А.П.Киселев

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ НА НАПРАВЛЕННОСТЬ ПРОСТЕЙШИХ ИСТОЧНИКОВ УПРУГИХ ВОЛН

С ростом детальности сейсмических наблюдений усиливается интерес к тонким, т.е. не улавливаемым в нулевом порядке лучевого метода, деталям возбуждения и распространения упругих волн [I] , [2] . Асимптотическое описание подобных явлений требует знания соответствующих начальных данных (дифракционных коэффициентов), характеризующих источник колебаний. В работе впервые вычисляются начальные данные первого поправочного приближения для простейших задач о возбуждении упругих волн в изотропной неоднородной среде. Геофизические следствия этих рассмотрений, связанных с так называемой естественной направленностью источников, целесообразнее изложить в другом месте.

Исследуется высокочастотная асимптотика в двух задачах с точечными источниками

$$\vec{L}(\vec{u})=\vec{F}, \qquad \omega \longrightarrow \infty, \tag{0.I}$$

$$L_j(\vec{u})=\partial\sigma_{ij}/\partial r_i+\rho(\vec{r})\omega^2 u_j, \tag{0.2}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{u})=\mu(\vec{r})(\partial u_i/\partial r_j+\partial u_j/\partial r_i)+\lambda(\vec{r})\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{u}, \tag{0.3}$$

$\vec{r}=(r_1,r_2,r_3)$. Функции $\lambda(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$ – гладкие, $\lambda+2\mu>\mu>0$, $\rho>0$. По повторяющимся значкам подразумевается суммирование от I до 3. Параметры Ламе λ и μ объемная плотность среды ρ связаны со скоростями продольной и поперечной волн a и b соотношениями

$$\lambda(\vec{r})+2\mu(\vec{r})=\rho(\vec{r})a^2(\vec{r}),\ \mu(\vec{r})=\rho(\vec{r})b^2(\vec{r}). \tag{0.4}$$

Единственное решение (0.I) выделяется условием излучения.

Рассматриваются центр расширения

$$\vec{F}(\vec{r})=-4\pi\,\mathrm{grad}\,\delta(\vec{r}), \tag{0.5}$$

(δ – дельта-функция) и центр вращения с осью $\vec{e}_1$

$$\vec{F}(\vec{r})=-4\pi\,\mathrm{rot}\,(\vec{e}_1\delta(\vec{r})). \tag{0.6}$$

Обобщенные функции (0.5) и (0.6) моделируют сферически-симметричную и простейшую аксиально-симметричную нагрузки, приложенные к поверхности малой сферической полости [4] .

В работе вычисляются начальные данные первого поправочного члена лучевого разложения продольной волны в случае (0. 5). То же делается для поперечной волны от центра вращения (0.6).

Вычисления ведутся по использующей идеи [5] и [6] схеме работы [7] – [8] , где найдены главные члены лучевых разложений поперечной волны от (0.5) и продольной – от (0.6). Приложению результатов [8] к сейсмике посвящена статья [I] . Другое изложение техники [7] – [8] имеется в [9] , где, однако, как указал автору Ж.Жобер, рассматриваются уравнения, отличающиеся от уравнений (0.I)-(0.3) теории упругости младшими членами.

Автор признателен Н.Н.Пузыреву предложившему тему работы.

§ I. Разложение вблизи источника

I. Поле перемещений $\vec{u}(\vec{r};\omega)$ вблизи точки источника $\vec{r}=0$ описывается разложением, которое мы называем внутренним

$$\vec{u}(\vec{r};\omega)\sim\omega^2\left\{\vec{V}^\circ(\vec{R})+\omega^{-1}\vec{V}^1(\vec{R})+\ldots\right\}, \tag{I.I}$$

$$\vec{R}=\frac{\vec{r}}{\omega}, \quad \vec{R}=(X_1,X_2,X_3). \tag{I.2}$$

Коэффициенты в (0.I) раскладываются по степеням растянутых переменных (I.2)

$$\mu(\vec{r})\sim\mu^\circ+\omega^{-1}\mu^1(\vec{R})+\ldots,\quad \lambda(\vec{r})\sim\lambda^\circ+\omega^{-1}\lambda^1(\vec{R})+\ldots,$$

$$\rho(\vec{r})\sim\rho^\circ+\omega^{-1}\rho^1(\vec{R})+\ldots;\quad \lambda^\circ=\lambda(0),\ \mu^\circ=\mu(0),\ \rho^\circ=\rho(0),$$

$\lambda^j(\vec{R}), \mu^j(\vec{R}), \rho^j(\vec{R})$ – однородные полиномы по X_1, X_2, X_3 степени j . Оператор $\vec{L}$ представляется в виде

$$\vec{L}(\vec{u})\sim\omega^2\left\{\vec{L}^\circ(\vec{u})+\omega^{-1}\vec{L}^1(\vec{u})+\ldots\right\}, \tag{I.3}$$

причем

$$L_j^m(\vec{u})=\partial_k\sigma_{kj}^m(\vec{u})+\rho^m(\vec{R})u_j,\ \partial_k=\partial/\partial X_k=\omega\,\partial/\partial r_k, \tag{I.4}$$

а σ_{kj}^m получены из σ_{kj} заменой $\partial/\partial r_j\to\partial_j, \lambda\to\lambda^m(\vec{R}), \mu\to\mu^m(\vec{R})$. Оператор $\vec{L}^\circ$ имеет постоянные коэффициенты

$$\vec{L}^\circ(\vec{u})=\rho^\circ\left\{\alpha^{-2}\,\mathrm{grad}_{\vec{R}}\,\mathrm{div}_{\vec{R}}\,\vec{u}-\beta^{-2}\,\mathrm{rot}_{\vec{R}}\,\mathrm{rot}_{\vec{R}}\,\vec{u}+\vec{u}\right\} \tag{I.5}$$

$$\alpha=\frac{1}{a(0)}=\sqrt{\frac{\rho^\circ}{\lambda^\circ+2\mu^\circ}},\quad \beta=\frac{1}{b(0)}=\sqrt{\frac{\rho^\circ}{\mu^\circ}}. \tag{I.6}$$

Подстановка (I.I) в (0.I) дает уравнения

$$\vec{L}^\circ(\vec{V}^\circ)=\vec{F}(\vec{R}), \tag{I.7}$$

$$\vec{L}^\circ(\vec{V}^1)=-\vec{L}^1(\vec{V}^\circ), \tag{I.8}$$

. . . .

Решение каждого из них выделяется ([7] , [8] , [9]) принципом предельного поглощения.

Уравнения (I.6),(I.7), ... можно решить в элементарных функциях.

Функция $\vec{V}^1$ для источников (0.5) и (0.6) имеет вид [7], [8], [9] :

$$\vec{V}^1(\vec{R}) = e^{i\alpha R}\sum_{j=-3}^{j=1}\vec{W}_j^a(\vec{R}) + e^{i\beta\alpha}\sum_{j=-3}^{j=1}\vec{W}_j^b(\vec{R}),\quad R=|\vec{R}|, \tag{I.9}$$

где $\vec{W}_j^a$ и $\vec{W}_j^b$ однородны степени j .

2. На выражениях вида (I.9) с другими, может быть, пределами суммирования, определим операции проектирования [8]

$$\vec{\Pi}^a(\vec{V}^1) = e^{i\alpha R}\langle\vec{W}_{-1}^a, \vec{s}\rangle\vec{s}, \tag{I.10}$$

$$\vec{\Pi}^b(\vec{V}^1) = e^{i\beta R}\left\{\vec{W}_{-1}^b - \langle\vec{W}_{-1}^b, \vec{s}\rangle\vec{s}\right\}, \tag{I.11}$$

где $\langle\vec{f}, \vec{g}\rangle = f_j g_j$, а $\vec{s}$ - следующий единичный вектор

$$\vec{s} = \mathrm{grad}_{\vec{R}}\, R = R^{-1}\vec{R}. \tag{I.12}$$

Функции $e^{-i\alpha R}\vec{\Pi}^a(\vec{V}^1)$ и $e^{-i\beta R}\vec{\Pi}^b(\vec{V}^1)$ имеют большое сходство с диаграммами направленности продольной и поперечной волн в случае однородной среды.

Полезно еще ввести на скалярных функциях вида

$$V(\vec{R}) = e^{i\gamma R}\sum_{j\leq j_0} W_j(\vec{R}),\quad j_0 < +\infty, \tag{I.13}$$

где W_j однородны степени j , операцию $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}V = e^{i\gamma R}W_{-1}(\vec{R}). \tag{I.14}$$

Целью двух ближайших параграфов является вычисление функций $\vec{\Pi}^a(\vec{V}^1)$ в случае (0.5) и $\vec{\Pi}^b(\vec{V}^1)$ в случае (0.6), содержащих всю информацию, необходимую для вычисления искомых начальных данных [7] , [8] .

§ 2. Вычисление функции $\vec{\Pi}^a(\vec{V}^1)$ для центра расширения

Из (I.7) легко следует, что в случае (0.5)

$$V_j^0 = \frac{\alpha^2}{\rho^0}\partial_j A,\qquad A = R^{-1}e^{i\alpha R}, \tag{2.1}$$

$$\vec{\Pi}^a(\vec{V}^\circ)=\frac{i\alpha^3}{\rho^\circ}A\vec{s}. \qquad (2.2)$$

Как нетрудно проверить [8] ,

$$\frac{\rho^\circ}{\alpha^2}L^1_j(\vec{V}^\circ)=\partial_j\left\{\left(-\alpha^2(\lambda^1(\vec{R})+2\mu^1(\vec{R}))+\rho^1(\vec{R})\right)A\right\}+2\mu_\kappa\partial^2_{\kappa j}A-2\mu_j\Delta_{\vec{R}}A-\rho_jA \qquad (2.3)$$

где μ_j и ρ_j – постоянные коэффициенты линейных функций $\mu^1(\vec{R})$ и $\rho^1(\vec{R})$:

$$\mu^1(\vec{R})=\mu_\kappa X_\kappa,\quad \rho^1(\vec{R})=\rho_\kappa X_\kappa. \qquad (2.4)$$

Можно показать [8], что первое слагаемое в правой части (2.3) не дает вклада в $\vec{\Pi}^a(\vec{V}^1)$. Следовательно,

$$\vec{\Pi}^a(\vec{V}^1)=\frac{\alpha^2}{\rho^\circ}\left\{\vec{\Pi}^a(\vec{f})+\vec{\Pi}^a(\vec{q})+\vec{\Pi}^a(\vec{h})\right\} \qquad (2.5)$$

причем, если $\vec{e}_j$ – орт оси X_j , то

$$\vec{L}^\circ(\vec{f})=-2\vec{e}_\kappa\mu_\kappa\partial^2_{\kappa j}A,\quad \vec{L}^\circ(\vec{q})=2\vec{e}_j\mu_j\Delta_{\vec{R}}A,$$

$$\vec{L}^\circ(\vec{h})=\vec{e}_j\rho_jA.$$

Без труда находится, что

$$f_j=-\frac{\alpha^2}{\rho^\circ}\cdot 2\mu_\kappa\partial^2_{\kappa j}\frac{e^{i\alpha R}}{2i\alpha} \qquad (2.6)$$

Далее, элементарно проверяются формулы [8], [9]

$$q_j=2\frac{\mu_\kappa}{\rho^\circ}\left\{\frac{\beta^2(\alpha^2\delta_{\kappa j}+\partial^2_{\kappa j})A-(\beta^2\delta_{\kappa j}+\partial^2_{\kappa j})B}{\alpha^2-\beta^2}+\alpha^2\partial^2_{\kappa j}\frac{e^{i\alpha R}}{2i\alpha}\right\},$$

$$B=R^{-1}e^{i\beta R},$$

$$h_j=-\frac{\rho_\kappa}{\rho^\circ}\left\{\left(\beta^2\delta_{\kappa j}+\partial^2_{\kappa j}\right)\frac{A-B}{\alpha^2-\beta^2}+\partial^2_{\kappa j}\frac{e^{i\alpha R}}{2i\alpha}\right\}.$$

Используя тождества

$$\mathcal{P}\partial^2_{\kappa j}A=-\alpha^2 s_\kappa s_j A,\quad \mathcal{P}\partial^2_{\kappa j}\frac{e^{i\alpha R}}{2i\alpha}=\frac{1}{2}(\delta_{\kappa j}-s_\kappa s_j)A, \qquad (2.7)$$

$$s_m=R^{-1}X_m,$$

находим, что $\vec{\Pi}^a(\vec{f})=\vec{\Pi}^a(\vec{q})=0$, а

$$\vec{\Pi}^a(\vec{V}^1)=\frac{\alpha^2}{\rho^\circ}\vec{\Pi}^a(\vec{h})=\left(\frac{\alpha}{\rho^\circ}\right)^2\rho_\kappa s_\kappa\vec{s}A,$$

$$\vec{\Pi}^{a}(\vec{V}^{1})=\frac{1}{\rho(0)a^{2}(0)}\left\langle\frac{\operatorname{grad}_{\vec{\tau}}\rho(\vec{\tau})}{\rho(\vec{\tau})},\vec{s}\right\rangle\Big|_{\vec{\tau}=0}\vec{s}A. \qquad (2.8)$$

§ 3. Вычисление функции $\vec{\Pi}^{b}(\vec{V}^{1})$ для центра вращения

Решая (I.7) в случае источника (0.6), легко найти

$$\vec{V}^{0}(\vec{R})=\frac{\beta^{2}}{\rho^{0}}\operatorname{rot}_{\vec{R}}(\vec{e}_{1}B)=\frac{\beta^{2}}{\rho^{0}}\left\{\vec{e}_{2}\partial_{3}-\vec{e}_{3}\partial_{2}\right\}B, \qquad (3.I)$$

откуда

$$\vec{\Pi}^{b}(\vec{V}^{0})=\frac{i\beta^{3}}{\rho^{0}}[\vec{s},\vec{e}_{1}]B. \qquad (3.2)$$

Из (3.I) следует, что

$$\sigma^{1}_{ij}(\vec{V}^{0})=\frac{\beta^{2}}{\rho^{0}}\mu^{1}(\vec{R})\left\{\delta_{2j}\partial^{2}_{3i}-\delta_{3j}\partial^{2}_{2i}+\delta_{2i}\partial^{2}_{3j}-\delta_{3i}\partial^{2}_{2j}\right\}B,$$

$$\partial_{i}\sigma^{1}_{ij}(\vec{V}^{0})=\frac{\beta^{2}}{\rho^{0}}\left\{\mu_{k}\partial_{k}(\delta_{2j}\partial_{3}-\delta_{3j}\partial_{2})+\partial_{j}(\mu_{2}\partial_{3}-\mu_{3}\partial_{2})\right\}B+$$
$$+\frac{\beta^{2}}{\rho^{0}}\mu^{1}(\vec{R})(\delta_{2j}\partial_{3}-\delta_{3j}\partial_{2})\Delta_{\vec{R}}B.$$

Далее,

$$\mu^{1}(\vec{R})(\delta_{2j}\partial_{3}-\delta_{3j}\partial_{2})\Delta_{\vec{R}}B=(\delta_{2j}\partial_{3}-\delta_{3j}\partial_{2})(\mu^{1}(\vec{R})\Delta_{\vec{R}}B)-$$
$$-(\delta_{2j}\mu_{3}-\delta_{3j}\mu_{2})\Delta_{\vec{R}}B,$$

$$\rho^{1}\vec{V}^{0}=\operatorname{rot}_{\vec{R}}\left\{\rho^{1}(\vec{R})B\vec{e}_{1}\right\}-(\vec{e}_{2}\rho_{3}-\vec{e}_{3}\rho_{2})B.$$

Отсюда

$$\vec{L}^{1}(\vec{V}^{0})=\frac{\beta^{2}}{\rho^{0}}\left\{\vec{c}+\vec{d}+\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right\}, \qquad (3.3)$$

где

$$\vec{c}=\mu_{k}\partial_{k}\operatorname{rot}_{\vec{R}}(B\vec{e}_{1}),$$

$$\vec{d}=\operatorname{grad}_{\vec{R}}(\mu_{2}\partial_{3}-\mu_{3}\partial_{2})B,$$

$$\vec{i}=\operatorname{rot}_{\vec{R}}\left\{(\mu^{1}(\vec{R})\Delta_{\vec{R}}+\rho^{1}(\vec{R}))B\vec{e}_{1}\right\},$$

$$\vec{j}=-(\vec{e}_{2}\mu_{3}-\vec{e}_{3}\mu_{2})\Delta_{\vec{R}}B=-[\nabla_{\vec{R}}\mu^{1}(\vec{R}),\vec{e}_{1}]\Delta_{\vec{R}}B,$$

$$\vec{k}=-(\vec{e}_{2}\rho_{3}-\vec{e}_{3}\rho_{2})B=-[\nabla_{\vec{R}}\rho^{1}(\vec{R}),\vec{e}_{1}]B.$$

Как следует из (I.8) и (3.3),

$$\vec{V}^1 = -\frac{\beta^2}{\rho^\circ}\left\{ \vec{C} + \vec{\mathcal{D}} + \vec{I} + \vec{J} + \vec{K} \right\} \tag{3.4}$$

причем

$$\vec{L}^\circ(\vec{C}) = \vec{c}, \quad \vec{L}^\circ(\vec{\mathcal{D}}) = \vec{d}, \quad \vec{L}^\circ(\vec{I}) = \vec{i},$$

$$\vec{L}^\circ(\vec{J}) = \vec{j}, \quad \vec{L}^\circ(\vec{K}) = \vec{k}.$$

Разыскивая функции $\vec{C}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ в виде $\vec{C} = \mathrm{rot}_{\vec{R}} \vec{\Psi}$, $\vec{\mathcal{D}} = \mathrm{grad}_{\vec{R}} \varphi$, получаем

$$C_n = \frac{\beta^2}{\rho^\circ} \mu_k \left(\delta_{2n} \partial^2_{3k} - \delta_{3n} \partial^2_{2k} \right) \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{D}_n = -\frac{\alpha^2}{\rho^\circ(\alpha^2 - \beta^2)} \left(\mu_2 \partial^2_{3n} - \mu_3 \partial^2_{2n} \right) B. \tag{3.6}$$

Пользуясь тождествами

$$\mathcal{P} \partial^2_{mn} B = -\beta^2 s_m s_n B, \quad \mathcal{P} \partial^2_{mn} \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{mn} - s_m s_n) B, \tag{3.7}$$

находим, что

$$\vec{\Pi}^\ell(\vec{\mathcal{D}}) = 0, \tag{3.8}$$

$$\vec{\Pi}^\ell(\vec{C}) = \frac{\beta^2}{2\rho^\circ} \vec{\Pi}^\ell \left\{ \vec{e}_2 (\mu_3 - \mu_n s_n s_3) B - \vec{e}_3 (\mu_2 - \mu_k s_k s_2) B \right\}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\vec{\Pi}^\ell(\vec{C}) = \frac{\beta^2}{2\rho^\circ} \vec{\Pi}^\ell \left\{ \left[\nabla_{\vec{R}} \mu^1(\vec{R}), \vec{e}_1 \right] B - \langle \nabla_{\vec{R}} \mu^1(\vec{R}), \vec{s} \rangle \left[\vec{s}, \vec{e}_1 \right] \right\}. \tag{3.9}$$

Нетрудно проверить также, см. [8], что

$$\vec{\Pi}^\ell(\vec{I}) = 0 \tag{3.10}$$

Для вычисления $\vec{\Pi}^\ell(\vec{J})$ и $\vec{\Pi}^\ell(\vec{K})$ приведем два элементарно проверяемых тождества. Пусть

$$\vec{L}^\circ(\vec{\Phi}) = \vec{\varphi} B, \quad \vec{L}^\circ(\vec{\Psi}) = \vec{\Psi} \Delta_{\vec{R}} B \tag{3.11}$$

где $\vec{\varphi}$ и $\vec{\Psi}$ – постоянные. Тогда (см. [8], [9])

$$\Phi_j = \frac{\varphi_k}{\rho^\circ} \left\{ \partial^2_{kj} \frac{A - B}{\alpha^2 - \beta^2} + \left(\beta^2 \delta_{kj} + \partial^2_{kj} \right) \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta} \right\}, \tag{3.12}$$

откуда следует, что

$$\Psi_j = \frac{\Psi_k}{\rho^\circ}\left\{\partial^2_{kj}\frac{-\alpha^2 A+\beta^2 B}{\alpha^2-\beta^2}+\left(\beta^2\delta_{kj}+\partial^2_{kj}\right)\left(B-\beta^2\frac{e^{i\beta R}}{2i\beta}\right)\right\}. \qquad (3.13)$$

(В формуле (4.13) работы [8] , аналогичной (3.13) имеется опечатка).

Из (3.7),(3.11)-(3.13) получаем

$$\Pi^b_j(\vec{\Phi}) = \frac{\varphi_k}{2\rho^\circ}\left(\delta_{kj}-s_k s_j\right)B,\ \Pi^b_j(\vec{\Psi}) = -\frac{\beta^2\Psi_k}{2\rho^\circ}\left(\delta_{kj}-s_k s_j\right)B. \qquad (3.14)$$

Пользуясь (3.11)-(3.14), находим, что

$$\vec{\Pi}^b(\vec{J}+\vec{K}) = \frac{1}{2\rho^\circ}\vec{\Pi}^b\left\{\left[\beta^2\nabla_{\vec{R}}\mu^1(\vec{R})-\nabla_{\vec{R}}\rho^1(\vec{R}),\vec{e}_1\right]B\right\} \qquad (3.15)$$

Наконец, из (3.8),(3.9),(3.15) и (0.4) следует формула

$$\vec{\Pi}^b(\vec{V}^1) = \left\{\vec{y}-\langle\vec{y},\vec{s}\rangle\vec{s}+\langle\vec{z},\vec{s}\rangle\left[\vec{s},\vec{e}_1\right]\right\}\frac{\beta^2}{\rho^\circ}B, \qquad (3.16)$$

где

$$\vec{y} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{grad}_{\vec{r}}\rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}+4\frac{\operatorname{grad}_{\vec{r}} b(\vec{r})}{b(\vec{r})},\vec{e}_1\right]\Bigg|_{\vec{r}=0}, \qquad (3.17)$$

$$\vec{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{grad}_{\vec{r}}\rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}+2\frac{\operatorname{grad}_{\vec{r}} b(\vec{r})}{b(\vec{r})}\right)\Bigg|_{\vec{r}=0} \qquad (3.18)$$

§ 4. Лучевые ряды и процедура определения начальных данных

1. Вне малой окрестности источника поле ищется в виде суммы продольного и поперечного лучевого рядов

$$\vec{u}(\vec{r};\omega)\sim\vec{U}^a(\vec{r};\omega)+\vec{U}^b(\vec{r};\omega), \qquad (4.1)$$

$$\vec{U}^a\sim e^{i\omega\tau^a(\vec{r})}\sum_{m\geq 0}\frac{\vec{U}^{am}(\vec{r})}{(-i\omega)^{m-1}},\ \vec{U}^b\sim e^{i\omega\tau^b(\vec{r})}\sum_{m\geq 0}\frac{\vec{U}^{bm}(\vec{r})}{(-i\omega)^{m-1}} \qquad (4.2)$$

Приведем формулы лучевого метода [3] .

Пусть $\tau^a(\vec{r})\geq 0,\ \tau^b(\vec{r})\geq 0$ – эйконалы, соответствующие центральным полям лучей, выпущенных из источника, $\vec{\eta}^a(\vec{r})$ и $\vec{\eta}^b(\vec{r})$ – единичные векторы, касательные в источнике к проходящему через $\vec{r}$ лучу, соответственно, продольному и поперечному. Обозначим через $J^a(\vec{r})$ и $J^b(\vec{r})$ геометрические расхождения, нормированные так, что

$$J^{a,b}(\vec{r}) = |\vec{r}|^2+O\left(|\vec{r}|^3\right),\ |\vec{r}|\longrightarrow 0. \qquad (4.3)$$

Пусть $\vec{p} = \nabla\tau$, а

$$\vec{M}(\vec{u}) = (\lambda+\mu)\left[\langle\nabla,\vec{u}\rangle\vec{p} + \nabla\langle\vec{u},\vec{p}\rangle\right] + \mu\left[\vec{u}\langle\nabla,\vec{p}\rangle + 2\langle\vec{u},\nabla\rangle\tau\right] + \nabla\lambda\langle\vec{u},p\rangle + \langle\nabla\mu,\vec{u}\rangle\vec{p} + \langle\nabla\mu,\vec{p}\rangle\vec{u}. \tag{4.4}$$

Полагая в (4.4) $\tau = \tau^a$, будем писать $\vec{M} = \vec{M}^a$, а если $\tau = \tau^b$, то $\vec{M} = \vec{M}^b$.

Как известно, [3], из уравнения $\vec{L}(\vec{u}) = 0$ следует, что

$$\vec{U}^{a0} = \sqrt{\frac{a}{\rho J^a}}\,\psi^0(\vec{\eta}^a)\nabla\tau^a; \tag{4.5}$$

$$\vec{U}^{a1} = \vec{U}^{a1\parallel} + \vec{U}^{a1\perp};\quad \vec{U}^{a1\parallel}\nabla\tau,\quad \vec{U}^{a1\perp}\perp\nabla\tau; \tag{4.6}$$

$$\vec{U}^{a1\perp} = a^2\rho^{-1}(b^2-a^2)^{-1}\vec{M}^a(\vec{U}^{a0}), \tag{4.7}$$

$$\vec{U}^{a1\parallel} = \sqrt{\frac{a}{\rho J^a}}\left\{\psi^1(\vec{\eta}^a) - \int_0^{\tau^a}\frac{a^2}{2\rho}\sqrt{\frac{\rho J^a}{a}}\left[\vec{M}^a(\vec{U}^{a1\perp}) - \vec{L}(\vec{U}^{a0})\right]\nabla\tau^a d\tau^a\right\}\nabla\tau^a, \tag{4.8}$$

причем интегрирование ведется вдоль продольного луча, а интеграл понимается в смысле конечной части.

Функции угловых переменных ψ^0 и ψ^1, называемые начальными данными нулевого и первого приближения для продольной волны, остаются произвольными, и должны выбираться в зависимости от источника.

Для поперечной волны получаются следующие формулы [3]

$$\vec{U}^{b0} = \frac{1}{\sqrt{\rho b J^b}}\vec{H}(\vec{\chi}^0) \tag{4.9}$$

где $\vec{H}$ – оператор вращения поляризации вокруг луча. В базисе, образованном касательной, нормалью и бинормалью к поперечному лучу, $H_{1j} = H_{j1} = 0$, $j = 1,2,3$; $H_{22} = H_{33} = \cos\Theta$, $H_{32} = -H_{23} = \sin\Theta$, $\Theta = \int_0^{\tau^b} T b\, d\tau^b$, причем T – кручение поперечного луча, вдоль которого ведется интегрирование. Далее,

$$\vec{U}^{b1} = \vec{U}^{b1\parallel} + \vec{U}^{b1\perp},\quad \vec{U}^{b1\perp}\perp\nabla\tau^b,\quad \vec{U}^{b1\parallel}\parallel\nabla\tau^b; \tag{4.10}$$

$$\vec{U}^{b1\parallel} = b^2\rho^{-1}(a^2-b^2)^{-1}\vec{M}^b(\vec{U}^{b0}), \tag{4.11}$$

$$\vec{U}^{b1\perp} = \frac{1}{\sqrt{\rho b J^b}}\vec{H}\left(\vec{\chi}^1(\vec{\eta}^b) + \int_0^{\tau^b}\frac{\sqrt{\rho b J^b}}{2\rho}\vec{H}^+(\vec{f})\,d\tau^b\right). \tag{4.12}$$

Здесь $\vec{f}=\vec{L}(\vec{U}^{b0})-\vec{M}^b(\vec{U}^{b1\parallel})$, а матрица $\vec{H}^+$ отличается от $\vec{H}$ двумя матричными элементами: $H^+_{23}=-H^+_{32}=-H_{23}$.

Не определяемые из уравнения $\vec{L}(\vec{u})=0$ векторы $\vec{\chi}^0(\vec{\eta}^b)$ и $\vec{\chi}^1(\vec{\eta}^b)$, которые называются начальными данными нулевого и первого приближения для поперечной волны, можно считать перпендикулярными к $\nabla\tau^b$.

2. Перейдем к краткому описанию перестройки лучевых рядов вблизи источника и сшивания их с внутренним разложением, приводящего к определению начальных данных [7], [8].

При $|\vec{r}|\to 0$ амплитуды $\vec{U}^{cm}$ и фазы τ^{cm} в лучевых формулах (4.2) (значок c заменяет a или b) имеют поведение [8]*)

$$\vec{U}^{cm}(\vec{r})\sim\sum_{m\geqslant 0}\vec{U}^{cm}_{1-m}(\vec{r})\sim\sum_{m\geqslant 0}\omega^{-1-m}\vec{U}^{cm}_{1-m}(\vec{R}), \tag{4.13}$$

$$\omega\tau^c(\vec{r})\sim\omega\left\{\tau^c_1(\vec{r})+\tau^c_2(\vec{r})+\ldots\right\}=\tau^c_1(\vec{R})+\omega^{-1}\tau^c_2(\vec{R})+\ldots, \tag{4.14}$$

$$\tau^a_1=\alpha R,\quad \tau^b_1=\beta R, \tag{4.15}$$

причем функции $\vec{U}^{cm}_n$ и τ^c_n однородны степени n.

Сохраняя в экспонентах члены $i\omega\tau^c_1$, а остальные разлагая в тейлоровские ряды, получаем [7], [8]

$$\vec{u}(\vec{r};\omega)\sim\omega^2\sum_{j\geqslant 0}\omega^{-j}\vec{v}^j(\vec{R}), \tag{4.16}$$

$$\vec{v}^j(\vec{R})=e^{i\alpha R}\sum_{m\leqslant m_0(j)}\vec{w}^{aj}_m(\vec{R})+e^{i\beta R}\sum_{m\leqslant m_0(j)}\vec{w}^{bj}_m(\vec{R}), \tag{4.17}$$

где $\vec{w}^{cj}_m$ однородны степени m, $m_0(j)<+\infty$.

В [8] доказан аналог "лемм единственности" [6], утверждающий, что ряды (4.16) и (1.1) совпадают, если начальные данные лучевых рядов выбраны так, что

$$\vec{\Pi}^a(\vec{v}^m)=\vec{\Pi}^a(\vec{V}^m),\quad \vec{\Pi}^b(\vec{v}^m)=\vec{\Pi}^b(\vec{V}^m),\quad m=0,1,2,\ldots \tag{4.18}$$

3. С помощью (4.1),(4.2),(4.13)-(4.15) можно проследить, что все ненулевые функции w^{c0}_j и w^{a1}_j в (4.16)-(4.17) таковы

$$\vec{w}^{c0}_j(\vec{R})=i^{j+1}\vec{U}^{cj}_{1-j}(\vec{R}),\qquad j=0,1,2,\ldots, \tag{4.19}$$

---

*) В [8] установлено отсутствие логарифмов [5] в асимптотике $\vec{U}^{cm}$ при $|\vec{r}|\to 0$.

$$\vec{w}_{-1}^{c0}(\vec{R}) = \vec{U}_{-1}^{c1}(\vec{R}) + i\tau_2^c(\vec{R})\vec{U}_{-3}^{c2}(\vec{R}); \tag{4.20}$$

$$\vec{w}_j^{c1}(\vec{R}) = i^j \vec{U}_{-1-j}^{c,1+j}(\vec{R}), \qquad j = 1,2,\ldots . \tag{4.21}$$

Пусть за счет выбора Ψ^0 и $\vec{\chi}^0$ удалось добиться выполнения (4.18) для $m=0$. Тогда $\vec{v}^0 = \vec{V}^0$, а отсюда, в случае источников (0.5) и (0.6) из (2.1), (3.1) следует, что $\vec{w}_{-3}^{c0} = \vec{w}_{-4}^{c0} = \ldots = 0$. Вследствие (4.19)

$$\vec{U}_{-3}^{c2} \equiv 0 \tag{4.22}$$

Поэтому

$$\vec{\Pi}^a(\vec{v}^1) = \vec{\Pi}^a(e^{i\alpha R}\vec{U}_{-1}^{a1}), \quad \vec{\Pi}^b(\vec{v}) = \vec{\Pi}^b(e^{i\beta R}\vec{U}_{-1}^{b1}). \tag{4.23}$$

Наконец, из формул (4.3)–(4.12) легко вывести, что

$$\vec{\Pi}^a(e^{i\alpha R}\vec{U}_{-1}^{am}(\vec{R})) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\rho^0}}\Psi^m(\vec{s})\vec{s}A, \qquad m = 0,1; \tag{4.24}$$

$$\vec{\Pi}^b(e^{i\beta R}\vec{U}_{-1}^{bn}(\vec{R})) = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho^0}}\vec{\chi}^n(\vec{s})B, \qquad n = 0,1. \tag{4.25}$$

При $m>1$, $n>1$ (а для других источников – и при $m=1$, $n=1$) эти формулы, вообще говоря, не справедливы.

С помощью (4.18),(4.23)–(4.25), (2.2),(2.8),(3.2),(3.16) нетрудно выписать функции Ψ^0 и Ψ^1 для (0.5) и $\vec{\chi}^0$ и $\vec{\chi}^1$ для (0.6).

§ 5. Сводка начальных данных

1. В случае центра расширения (0.5)

$$\Psi^0(\vec{s}) = a^{-5/2}(0)\,\rho^{-1/2}(0), \tag{5.1}$$

$$\Psi^1(\vec{s}) = a^{-3/2}(0)\,\rho^{-1/2}(0)\left\langle \frac{\operatorname{grad}_{\vec{\tau}}\rho(\vec{\tau})}{\rho(\vec{\tau})}\bigg|_{\vec{\tau}=0}, \vec{s}\right\rangle, \tag{5.2}$$

$\vec{\chi}^0(\vec{s}) \equiv 0$, а выражение для $\vec{\chi}^1$ приведено в [1], [8] (в [8] принята другая нормировка) ж).

ж) При нормировке, соответствующей параметризации углов выхода сферическими координатами φ, ϑ, (4.3) заменяется на $J^{a,b}(\vec{\tau}) = |\vec{\tau}|^2 \sin\vartheta + O(|\vec{\tau}|^3)$, а правые части (5.1)–(5.5) следует домножить на $\sqrt{\sin\vartheta}$.

2. В случае центра вращения (0.6)

$$\vec{\chi}^{\circ}(\vec{s}) = b^{-5/2}(0)\rho^{-1/2}(0)[\vec{s},\vec{e}_1], \qquad (5.3)$$

$$\vec{\chi}^{1}(\vec{s}) = b^{-3/2}(0)\rho^{-1/2}(0)\left\{\vec{y}-\langle\vec{y},\vec{s}\rangle\vec{s}+\langle\vec{z},\vec{s}\rangle[\vec{s},\vec{e}_1]\right\}, \qquad (5.4)$$

где $\vec{y}$ и $\vec{z}$ определены в (3.16),(3.17); $\Psi^{\circ}(\vec{s}) \equiv 0$, а функция $\Psi^{1}(\vec{s})$ выписана (для другой нормировки) в [8] .

Литература

1. Киселев А.П., Фролова Е.Н. Поперечная волна от ненаправленного источника в неоднородной упругой среде. – Изв.АН СССР, Физика Земли, 1982, № 5, с.3–10.
2. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. "Нелучевые эффекты" в теории распространения сейсмических волн. – Докл. АН СССР, 1982, т.267, № 5, с.1079–1083.
3. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. – Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. – В кн.: Вопр.динам.теории распр.сейсм.волн, 1961, т.5, с.3–24.
4. Киселев А.П. Малый сферический излучатель в неоднородной упругой среде. – Изв.АН СССР, Механика твердого тела, 1982, № 4, с.111–126.
5. Avila G.S.S., Keller J.B. The high-frequency asymptotic field of a point source in an inhomogeneous medium. – Comm.Pure Appl.Math., 1961, v.26, N 4, p.362–382.
6. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л., 1974.
7. Киселев А.П. О высокочастотных точечных источниках в неоднородных изотропных упругих средах. – Докл.АН СССР, 1974, т.219, № 4, с.829–831.
8. Киселев А.П. О начальных данных для лучевых формул, описывающих поля точечных источников в неоднородных упругих средах. – В кн.: Вопр.дин.теории распр.сейсм.волн, 1975, т.15, с.6–27.
9. Киселев А.П. Высокочастотные точечные источники в неоднородной упругой среде. – В кн.: Математические вопросы теории распространения волн.11. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1980, т.99, с.28–42.