В. Г. Евстигнеев, О распределении бикомпактных $Q$-расширений, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 5, 185–186

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ БИКОМПАКТНЫХ $Q$-РАСШИРЕНИЙ

В. Г. Евстигнеев

Заметка продолжает работу автора [1], где рассматривались направленности $\{x_\alpha\}$ в топологическом пространстве $X$ такие, что $\forall f \in S \exists \lim f(x_\alpha)$. Они названы $S$-направленностями, кратко $S$-н. Здесь $\varnothing \neq S \subset C$, $C = C(X)$ — класс всех непрерывных и ограниченных на $X$ функций. В [1] показано, что бикомпактность $X$ эквивалентна каждому из условий: всякая $C$-н. в $X$ сходится; всякая двузначная бэровская мера на $X$ вырождена. Также показано, что любое бикомпактное расширение $bX$ можно построить посредством $S$-н., где $S = \{f \mid X : f \in C(bX)\}$.

Возникает вопрос об исследовании направленностей $\{x_\alpha\} \subset X$ таких, что $\forall f \in S^* \exists \lim f(x_\alpha)$. Их назовем $S^*$-направленностями, кратко $S^*$-н. Здесь $\varnothing \neq S^* \subset C^*$, $C^* = C^*(X)$ — класс всех непрерывных на $X$ функций. Результаты из [1] распространяются на случай $S^*$-н. При этом появляются $Q$-расширения $X$, распадающиеся на дизъюнктные классы, связанные естественным образом с бикомпактными расширениями $X$ (см. теорему 2). Рассматриваемые пространства — тихоновские, функции — вещественнозначные. Обозначения те же, что и в [1]. Под $Q$-пространством понимается пространство, на котором всякая двузначная $\sigma$-гладкая бэровская мера вырождена ([2], с. 88). Под $Q$-расширением $X$ понимается $Q$-пространство, содержащее $X$ в качестве плотного подпространства. Отметим, что метод направленностей применялся для построения $E$-компактных расширений в [3]. Там же можно найти следующую лемму, для которой дадим новое доказательство, связанное с мерами.

Лемма. *$X$ есть $Q$-пространство тогда и только тогда, когда всякая $C^*$-н. в $X$ сходится.*

Достаточность доказывается по аналогии с [1], стр. 53. Чтобы доказать необходимость, рассмотрим $C^*$-н. $\{x_\alpha\}$ и ограниченный функционал $\lambda(f) = \lim f(x_\alpha)$, $f \in C^*$. ($\lambda$ переводит всякое множество $\{h\colon f \leqslant h \leqslant g\} \subset C^*$ в ограниченное). По теореме Хьюитта ([2], стр. 47) найдем $\sigma$-гладкую бэровскую меру $m$ на $X$ такую, что $\lambda(f) = \int\limits_X f\,dm$, $f \in C^*$.

Из замкнутости множества двузначных бэровских мер на $X$ находим, что $m$ двузначна. Пусть $m = p_x$, где $p_x$ мера, вырожденная в точке $x \in X$. Тогда $\lim f(x_\alpha) = f(x)$, $f \in C^*$, т. е. $x_\alpha \to x$ в $X$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $\varnothing \neq S^* \subset C^*$. $X$ есть $Q$-пространство, если каждая $S^*$-н. в $X$ содержит сходящуюся поднаправленность.*

Перейдем к построению $Q$-расширений $X$. Рассмотрим класс $S^* \subset C^*$ со свойствами: (1) $S^*$ различает точки $X$. (2) Если направленность $\{x_\alpha\} \subset X$ и точка $x \in X$ таковы, что $\forall f \in S^* \exists \lim f(x_\alpha) = f(x)$, то $x_\alpha \to x$ в $X$. (3) Если $f \in S^*$ и $c > 0$, то $\max(\min(f, c), -c) \in S^*$. Рассмотрим множество $Y_{S^*}$ всех $S^*$-н. в $X$, считая $S^*$-н. $\{x_\alpha\}$ и $\{x_\beta\}$ равными, если $\forall f \in S^* \lim f(x_\alpha) = \lim f(x_\beta)$. На $Y_{S^*}$ рассмотрим класс сходимости ([4], стр. 106), образованный парами $(\{y_\alpha\}, y)$, (где $\{y_\alpha\}$ — направленность в $Y_{S^*}$, $y \in Y_{S^*}$ и $y_\alpha = \{x_{\alpha,\beta}\}_{(\beta)}$, $y = \{x_\gamma\}$ — суть $S^*$-н.), такими, что $\forall f \in S^* \exists \lim\limits_\alpha \lim\limits_\beta f(x_{\alpha,\beta}) = \lim f(x_\gamma)$. Наделим $Y_{S^*}$ топологией, относительно которой $y_\alpha \to y$ в $Y_{S^*}$, если $(\{y_\alpha\}, y)$ принадлежит классу сходимости. Положим $\forall x \in X$: $t(x) = \{x_\beta\}$, где $x_\beta \to x$ в $X$. Из свойств $S^*$ вытекает, что $t$ — гомеоморфизм $X$ на плотное подпространство $Y_{S^*}$. Если $f \in S^*(X)$, то $\tilde{f}(y) = \lim f(x_\gamma)$, $y = \{x_\gamma\} \in Y_{S^*}$ — непрерывное продолжение $f \circ t^{-1}$ с $t(X)$ на $Y_{S^*}$ (т. е. $t(X) = X$ — $S^*$-вложено в $Y_{S^*}$). Рассмотрим направленность $\{y_\alpha\} \subset Y_{S^*}$ такую, что $\forall f \in S^* \exists \lim \tilde{f}(y_\alpha)$. Из $\{y_\alpha\} = \{\{x_{\alpha,\beta}\}\}$, $\beta \in \mathrm{I}_\alpha$ построим направленность $y = \{x_{\alpha,\psi(\alpha)}\}_{(\alpha,\psi)} \in Y_{S^*}$, $\psi \in \prod\limits_\alpha \mathrm{I}_\alpha$, считая $(\alpha_2, \psi_2) > (\alpha_1, \psi_1)$, если $\alpha_2 > \alpha_1$ и $\psi_2(\alpha) >$

$> \psi_1(\alpha)$ для любого $\alpha$. Очевидно, что $y_\alpha \to y$ в $Y_{S*}$. Поэтому из леммы получим, что $Y_{S*}$ — $Q$-пространство, если докажем, что $Y_{S*}$— тихоновское пространство. Для этого из $S = S^* \cap C$ построим пространство $Y_S$ аналогично тому, как из $S^*$ было построено $Y_{S*}$. Точками $Y_S$ являются $S$-н. Если $\{x_\alpha\}$ — $S^*$-н., $\{x_\beta\}$ — $S$ = н. и $\forall f \in S$ $\lim f(x_\alpha) = \lim f(x_\beta)$, то $\{x_\beta\}$ — $S^*$-н., равная $\{x_\alpha\}$. Поэтому $Y_{S*} \subset Y_S$ и топология $Y_{S*}$ совпадает с релятивной топологией, порождаемой на множестве $Y_{S*}$ топологией $Y_S$. Но $Y_S$ — бикомпактное расширение $X$ и $X$ — $S$-вложено в $Y_S$ [1]. В итоге приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Классу $S^* \subset C^*(X)$ со свойствами (1) — (3) можно поставить в соответствие $Q$-пространство $Y_{S*}$ и бикомпакт $Y_S$ таким образом, что $X$ — плотное подпространство $Y_{S*}$, $Y_{S*}$ — плотное подпространство $Y_S$, $X$ — $S^*$-вложено в $Y_{S*}$ и $S$-вложено в $Y_S$ (где $S = S^* \cap C$). Если $S^* = C^*$, то $S = C$ и $Y_{C*}$ — хьюиттовское, $Y_C$ — стоун-чеховское расширения $X$.*

*Всякое $Q$-расширение $Y$ пространства $X$ равно $Y_{S*}$, где $S^* = \{f \mid X : f \in C^*(Y)\}$.*

Первая часть теоремы уже доказана. Докажем равенство $Y = Y_{S*}$. Если $\{x_\alpha\}$ — — $S^*$-н. в $X \subset Y$, то $\forall f \in C^*(Y)\ \exists \lim f(x_\alpha)$ и, по лемме, $\{x_\alpha\}$ сходится в $Y$ к некоторой точке $y$. Отображение $\{x_\alpha\} \to y$ есть гомеоморфизм $Y_{S*}$ на $Y$, оставляющий неподвижными точки $X$.

Далее, будем рассматривать не бикомпактные $Q$-расширения.

Теорема 2. *Множество всех $Q$-расширений $X$ распадается на непересекающиеся классы, каждый из которых состоит из $Q$-расширений, являющихся $C$-вложенными подпространствами некоторого бикомпактного расширения $bX$.*

*Если $bX$ содержит в качестве $C$-вложенного подпространства $Q$-расширение $X$, то нарост $bX - X$ содержит непустое замкнутое типа $G_\delta$ в $bX$ множество.*

*Следовательно, $Q$-расширения $X$, $C$-вложенные в $bX$, суть подпространства $bX$ вида $bX - E$, где $\beta(bX - E) = bX$ и $E$ — некоторое объединение замкнутых типа $G_\delta$ в $bX$ множеств из нароста $bX - X$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 каждое $Q$-расширение $X$ — $C$-вложенное подпространство некоторого бикомпактного расширения. Если $b_1X \neq b_2X$ — бикомпактные расширения и $Q$-расширения $Y_1$, $Y_2$ — их $C$-вложенные (соответственно) подпространства, то $Y_i = Y_{S_i^*} \subset Y_{S_i} = b_iX$, где $S_i^* = \{f \mid X : f \in C^*(Y_i)\}$, $S_i = S_i^* \cap C(X)$ $(i = 1, 2)$. Так как $S_1 \neq S_2$, то $Y_1 \neq Y_2$. Пусть $X \subset Y \subset bX$, где $Q$-расширение $Y$ — $C$-вложенное подпространство бикомпактного расширения $bX$. Так как $Y$ не псевдокомпактно, найдем непрерывную и неограниченную на $Y$ функцию $f > \text{const} > 0$. Пусть $g$ — непрерывное продолжение $1/f \in C(Y)$ с $Y$ на $bX$. Множество $g^{-1}(0) \subset (bX - X)$ требуемое.

Автор благодарен профессору В. И. Пономарёву за внимание к работе и полезные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Евстигнеев, Бикомпактность и меры, Функц. анализ 4 : 3 (1970), 51—60.
[2] В. С. Варадарайн, Меры на топологических пространствах, Матем. сб. 55 (1961), 35—96.
[3] А. П. Шостак, $E$-компактные расширения топологических пространств, Функц. анализ 8 : 1 (1974), 62—68.
[4] Дж. Келли, Общая топология, М., «Наука», 1968.

Поступило в Правление общества 21 декабря 1976 г.