А. С. Бобкова, Поведение решений многомерных сингулярно возмущенных систем с одной быстрой переменной,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 1, 23–32

https://www.mathnet.ru/de11206

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 1, с. 23-32

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ БЫСТРОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2005 г. А. С. Бобкова

При изучении сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений выясняется, что существует несколько типов поведения их траекторий. В работе [1, с. 57] показано, что при определенных предположениях сингулярно возмущенная система с малым параметром при части производных может быть представлена как C^1-возмущение соответствующей вырожденной системы. Нарушение же этих предположений, как правило, дает начало так называемым траекториям-уткам.

В работе [2] рассматривался случай сингулярно возмущенной системы с двумя медленными переменными (и одной быстрой) и были сформулированы достаточные условия возникновения траекторий-уток. В [3] показано, что при выполнении определенных предположений сингулярно возмущенная система с $n \geq 3$ медленными переменными (и одной быстрой) имеет целое $(n-2)$-параметрическое семейство траекторий-уток с одинаковым нулевым приближением при стремлении малого параметра к нулю.

Данная работа является продолжением [3] в том смысле, что здесь доказывается невозможность возникновения траекторий-уток сингулярно возмущенной системы с произвольным числом медленных переменных (и одной быстрой) при нарушении некоторых условий из [3].

Аналогичный вопрос изучался в [4], но в случае скалярного сингулярно возмущенного уравнения первого порядка с дополнительным параметром в правой части. В работе [5] рассматривалась система произвольной размерности, но исследовалось поведение только части траекторий, не являющихся утками, точнее говоря, тех, нулевым приближением которых при стремлении малого параметра к нулю являются составные решения соответствующей вырожденной системы.

Ниже без дополнительных пояснений используются понятия и термины, введенные в работах [1, 6].

1. Рассмотрим сингулярно возмущенную систему с одной быстрой и n медленными переменными

$$\dot{x} = f(x,y), \quad x \in R^n, \quad \varepsilon\dot{y} = g(x,y), \quad y \in R, \tag{1}$$

где точка обозначает производную по времени, а $0 < \varepsilon \ll 1$. Предположим, что функции f и g бесконечно дифференцируемы в области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, где $x \in \Omega_x$ и $y \in \Omega_y$, в которой данная система и будет исследоваться.

В работе [3] сформулированы достаточные условия, гарантирующие возникновение траекторий-уток системы (1). Напомним их, не вдаваясь в особые детали.

Условие 1. Уравнение $g(x,y) = 0$ имеет ровно два решения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega_x)$, а отвечающие им поверхности $\Gamma_1 = \{(x,y) : x \in \Omega_x, \ y = \varphi(x)\}$ и $\Gamma_2 = \{(x,y) : x \in \Omega_x, \ y = \psi(x)\}$ медленных движений пересекаются общим образом по некоторой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности l (см. рис. 1 в [3]). Последнее означает, что в каждой точке этой поверхности выполняется неравенство $\nabla\varphi(x) - \nabla\psi(x) \neq 0$. Считаем еще, что $g''_{yy} \neq 0$ в точках l.

Условие 2. При $(x,y) \in \Gamma_1 \setminus l$ выполняется неравенство $g'_y(x,y) \neq 0$ и непустым является каждое из множеств Γ_1^- и Γ_1^+, где $\Gamma_1^- = \{(x,y) \in \Gamma_1 : g'_y(x,y) < 0\}$, $\Gamma_1^+ = \{(x,y) \in \Gamma_1 : g'_y(x,y) > 0\}$.

Условие 3. Поверхность Γ_1 целиком состоит из траекторий вырожденной системы

$$\dot{x} = f(x,y), \quad g(x,y) = 0,$$

точнее говоря, из части траекторий этой системы, для которых $y = \varphi(x)$, пересекающих l общим образом в направлении из Γ_1^- в Γ_1^+.

В работе [3] доказано, что уткой является та траектория системы (1), нулевым приближением которой при $\varepsilon \to 0$ является траектория вырожденной системы, лежащая на Γ_1 (т.е. некоторый ее участок с концами на Γ_1^- и Γ_1^+) и проходящая через определенную точку (x_0, y_0) на l. Такая точка определяется следующим образом.

Зафиксируем некоторую точку (x_0, y_0) на l. Зададим на поверхности l гладкую параметризацию $l = \{(x = \gamma(s), y = \varphi(\gamma(s))),\ a_i \le s_i \le b_i,\ i = \overline{1, n-1}\}$, где $s = (s_1, \ldots, s_{n-1})^{\mathrm{T}}$, $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})^{\mathrm{T}}$, $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})^{\mathrm{T}}$. Выберем такое значение s_0 вектора-параметра s, что $(x_0, y_0) = (\gamma(s_0), \varphi(\gamma(s_0)))$. Введем функцию

$$\Phi(s) = (\nabla\varphi(x), f(x, \varphi(x)))|_{x=\gamma(s)}.$$

Для существования траектории-утки системы (1), нулевым приближением которой при $\varepsilon \to 0$ является траектория вырожденной системы, проходящая через точку (x_0, y_0), достаточно выполнения следующего условия.

Условие 4. Имеют место соотношения $\Phi(s_0) = 0$, $\nabla\Phi(s_0) \ne 0$.

В настоящей работе мы изучим качественный характер поведения решений системы (1), когда условие 4 не выполняется, т.е. когда

$$\Phi(s_0) = (\nabla\varphi(x), f(x, \varphi(x)))|_{x=\gamma(s_0)} \ne 0,$$

что в совокупности с предыдущими результатами даст практически полное представление о рассматриваемой особенности. Условия 1–3 оставим без изменений, так как они определяют только постановку задачи.

Сведем задачу к локальной. Для этого рассмотрим поведение при увеличении t $(t > 0)$ произвольно выбранной нами траектории системы (1), начальные значения (x_*, y_*) которой при $t = 0$ лежат в области влияния устойчивой части поверхности медленных движений Γ_1^-. Это означает, что если $y(\tau)$ – решение задачи “в быстром времени” $\tau = t/\varepsilon$ (см. [7, с. 20])

$$dy/d\tau = g(x_*, y), \quad y(0) = y_*, \tag{2}$$

то выполняется предельное соотношение

$$y(\tau) \to \varphi(x_*) \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty. \tag{3}$$

Согласно общим результатам монографии [7, с. 31, 57], сначала (на отрезке вида $0 \le t \le$ $\le N\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$, где $N = \mathrm{const} > 0$) происходит так называемое быстрое движение в асимптотически малой окрестности прямой $x = x_*$, описываемое задачей Коши (2), т.е. осуществляется “падение” рассматриваемой траектории на устойчивое многообразие Γ_1^-, а затем движение продолжается в его окрестности порядка ε примерно по закону $(x(t), y(t))$, $t \ge 0$, где $y(t) = \varphi(x(t))$, а $x(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, \varphi(x)), \quad x|_{t=0} = x_*.$$

Добавим, что в силу условия 3 решение данной задачи с течением времени пересекает общим образом проекцию поверхности l на плоскость $y = 0$ в некоторой точке x_0, для которой считаем выполненным неравенство $\Phi(s_0) \ne 0$.

Следующий этап доказательства – приведение исходной системы (1) в окрестности точки $(x_0, \varphi(x_0))$ к так называемой нормальной форме. Без ограничения общности будем считать эту точку началом координат. Считаем также, что $g''_{yy}(0,0) > 0$ и $(\nabla\varphi(0) - \nabla\psi(0), f(0,0)) > 0$. Выполним в системе (1) замены

$$y - \varphi(x) = \varkappa(z - \xi), \quad y - \psi(x) = \varkappa(z + \xi), \quad \varkappa = [(\nabla\varphi(0) - \nabla\psi(0), f(0,0))/(2g''_{yy}(0,0))]^{1/2},$$

а остальные $n-1$ переменных $(v_1,\dots,v_{n-1})$ выберем следующим образом. Зафиксируем произвольно точку $(x,\varphi(x))$ и выпустим из нее траекторию $(x(t),\varphi(x(t)))$ вырожденной системы

$$\dot{x}=f(x,\varphi(x)). \tag{4}$$

Согласно условию 3, существует единственная точка пересечения данной траектории с поверхностью l. Обозначим через $s=s(x)$ значение параметра s, отвечающее этой точке пересечения, и положим $s(x)-s_0=v$. Таким образом, значение параметра $s(x)$ однозначно определяет траекторию системы (4), лежащую на Γ_1.

Перейдем в системе (4) к новым координатам (ξ,v), тогда система для v примет вид $\dot{v}=0$, а интересующее нас решение системы (4), проходящее через точку $(x_0,\varphi(x_0))$, в новых координатах запишем следующим образом: $\xi=\xi(t)$, $v=0$.

Итак, запишем систему (1) в новых координатах (z,ξ,v). Далее возьмем ξ за новое время, что возможно в силу условия 1 пересечения поверхностей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ общим образом. В итоге получим систему

$$\varepsilon dz/d\xi=\gamma(z,\xi,v)(z^2-\xi^2)+\varepsilon\Delta_1(z,\xi,v),\quad dv/d\xi=(z-\xi)\Delta_2(z,\xi,v), \tag{5}$$

где γ и Δ_j – гладкие (в малой окрестности начала координат) функции и выполнено условие $\gamma(0,0,0)=1$. Заметим, что $\Phi(s_0)=0\Leftrightarrow\Delta_1(0,0,0)=1$. Следовательно, мы будем изучать систему (1) при $\Delta_1(0,0,0)\neq 1$.

Сделав в системе (5) замены $z=\sqrt{\varepsilon}\eta$, $\xi=\sqrt{\varepsilon}\tau$, $v=\sqrt{\varepsilon}\alpha$, сократив первое уравнение на ε и положив $\varepsilon=0$, придем к системе

$$d\eta/d\tau=\eta^2-\tau^2+\Delta,\quad d\alpha/d\tau=0,$$

где $\Delta=\Delta_1(0,0,0)$. Рассмотрим отдельно первое уравнение этой системы

$$d\eta/d\tau=\eta^2-\tau^2+\Delta. \tag{6}$$

Ниже будет показано, что оно играет основную роль в решении нашей задачи. Уравнение (6) полностью исследовано в работе [4]. Для удобства приведем здесь формулировки лемм 1–3, доказательства которых можно найти в [4].

Нас интересуют два специальных решения $\eta=\eta_\pm(\tau,\Delta)$ уравнения (6), обладающие свойствами

$$\eta_-(\tau,\Delta)=\tau+O(1/\tau)\quad\text{при}\quad\tau\to-\infty,\qquad\eta_+(\tau,\Delta)=\tau+O(1/\tau)\quad\text{при}\quad\tau\to\infty.$$

Ясно, что если, например, известна функция $\eta_-(\tau,\Delta)$, то $\eta_+(\tau,\Delta)=-\eta_-(-\tau,\Delta)$. Поэтому приведем некоторые свойства только решения $\eta=\eta_-(\tau,\Delta)$.

Лемма 1. *Уравнение (6) имеет единственное решение* $\eta=\eta_-(\tau,\Delta)$ *с асимптотикой*

$$\eta_-(\tau,\Delta)=\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{2k-1}}{\tau^{2k-1}}\quad\text{при}\quad\tau\to-\infty,\qquad\beta_1=-\frac{\Delta-1}{2}, \tag{7}$$

определенное на некотором промежутке $-\infty<\tau\le-\delta$, $\delta>0$.

Лемма 2. *При* $\Delta>1$ *решение* $\eta=\eta_-(\tau,\Delta)$ *определено на полубесконечном интервале* $I=\{\tau:\ -\infty<\tau<\tau_0(\Delta)\}$, *причем при всех* $\tau\in I$ *справедливы неравенства*

$$\partial\eta_-/\partial\tau>0,\quad\partial\eta_-/\partial\Delta>0, \tag{8}$$

а при $\tau\to\tau_0-0$ *– асимптотическое разложение*

$$\eta_-(\tau,\Delta)=\frac{1}{\tau_0-\tau}+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k(\tau_0-\tau)^k. \tag{9}$$

Функция $\tau_0 = \tau_0(\Delta)$ *обладает следующими свойствами:* $\tau_0'(\Delta) < 0$ *при* $\Delta > 1$,

$$\lim_{\Delta\to+\infty} \tau_0(\Delta) = -\infty, \quad \lim_{\Delta\to 1+0} \tau_0(\Delta) = +\infty. \tag{10}$$

Лемма 3. *При* $\Delta < 1$ *решение* $\eta = \eta_-(\tau, \Delta)$ *определено на интервалах* $-\infty < \tau < \infty$ *и допускает асимптотическое разложение*

$$\eta_-(\tau, \Delta) = -\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_{2k-1}}{\tau^{2k-1}} \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \quad \varkappa_1 = \frac{\Delta + 1}{2}. \tag{11}$$

2. Построим асимптотику решения системы (5) с выбранным начальным значением (x_*, y_*), предполагая, что $\Delta \neq 1$. Из работы [3] известно, что равномерно на $-q \le \xi \le q_0$ (при любом фиксированном достаточно малом $q_0 > 0$) для такой траектории справедливо асимптотическое представление

$$z(\xi, \Delta, \varepsilon) = \xi + \varepsilon z_1(\xi, \Delta) + O(\varepsilon^2), \quad v(\xi, \Delta, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{12}$$

где

$$z_1 = (1 - \Delta_1(\xi, \xi, 0))/(2\xi\gamma(\xi, \xi, 0)). \tag{13}$$

Если же $\xi \to -0$, то первая формула из (12) заведомо не работает, так как из (13) следует

$$\begin{gathered} z_1 = (1 - \Delta)/(2\xi) + \varkappa_0 + O(\xi), \\ \varkappa_0 = -(1 - \Delta)(\gamma_z'(0,0,0) + \gamma_\xi'(0,0,0))/2 - (\Delta_{1z}'(0,0,0) + \Delta_{1\xi}'(0,0,0))/2. \end{gathered} \tag{14}$$

Однако при соответствующей корректировке для $\xi \le -\varepsilon^{1/4}$ она будет иметь следующий вид.

Теорема 1. *Равномерно на* $-q \le \xi \le -\varepsilon^{1/4}$ *имеют место асимптотические равенства*

$$z(\xi, \Delta, \varepsilon) = \xi + \varepsilon z_1(\xi, \Delta) + O(\varepsilon^{5/4}), \quad v = O(\varepsilon^{3/4}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{15}$$

Доказательство. Положим в системе (5) $z = \xi + \varepsilon z_1 + g$, $v = \varepsilon\delta + h$, где $\varepsilon\delta = v(-q, \Delta, \varepsilon)$, что возможно в силу второго равенства из (12). Для g и h получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \varepsilon dg/d\xi = a(\xi, \varepsilon, \Delta)g + (b(\xi, \varepsilon, \Delta), h) + C(g, h, \xi, \varepsilon, \Delta) + \varepsilon^2 u_*(\xi, \varepsilon, \Delta), \\ dh/d\xi = gD(g, h, \xi, \varepsilon, \Delta) + (G(\xi, \varepsilon, \Delta), h) + \varepsilon u_{**}(\xi, \varepsilon, \Delta), \end{gathered} \tag{16}$$

где гладкие по (g, h, Δ) функции $a, b, C, D, G, u_*, u_{**}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} a(\xi, \varepsilon, \Delta) = a_0(\xi) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad a_0(\xi) = 2\xi + O(\xi^2), \quad b_j(\xi, \varepsilon, \Delta) = O(\varepsilon), \quad j = \overline{1, n-1}, \\ C(0,0,\xi,\varepsilon,\Delta) \equiv C_g'(0,0,\xi,\varepsilon,\Delta) \equiv C_{h_1}'(0,0,\xi,\varepsilon,\Delta) \equiv \ldots \equiv C_{h_{n-1}}'(0,0,\xi,\varepsilon,\Delta) \equiv 0, \\ |D(g,h,\xi,\varepsilon,\Delta)| \le M, \quad G(\xi,\varepsilon,\Delta) = O(\varepsilon^{3/4}), \quad |u_*(\xi,\varepsilon,\Delta)| \le M/\xi^2, \quad |u_{**}(\xi,\varepsilon,\Delta)| \le M/\xi. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь и ниже одной и той же буквой M обозначаются различные не зависящие от ε и ξ положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Перейдем от дифференциальной системы (16) к интегральной системе

$$g = g(-q,\varepsilon,\Delta)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_{-q}^{\xi} a(s,\varepsilon,\Delta)ds\right\} + \varepsilon^{-1}\int\limits_{-q}^{\xi}\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_{\tau}^{\xi} a(s,\varepsilon,\Delta)ds\right\}[(b(\tau,\varepsilon,\Delta),h) +$$

$$+ C(g,h,\tau,\varepsilon,\Delta) + \varepsilon^2 u_*(\tau,\varepsilon,\Delta)]\,d\tau, \tag{18}$$

$$h = \int\limits_{-q}^{\xi}[gD(g,h,s,\varepsilon,\Delta) + (G(s,\varepsilon,\Delta),h)]\,ds + \varepsilon\int\limits_{-q}^{\xi} u_{**}(s,\varepsilon,\Delta)\,ds.$$

В силу первого равенства из (12) имеет место соотношение

$$g(-q,\varepsilon,\Delta) = z(-q,\varepsilon,\Delta) + q - \varepsilon z_1(-q,\Delta) = O(\varepsilon^2).$$

Объединяя последнее со свойствами (17) и оценкой

$$\max_{-q\le\xi\le-\varepsilon^{1/4}} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-q}^{\xi}\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\xi} a(s,\varepsilon,\Delta)ds\right\}d\tau \le \frac{M}{\varepsilon^{1/4}},$$

заключаем, что оператор, порожденный правой частью интегральной системы (18), преобразует в себя множество $B_1\times\cdots\times B_n$, где B_j, $j=\overline{1,n}$, – шары пространства $C[-q,-\varepsilon^{1/4}]$ с центрами в нуле и радиусами порядка $\varepsilon^{5/4},\varepsilon^{3/4},\ldots,\varepsilon^{3/4}$ соответственно, и является сжимающим. Теорема доказана.

Следующий этап связан с заменами $z=\sqrt{\varepsilon}\eta$, $\xi=\sqrt{\varepsilon}\tau$, $v=\sqrt{\varepsilon}\alpha$ в системе (5), что приводит к системе

$$d\eta/d\tau = \gamma(\sqrt{\varepsilon}\eta,\sqrt{\varepsilon}\tau,\sqrt{\varepsilon}\alpha)(\eta^2-\tau^2)+\Delta_1(\sqrt{\varepsilon}\eta,\sqrt{\varepsilon}\tau,\sqrt{\varepsilon}\alpha), \quad d\alpha/d\tau = \sqrt{\varepsilon}(\eta-\tau)\Delta_2(\sqrt{\varepsilon}\eta,\sqrt{\varepsilon}\tau,\sqrt{\varepsilon}\alpha), \tag{19}$$

первое уравнение которой при $\varepsilon=0$ обращается в модельное уравнение (6). Поэтому асимптотику его решения $\eta(\tau,\Delta,\varepsilon) = z(\sqrt{\varepsilon}\tau,\Delta,\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$ естественно искать в виде

$$\eta = \eta_0(\tau,\Delta) + \sqrt{\varepsilon}\eta_1(\tau,\Delta) + \ldots \tag{20}$$

Асимптотику решения $\alpha(\tau,\Delta,\varepsilon)$ соответственно представим в таком же виде

$$\alpha = \alpha_0(\tau,\Delta) + \sqrt{\varepsilon}\alpha_1(\tau,\Delta) + \ldots \tag{21}$$

Подставим выражение (21) во второе уравнение (19) и приравняем коэффициенты, не зависящие от ε. Получим уравнение $d\alpha_0/d\tau=0$, из которого с учетом результатов теоремы 1 (в точке $\tau=\varepsilon^{-1/4}$ функция $\alpha(\tau,\Delta,\varepsilon)$ принимает значение порядка $\varepsilon^{1/4}$) определяем $\alpha_0(\tau,\Delta)\equiv 0$.

Выбрав в (20) первый коэффициент $\eta_0=\eta_-(\tau,\Delta)$, подставив затем его в первое уравнение (19) и приравняв коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$, получим уравнение

$$d\eta_1/d\tau = 2\eta_0(\tau,\Delta)\eta_1 + f(\tau),$$

где

$$f(\tau) = (\eta_0^2-\tau^2)[\tau\gamma'_\xi(0,0,0) + \eta_0\gamma'_z(0,0,0)] + \eta_0\Delta'_{1\,z}(0,0,0) + \tau\Delta'_{1\,\xi}(0,0,0). \tag{22}$$

В качестве входящей в представление (20) функции η_1 возьмем единственное его решение

$$\eta_1(\tau,\Delta) = \int\limits_{-\infty}^{\tau}\exp\left\{\int\limits_{s}^{\tau} 2\eta_0(\sigma,\Delta)d\sigma\right\}f(s)ds, \tag{23}$$

ограниченное при $\tau \to -\infty$. Действительно, учитывая в (22), (23) асимптотическое разложение (7), убеждаемся в том, что

$$\eta_1(\tau,\Delta) = \varkappa_0 + O(1/\tau), \quad \tau \to -\infty, \tag{24}$$

где постоянная $\varkappa_0$ та же, что и в (14).

В формулируемом ниже утверждении τ_* – произвольно фиксированное число из интервала I, где $I = (-\infty, \infty)$ при $\Delta < 1$ и $I = (-\infty, \tau_0(\Delta))$ при $\Delta > 1$.

Теорема 2. *При любом фиксированном* $\Delta \neq 1$ *равномерно на промежутке* $-\varepsilon^{-1/4} \le \tau \le \tau_*$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\eta(\tau,\Delta,\varepsilon) = \eta_0(\tau,\Delta) + \sqrt{\varepsilon}\eta_1(\tau,\Delta) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad \alpha^i(\tau,\Delta,\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/4}), \quad i = \overline{1,n-1}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{25}$$

Доказательство. Положив в системе (19) $\eta = \eta_0 + \sqrt{\varepsilon}\eta_1 + k$, получим дифференциальную систему

$$\begin{gathered} dk/d\tau = a^1(\tau,\Delta,\varepsilon)k + (b^1(\tau,\Delta,\varepsilon),\alpha) + C^1(k,\alpha,\tau,\Delta,\varepsilon) + \varepsilon u_*(\tau,\Delta,\varepsilon), \\ d\alpha^j/d\tau = a_j^2(\tau,\Delta,\varepsilon)k + (b^2(\tau,\Delta,\varepsilon),\alpha) + \sqrt{\varepsilon}C_j^2(k,\alpha,\tau,\Delta,\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}u_{**j}(\tau,\Delta,\varepsilon), \quad j = \overline{1,n-1}, \end{gathered} \tag{26}$$

где гладкие по (k,α,Δ) функции $a^i, b^i, C^i, u_*, u_{**}$, $i = 1,2$, таковы, что равномерно на $-\varepsilon^{-1/4} \le \tau \le \tau_*$ выполняются соотношения

$$a^1(\tau,\Delta,\varepsilon) = 2\eta_0(\tau)[1+O(\varepsilon^{1/4})], \quad b_j^2(\tau,\Delta,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad a_j^2(\tau,\Delta,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad b_j^1(\tau,\Delta,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\begin{gathered} C^1(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv C_j^2(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv C_k^{1'}(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv \\ \equiv C_{\alpha^1}^{1'}(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv \ldots \equiv C_{\alpha^{n-1}}^{1'}(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv C_{j\,k}^{2'}(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv \\ \equiv C_{j\,\alpha^1}^{2'}(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv \ldots \equiv C_{j\,\alpha^{n-1}}^{2'}(0,0,\tau,\Delta,\varepsilon) \equiv 0, \\ |u_*(\tau,\Delta,\varepsilon)| \le M(|\tau|+1)^2, \quad |u_{**j}(\tau,\Delta,\varepsilon)| \le M, \quad j = \overline{1,n-1}. \end{gathered} \tag{27}$$

Далее перейдем от дифференциальной системы (26) к интегральной

$$\begin{gathered} k = k(-\varepsilon^{-1/4},\Delta,\varepsilon)\exp\left\{\int\limits_{-\varepsilon^{-1/4}}^{\tau} a^1(s,\Delta,\varepsilon)ds\right\} + \\ + \int\limits_{-\varepsilon^{-1/4}}^{\tau} \exp\left\{\int\limits_{p}^{\tau} a^1(s,\Delta,\varepsilon)ds\right\}[(b^1(p,\Delta,\varepsilon),\alpha(p,\Delta,\varepsilon)) + C^1(k,\alpha,p,\Delta,\varepsilon) + \varepsilon u_*(p,\Delta,\varepsilon)]dp, \end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \alpha^j = \alpha^j(-\varepsilon^{-1/4},\Delta,\varepsilon)\exp\left\{\int\limits_{-\varepsilon^{-1/4}}^{\tau} b_j^2(s,\Delta,\varepsilon)ds\right\} + \\ + \int\limits_{-\varepsilon^{-1/4}}^{\tau} \exp\left\{\int\limits_{p}^{\tau} b_j^2(s,\Delta,\varepsilon)ds\right\}[((b_1^2(p,\Delta,\varepsilon),\ldots,\hat{b}_j^2(p,\Delta,\varepsilon),\ldots,b_{n-1}^2(p,\Delta,\varepsilon)), \\ (\alpha^1(p,\Delta,\varepsilon),\ldots,\hat{\alpha}^j(p,\Delta,\varepsilon),\ldots,\alpha^{n-1}(p,\Delta,\varepsilon))) + a_j^2(p,\Delta,\varepsilon)k(p,\Delta,\varepsilon) + \\ + \sqrt{\varepsilon}C_j^2(k,m,p,\Delta,\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}u_{**j}(p,\Delta,\varepsilon)]\,dp, \quad j = \overline{1,n-1}. \end{gathered} \tag{29}$$

В силу асимптотических равенств (7), (14), (15) и (24) имеем

$$\begin{gathered}k(-\varepsilon^{-1/4},\Delta,\varepsilon)=\varepsilon^{-1/2}[z(-\varepsilon^{1/4},\Delta,\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}\eta_0(-\varepsilon^{-1/4},\Delta)-\varepsilon\eta_1(-\varepsilon^{-1/4},\Delta)]=O(\varepsilon^{3/4}),\\ \alpha^j(-\varepsilon^{-1/4},\Delta,\varepsilon)=\varepsilon^{-1/2}v^j(-\varepsilon^{1/4},\Delta,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1/4}),\quad j=\overline{1,n-1}.\end{gathered}\tag{30}$$

Наконец, объединяя соотношения (27), (30) с вытекающей из первого равенства (27) оценкой

$$\int\limits_{-\varepsilon^{-1/4}}^{\tau}\exp\biggl\{\int\limits_{s}^{\tau}a^1(\sigma,\Delta,\varepsilon)d\sigma\biggr\}ds\le\frac{M}{|\tau|+1},$$

убеждаемся в том, что оператор, порожденный правой частью системы (28), (29), переводит в себя множество $B_1\times\cdots\times B_n$, где B_j, $j=\overline{1,n}$, – шары пространства $C[-\varepsilon^{-1/4},\tau_*]$ с центрами в нуле и радиусами порядка $\varepsilon^{3/4},\varepsilon^{1/4},\ldots,\varepsilon^{1/4}$ соответственно, и является сжимающим. Теорема доказана.

Заметим, что теоремы 1 и 2 справедливы при любом $\Delta\ne1$. Однако дальнейшее (при $\tau>\tau_*$) поведение исследуемых решений системы (5) существенно различно при $\Delta<1$ и $\Delta>1$ (см. (25) и леммы 1–3). Рассмотрим сначала случай $\Delta<1$.

Теорема 3. *При $\Delta<1$ равномерно на $\tau_*\le\tau\le\varepsilon^{-1/4}$ и $\varepsilon^{1/4}\le\xi\le q$ соответственно справедливы асимптотические равенства (25) и*

$$z(\xi,\Delta,\varepsilon)=-\xi+\varepsilon z_1(\xi,\Delta)+O(\varepsilon^{5/4}),\quad v(\xi,\Delta,\varepsilon)=v_0(\xi,\Delta)+O(\varepsilon^{3/4}),$$

где

$$\begin{gathered}z_1(\xi,\Delta)=(1+\Delta_1(-\xi,\xi,v_0(\xi,\Delta)))/(2\xi\gamma(-\xi,\xi,v_0(\xi,\Delta))),\\ dv_0/d\xi=-2\xi\Delta_2(-\xi,\xi,v_0),\quad v_0(\varepsilon^{1/4},\Delta)=0.\end{gathered}$$

Доказательство этой теоремы практически полностью повторяет соответствующие рассуждения из доказательств теорем 1 и 2.

Из теоремы 3 следует, что при $\Delta<1$, т.е. при $\Phi(s_0)>0$, где параметр s_0 однозначно определяет выбранную нами траекторию вырожденной системы (4) на поверхности медленных движений Γ_1, и при увеличении x наше решение беспрепятственно переходит из ε-окрестности поверхности $y=\varphi(x)$, $x<x_0$, в ε-окрестность поверхности $y=\psi(x)$, $x>x_0$, т.е. "срыва" в точке $(x_0,\varphi(x_0))$ не происходит (см. рис. 1).

Рассмотрим случай $\Delta>1$. Тогда функция $\eta_1(\tau,\Delta)$ допускает асимптотическое представление

$$\eta_1(\tau,\Delta)=-\gamma'_\eta(0,0,0)\frac{\ln(\tau_0-\tau)}{(\tau_0-\tau)^2}+O\biggl(\frac{1}{\tau_0-\tau}\biggr),\quad\tau\to\tau_0-0.\tag{31}$$

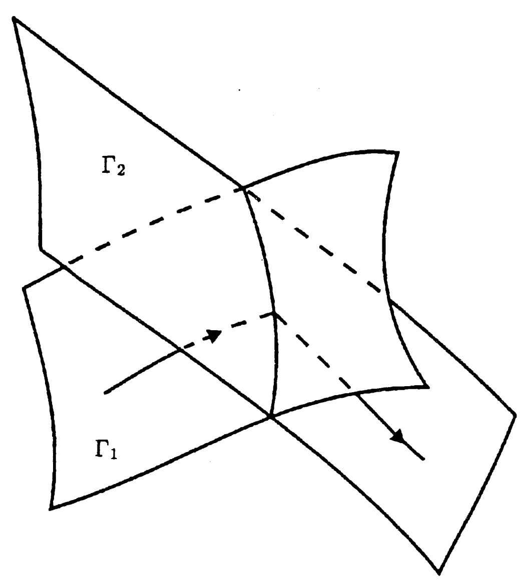

Рис. 1.

Теорема 4. *При $\Delta>1$ равномерно на $\tau_*\le\tau\le\tau_0(\Delta)-\varepsilon^{1/4}$ справедливы асимптотические равенства*

$$\begin{gathered}\eta(\tau,\Delta,\varepsilon)=\eta_0(\tau,\Delta)+\sqrt{\varepsilon}\eta_1(\tau,\Delta)+R(\tau,\Delta,\varepsilon),\\ \alpha^i(\tau,\Delta,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1/4}),\quad i=\overline{1,n-1},\quad\varepsilon\to0;\end{gathered}\tag{32}$$

здесь

$$|R(\tau, \Delta, \varepsilon)| \le \max\left(M\varepsilon^{3/4}\frac{1}{(\tau_0-\tau)^2}, M\varepsilon\frac{\ln^2(\tau_0-\tau)}{(\tau_0-\tau)^3}\right).$$

Доказательство. Снова обратимся к системе (26), в которой свойства функций a^2 и C^i, $i = 1, 2$, остаются прежними, а функции a^1, b^1, b^2, u_*, u_{**} таковы, что равномерно на $\tau_* \le \tau \le \tau_0(\Delta) - \varepsilon^{1/4}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} a^1(\tau, \Delta, \varepsilon) = 2\eta_0 + O(\varepsilon^{1/4}\ln(1/\varepsilon)), \quad |b_j^1| \le M\sqrt{\varepsilon}/(\tau_0-\tau)^2, \quad |b_j^2| \le M\varepsilon/(\tau_0-\tau), \\ |u_*| \le M\ln^2(\tau_0-\tau)/(\tau_0-\tau)^4, \quad |u_{**j}| \le M/(\tau_0-\tau), \quad j = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{33}$$

Перейдем от системы (26) к аналогичной (28), (29) интегральной системе, переписанной для начального момента τ_*. Свойства (33) вместе с неравенством

$$\exp\left\{\int_s^\tau a^1(\sigma, \Delta, \varepsilon)d\sigma\right\} \le \left(\frac{\tau_0-s}{\tau_0-\tau}\right)^2, \quad s \le \tau,$$

вытекающим из асимптотической формулы для a^1 (см. (33)), гарантируют применимость к этой интегральной системе в некотором множестве

$$K \subset C([\tau_*, \tau_0(\Delta) - \varepsilon^{1/4}]) \times \dots \times C([\tau_*, \tau_0(\Delta) - \varepsilon^{1/4}])$$

вида

$$K = \left\{(g, \alpha): \quad |g| \le \max\left(M\varepsilon^{3/4}\frac{1}{(\tau_0-\tau)^2}, M\varepsilon\frac{\ln^2(\tau_0-\tau)}{(\tau_0-\tau)^3}\right), \quad |\alpha_j| \le \varepsilon^{1/4}\right\}$$

принципа сжимающих отображений. Теорема доказана.

Следующий этап связан с заменой

$$\xi = \sqrt{\varepsilon}\tau_0(\Delta) - (1/2)\gamma_z'(0,0,0)\varepsilon\ln(1/\varepsilon) + \varepsilon s. \tag{34}$$

Выполняя ее в системе (5) и полагая $\varepsilon = 0$, получаем систему

$$dz/ds = \gamma(z, 0, v)z^2, \quad dv/ds = 0,$$

а поскольку в силу теоремы 3 $v(s_0) = O(\varepsilon^{3/4})$, где

$$s_0(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1/4} + (1/2)\gamma_z'(0,0,0)\ln(1/\varepsilon),$$

получаем при $\varepsilon = 0$ уравнение

$$dz/ds = \gamma(z, 0, 0)z^2. \tag{35}$$

Обозначим через $z = z_0(s)$ частное решение этого уравнения, определяющееся при всех достаточно больших по модулю отрицательных s из уравнения

$$-\frac{1}{z} - \gamma_z'(0,0,0)\ln z + \int_0^z \left[\frac{1}{\gamma(p,0,0)p^2} - \frac{1-\gamma_z'(0,0,0)p}{p^2}\right]dp = s.$$

Из этого уравнения, в частности, следует, что имеет место асимптотическое представление

$$z_0(s) = -\frac{1}{s} - \gamma_z'(0,0,0)\frac{\ln(-s)}{s^2} + O\left(\frac{\ln^2(-s)}{s^3}\right), \quad s \to -\infty.$$

Отсюда и из асимптотических формул (32), (9), (31) заключаем, что при $s = s_0(\varepsilon)$ происходит нужное сшивание с траекторией $\eta(\tau, \Delta, \varepsilon)$, т.е.

$$g_0(\varepsilon) = z_0(s)|_{s=s_0(\varepsilon)} - \sqrt{\varepsilon}\eta(\tau_0 - \varepsilon^{1/4}, \Delta, \varepsilon) = O(\varepsilon^{3/4}\ln^2(1/\varepsilon)). \tag{36}$$

Пусть $(-\infty, \bar{s})$ – максимальный интервал существования решения $z = z_0(s)$. В формулируемом ниже утверждении s_* – произвольно фиксированное число из промежутка $(-\infty, \bar{s})$; $(z(s, \Delta, \varepsilon), v(s, \Delta, \varepsilon))$ – исследуемое решение после замены (34).

Теорема 5. *При* $\Delta > 1$ *равномерно на* $s_0(\varepsilon) \le s \le s_*$ *справедливы асимптотические равенства*

$$z(s, \Delta, \varepsilon) = z_0(s) + \varepsilon^{1/4}\ln^2(1/\varepsilon)R(s, \Delta, \varepsilon), \quad v(s, \Delta, \varepsilon) = O(\varepsilon^{3/4}), \quad \varepsilon \to 0; \tag{37}$$

здесь $|R(s, \Delta, \varepsilon)| \le M/(s^2 + 1)$.

Доказательство. Проведя в системе (5) замену (34) и положив $z(s, \Delta, \varepsilon) = z_0(s, \Delta) + g$, получим для g и v систему

$$dg/ds = a(s, \varepsilon, \Delta)g + (b(s, \varepsilon, \Delta), v) + C(g, v, s, \varepsilon, \Delta) + \sqrt{\varepsilon}u_*(s, \varepsilon, \Delta), \quad dv/ds = \varepsilon u_{**}(s, \varepsilon, \Delta), \tag{38}$$

где функции a, b, C, u_*, u_{**} удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} a(s, \varepsilon, \Delta) = a_0(s) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad a_0(s) = -2/s + O(\ln(-s)/(s^2 + 1)), \quad s \to -\infty, \\ |b_j(s, \varepsilon, \Delta)| \le M/(s^2 + 1), \quad j = \overline{1, n-1}, \quad C(0, 0, s, \varepsilon, \Delta) \equiv C'_g(0, 0, s, \varepsilon, \Delta) \equiv \\ \equiv C'_{v^1}(0, 0, s, \varepsilon, \Delta) \equiv \ldots \equiv C'_{v^{n-1}}(0, 0, s, \varepsilon, \Delta) \equiv 0, \quad |u_*(s, \varepsilon, \Delta)| \le M/(s^2 + 1), \\ |u_{**j}(\xi, \varepsilon, \Delta)| \le M/(|s| + 1), \quad j = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{39}$$

От системы (38) перейдем к интегральной системе

$$\begin{gathered} g = g(s_0, \varepsilon, \Delta)\exp\left\{\int_{s_0}^{s} a(\xi, \varepsilon, \Delta)d\xi\right\} + \\ + \int_{s_0}^{s}\exp\left\{\int_{\tau}^{s} a(\xi, \varepsilon, \Delta)d\xi\right\}\left[\left(b(\tau, \varepsilon, \Delta), \left(v(s_0, \Delta, \varepsilon) + \varepsilon\int_{s_0}^{\tau} u_{**}(\sigma, \varepsilon, \Delta)d\sigma\right)\right) + \right. \\ \left. + C(g, v, \tau, \varepsilon, \Delta) + \sqrt{\varepsilon}u_*(\tau, \varepsilon, \Delta)\right]d\tau, \quad v = v(s_0, \Delta, \varepsilon) + \varepsilon\int_{s_0}^{s} u_{**}(\xi, \varepsilon, \Delta)d\xi. \end{gathered} \tag{40}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое уравнения для g. Из первых двух равенств (39) следует оценка

$$\left|g(s_0, \varepsilon, \Delta)\exp\left\{\int_{s_0}^{s} a(\xi, \varepsilon, \Delta)d\xi\right\}\right| \le M\frac{|g_0(\varepsilon)|s_0^2}{s^2 + 1}.$$

Таким образом, при любом значении s порядка единицы это слагаемое имеет порядок $\varepsilon^{1/4}\ln^2(1/\varepsilon)$, хотя начальное значение $g_0(\varepsilon)$ было порядка $\varepsilon^{3/4}\ln^2(1/\varepsilon)$.

Далее, как и раньше, исследуем интегральный оператор, порожденный правой частью (40). Используя соотношения (39) и оценку

$$\exp\left\{\int_{\tau}^{s} a(\xi, \varepsilon, \Delta)d\xi\right\} \le M\frac{\tau^2}{s^2 + 1},$$

заключаем, что данный интегральный оператор переводит некоторое множество

$$K \subset C([s_0, s_*]) \times \cdots \times C([s_0, s_*])$$

вида
$$K = \{(g,v): \quad |g| \le M(\varepsilon^{1/4}\ln^2(1/\varepsilon))/(s^2+1), \quad |v_j| \le \varepsilon^{3/4}\}$$
в себя и, следовательно, по теореме Шаудера имеет неподвижную точку. Эта неподвижная точка (z,v) единственна, так как пара вектор-функций (z,v) является решением дифференциальной системы с бесконечно гладкой правой частью. Теорема доказана.

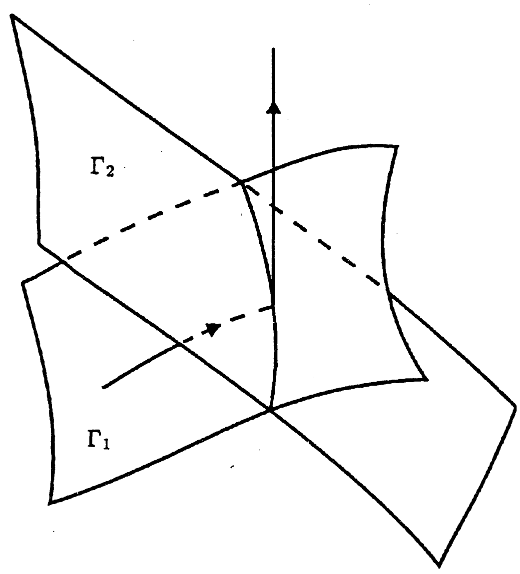

Рис. 2.

Таким образом, теорема 5 показывает, что в случае $\Phi(s_0) < 0$ в точке $(x_0, \varphi(x_0))$ происходит "срыв" траектории с поверхности Γ_1 и последующее ее асимптотически быстрое движение вдоль вертикальной прямой $x = x_0$ (рис. 2).

Итак, из приведенных теорем следует, что траектория вырожденной системы (4), лежащая на Γ_1 и пересекающаяся с l в некоторой точке $(x_0, \varphi(x_0))$, $x_0 = \gamma(s_0)$, для которой выполнено неравенство $\Phi(s_0) \neq 0$, не может порождать траекторию-утку системы (1). Действительно, по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий все траектории системы (1), выпущенные из ε-окрестности точки (x_*, y_*), сначала "падают" в окрестность порядка ε точки $(x_*, \varphi(x_*))$, а затем продолжают движение вдоль Γ_1 опять же в окрестности порядка ε траектории $(x(t), \varphi(x(t)))$ вырожденной системы (4) с начальным условием $x(0) = x_*$, т.е. движение происходит вблизи той самой траектории, для которой мы считаем выполненным условие $\Phi(s_0) \neq 0$. Это означает, что для всех этих траекторий имеют место либо теоремы 1–3, либо теоремы 1, 2, 4, 5.

3. Следует подчеркнуть, что аналогичные рассуждения можно применить и при построении асимптотики решения системы (1) с начальной точкой $(\tilde{x}_*, \tilde{y}_*)$, из которой происходит падение (при $\tau \to -\infty$, $\tau = t/\varepsilon$) на участок Γ_1^+. Для этого в качестве η_0 надо взять η_+ (другое решение уравнения (6)).

Итак, при некоторой общности положения в системе (1) возможно появление траекторий-уток лишь с отдельно взятыми изолированными нулевыми приближениями, на которых обращается в нуль функция $\Phi(s)$. Эти траектории служат своего рода сепаратрисами, разделяющими массивы траекторий системы (1) с различным асимптотическим поведением.

Автор выражает глубокую благодарность А.Ю. Колесову и Н.Х. Розову за постановку задачи, внимание к работе и плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М., 1995.
2. *Бобкова А.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* // Мат. заметки. 2002. Т. 71. Вып. 6. С. 818–831.
3. *Бобкова А.С.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1305–1313.
4. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 1999. Т. 224. С. 187–207.
5. *Lebovitz N.R., Schaar R.J.* // Stud. Appl. Math. 1975. V. 54. P. 229–260.
6. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.07.2003 г.