (RU^2 + bP)_\xi = Ra_1 + RUa_4,\\ (RV)_t + (RUV)_\xi = Ra_2 + RVa_4, \quad (RW)_t + (RUW)_\xi = Ra_3 + RWa_4,\\ (Re)_t + (U(Re + bP))_\xi = a_1RU + a_2RV + a_3RW + a_4(Re + bP) + b'R\varepsilon,\end{gathered} \tag{2}$$

где $e = \dfrac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2) + b\varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(R,P)$ — внутренняя энергия газа. В случае политропного газа $\varepsilon = \dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{P}{R}$. Предположим, что решение системы (1) имеет сильный разрыв на линии $\xi = h(t)$. Пусть символ скачка $[f] = f_1 - f_2$ означает разность предельных значений какой-либо величины f с разных сторон линии разрыва. Из (2) стандартным образом выводятся условия на разрыве:

$$\begin{gathered}[R]h' - [RU] = 0, \quad [RU]h' - [RU^2 + bP] = 0, \quad [RV]h' - [RUV] = 0,\\ [RW]h' - [RUW] = 0, \quad [Re]h' - [U(Re + bP)] = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Введем относительную скорость $u = U - h'$, тогда

$$\begin{gathered}[Ru] = 0, \quad Ru[U] + b[P] = 0,\\ Ru[V] = 0, \quad Ru[W] = 0, \quad Ru[e] + b[PU] = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

т. е. величина Ru непрерывна.

В предположении $R \neq 0$ возможны два случая:

а) $u = 0$ — контактный разрыв, $[P] = 0$, $[U] = 0$;

б) $u \neq 0$ — ударная волна, $[V] = 0$, $[W] = 0$.

2. Решения со слабыми разрывами. Транспортные уравнения. Запишем систему (1) в каноническом виде, считая $A \neq 0$:

$$\begin{gathered}\partial_1 V = a_2, \quad \partial_1 W = a_3, \quad \partial_1 R - \frac{R}{A}\partial_1 P = 0,\\ \partial_2 U - \sigma\partial_2 P = a_1 - A\sigma a_4, \quad \partial_3 U + \sigma\partial_3 P = a_1 + A\sigma a_4,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\partial_1 = \partial_t + \lambda_1\partial_\xi$, $\partial_2 = \partial_t + \lambda_2\partial_\xi$, $\partial_3 = \partial_t + \lambda_3\partial_\xi$, $\sigma = \sqrt{b/(RA)}$. Заметим, что в каждом уравнении канонической системы присутствует дифференцирование только по одному направлению.

Допустим, что решение системы непрерывно и обладает непрерывными производными всюду, кроме некоторых кусочно-дифференцируемых линий, на которых первые производные имеют скачок. Пусть $\xi = \xi(t)$ — уравнение линии разрыва первых производных решения. Обозначим (знак $*$ означает транспонирование)

$$\begin{gathered}p = p(\xi,t) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^* = \frac{\partial}{\partial\xi}(U,V,W,R,P)^*(\xi,t),\\ q = q(\xi,t) = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)^* = \frac{\partial}{\partial t}(U,V,W,R,P)^*(\xi,t),\\ p^\pm = p^\pm(\xi(t),t) = p(\xi(t) \pm 0, t), \quad q^\pm = q^\pm(\xi(t),t) = q(\xi(t) \pm 0, t),\\ \mathcal{P}_1 = p_2, \quad \mathcal{P}_2 = p_3, \quad \mathcal{P}_3 = p_4 - \frac{R}{A}p_5, \quad \mathcal{P}_4 = p_1 - \sigma p_5, \quad \mathcal{P}_5 = p_1 + \sigma p_5,\\ [p] = p^+ - p^-, \quad [q] = q^+ - q^-, \quad \eta_k = [\mathcal{P}_k] \equiv \mathcal{P}_k^+ - \mathcal{P}_k^-, \quad k = 1,\dots,5,\\ \partial_j = \partial_t + \lambda_j\partial_\xi, \quad j = 1,2,3.\end{gathered}$$

Заметим, что
$$[q] = -\xi'(t)[p]. \tag{6}$$

Выведем транспортные уравнения — уравнения, описывающие эволюцию величин $\eta_k = [\mathcal{P}_k]$. Продифференцируем уравнения системы (5) по ξ:
$$\partial_1\mathcal{P}_1 = \mathcal{F}_1, \quad \partial_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{F}_2, \quad \partial_1\mathcal{P}_3 = \mathcal{F}_3, \quad \partial_2\mathcal{P}_4 = \mathcal{F}_4, \quad \partial_3\mathcal{P}_5 = \mathcal{F}_5. \tag{7}$$
При этом
$$\mathcal{F}_1 = a_{2\xi} + a_{2V}\mathcal{P}_1 + a_{2W}\mathcal{P}_2 + \frac{a_{2U}}{2}\mathcal{P}_4 + \frac{a_{2U}}{2}\mathcal{P}_5 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_5,$$
$$\mathcal{F}_2 = a_{3\xi} + a_{3V}\mathcal{P}_1 + a_{3W}\mathcal{P}_2 + \frac{a_{3U}}{2}\mathcal{P}_4 + \frac{a_{3U}}{2}\mathcal{P}_5 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_5,$$
$$\mathcal{F}_3 = \left(a_4\left(1 - \frac{RA_R}{A}\right) + \left(\frac{RA_R}{2A} - 1\right)(\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_5)\right)\mathcal{P}_3,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4 = {}&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)\mathcal{P}_4^2\\ &+ \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R}\right)\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2}\right)\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5\\ &+ \left(\frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} - \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4}\left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1\right)\right)\mathcal{P}_4 + \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_5 = {}&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)\mathcal{P}_5^2\\ &- \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R}\right)\mathcal{P}_3\mathcal{P}_5 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2}\right)\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5\\ &+ \left(\frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} + \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4}\left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1\right)\right)\mathcal{P}_5 + \ldots.\end{aligned}$$

Многоточием обозначены выражения, не содержащие $\mathcal{P}_4$ в определении $\mathcal{F}_4$, и выражения, не содержащие $\mathcal{P}_5$ в определении $\mathcal{F}_5$.

Запишем систему (7) по разные стороны разрыва и вычтем полученные уравнения.

Для характеристик, задаваемых уравнением $\xi' = \lambda_1$, имеют место равенства $\eta_4 = \eta_5 = 0$, $\mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5$, и, следовательно,
$$\partial_1\eta_1 = \left(a_{2V} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_5\right)\eta_1 + a_{2W}\eta_2,$$
$$\partial_1\eta_2 = a_{3V}\eta_1 + \left(a_{3W} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_5\right)\eta_2,$$
$$\partial_1\eta_3 = \left(a_4\left(1 - \frac{RA_R}{A}\right) + \left(\frac{RA_R}{2A} - 1\right)(\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_5)\right)\eta_3.$$
Для характеристик, задаваемых уравнением $\xi' = \lambda_2$, получаем $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_5 = 0$, $\mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5$, откуда
$$\begin{aligned}\partial_2\eta_4 = {}&\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)(\mathcal{P}_4^+ + \mathcal{P}_4^-) + \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R}\right)\mathcal{P}_3\right.\\ &\left.+\left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2}\right)\mathcal{P}_5 + \frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} - \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4}\left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1\right)\right)\eta_4.\end{aligned}$$

Для характеристик, задаваемых уравнением $\xi' = \lambda_3$, получаем $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, $\mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4$, откуда

$$\partial_3\eta_5 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)(\mathcal{P}_5^+ + \mathcal{P}_5^-) - \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R}\right)\mathcal{P}_3\right.$$
$$\left.+\left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2}\right)\mathcal{P}_4 + \frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} + \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4}\left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1\right)\right)\eta_5.$$

Пусть решение с «отрицательной» стороны характеристики известно. Мы получаем тогда следующие соотношения.

Для характеристик первого семейства имеем

$$\partial_1\eta_1 = \left(a_{2V} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_5\right)\eta_1 + a_{2W}\eta_2, \tag{8}$$

$$\partial_1\eta_2 = a_{3V}\eta_1 + \left(a_{3W} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_5\right)\eta_2, \tag{9}$$

$$\partial_1\eta_3 = \left(a_4\left(1 - \frac{RA_R}{A}\right) + \left(\frac{RA_R}{2A} - 1\right)(\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_5)\right)\eta_3, \tag{10}$$

$$\mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4, \quad \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5. \tag{11}$$

Для характеристик второго семейства имеем

$$\partial_2\eta_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)\eta_4^2 + \left(\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)\mathcal{P}_4^-\right.$$
$$+\left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R}\right)\mathcal{P}_3 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2}\right)\mathcal{P}_5$$
$$\left.+\frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} - \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4}\left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1\right)\right)\eta_4, \tag{12}$$

$$\mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3, \quad \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5. \tag{13}$$

Для характеристик третьего семейства имеем

$$\partial_3\eta_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)\eta_5^2 + \left(\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2}\right)\mathcal{P}_5^-\right.$$
$$-\left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R}\right)\mathcal{P}_3 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2}\right)\mathcal{P}_4$$
$$\left.+\frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} + \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4}\left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1\right)\right)\eta_5, \tag{14}$$

$$\mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3, \quad \mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4. \tag{15}$$

Уравнения (8)–(15) есть искомые транспортные уравнения.

Используя определение величин $\mathcal{P}_k$ и равенства (6), (11), (13), (15), находим, что на слабых разрывах вдоль характеристик первого семейства инвариантны величины

$$U_\xi, \quad U_t, \quad P_\xi, \quad P_t;$$

на слабых разрывах вдоль характеристик второго семейства инвариантны величины

$$V_\xi, \quad V_t, \quad W_\xi, \quad W_t, \quad R_\xi - \frac{R}{A}P_\xi, \quad R_t - \frac{R}{A}P_t, \quad U_\xi + \sigma P_\xi, \quad U_t + \sigma P_t;$$

на слабых разрывах вдоль характеристик третьего семейства инвариантны величины

$$V_\xi, \quad V_t, \quad W_\xi, \quad W_t, \quad R_\xi - \frac{R}{A}P_\xi, \quad R_t - \frac{R}{A}P_t, \quad U_\xi - \sigma P_\xi, \quad U_t - \sigma P_t.$$

Уравнения (8), (9) образуют систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{12}\eta_2, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \alpha_{21}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \lambda_1\partial_\xi.$$

Задание величин $\eta_1(t_0)$, $\eta_2(t_0)$ при некотором t_0 однозначно определяет ее решение.

Уравнение (10) — линейное уравнение вида

$$\frac{d\eta_3}{dt} = a(t)\eta_3, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \lambda_1\partial_\xi$$

и может быть проинтегрировано:

$$\eta_3(t) = \eta_3(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}.$$

Задание $\eta_3(t_0)$ при некотором t_0 однозначно определяет $\eta_3(t)$.

Уравнения (12), (14) представляют собой уравнения Бернулли вида

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \alpha_k(t)\eta_k^2 + \beta(t)\eta_k, \; k = 4,5, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \lambda_j\partial_\xi, \; j = 1,2,$$

и также могут быть проинтегрированы:

$$\eta_k(t) = \frac{\eta_k(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} \beta_k(\mu)\,d\mu}}{1 - \eta_k(t_0)\int\limits_{t_0}^{t} \alpha_k(\tau)e^{\int\limits_{t_0}^{\tau} \beta_k(\nu)d\nu}\,d\tau}, \quad k = 4,5.$$

Задание величин $\eta_4(t_0)$, $\eta_5(t_0)$ при некотором t_0 снова однозначно определяет ее решение.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова и участников программы ПОДМОДЕЛИ С. В. Хабирова, А. П. Чупахина, С. В. Головина, А. С. Павленко за полезное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1.. *Овсянников Л. В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, №4. С. 30–55.

2. *Мамонтов Е. В.* Групповые свойства 2-подмоделей класса E уравнений газовой динамики// Прикл. механика и техн. физика. 2001. Т. 42, №1. С. 33–39.

3. *Овсянников Л. В.* Инвариантные интегральные законы сохранения // Докл. РАН. 1996. Т. 351, №5. С. 599–602.

г. Новосибирск
Институт гидродинамики
им. М. А. Лаврентьева СО РАН
E-mail: mamontov@hydro.nsc.ru

Статья поступила 8 октября 2002 г.