Доклады Академии наук СССР
1977. Том 235, № 3

УДК 519.1 *МАТЕМАТИКА*

А. В. КОСТОЧКА

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА ЧЕРЕЗ ЕГО СТЕПЕНЬ, ПЛОТНОСТЬ И ОБХВАТ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 IV 1977)

В теории раскраски графов классическим результатом является теорема Брукса ([1]), в которой дана точная верхняя оценка хроматического числа графа через его степень.

Визинг ([2]) поставил проблему: найти точную верхнюю оценку хроматического числа графа через его степень и плотность или обхват (в терминологии мы следуем в основном ([3], [4])).

Если обозначить $\mathfrak{L}_\sigma$ класс графов, максимальная степень вершин которых не превышает σ, $\mathfrak{L}^g$ — класс графов, обхват которых не меньше g, $\mathfrak{L}_\sigma^g=\mathfrak{L}^g\cap\mathfrak{L}_\sigma$, $\mathfrak{L}_{\sigma,\varphi}$ — подкласс графов из $\mathfrak{L}_\sigma$, плотность которых не превышает φ, то проблему Визинга можно переформулировать следующим образом: какое максимальное хроматическое число может иметь граф $G\in\mathfrak{L}_{\sigma,\varphi}$ (или $G\in\mathfrak{L}_\sigma^g$)?

Ниже везде будем обозначать $V(G)$, $E(G)$, $\chi(G)$, $\varphi(G)$, $\sigma(G)$, $g(G)$ соответственно множество вершин, множество ребер, хроматическое число, плотность, степень и обхват графа G.

Эрдеш ([5]) показал, что для любого g хроматическое число графов из класса $\mathfrak{L}^g$ не ограничено сверху. По аналогии с этим результатом Грюнбаум ([6]) предположил, что для любых $\sigma\geqslant3$, $g\geqslant4$

$$\max_{G\in\mathfrak{L}_\sigma^g}\chi(G)=\sigma.$$

В работах ([7]) и ([8]) независимо показано, что

$$\max_{G\in\mathfrak{L}_\sigma,\ \left\lfloor\frac{\sigma-1}{2}\right\rfloor}\chi(G)<\sigma.$$

Тем самым опровергнуто предположение Грюнбаума при $\sigma\geqslant7$. Таким образом, простого ответа на вопрос Визинга нет.

Настоящая работа посвящена изучению двух вопросов, естественно возникающих при исследовании проблемы Визинга:

1) Каково число

$$\psi(\sigma)=\min_g\max_{G\in\mathfrak{L}_\sigma^g}\chi(G)?$$

2) Как велико может быть φ при фиксированном σ, чтобы тем не менее

$$\max_{G\in\mathfrak{L}_{\sigma,\varphi}}\chi(G)<\sigma?$$

Для получения верхних оценок при изучении этих вопросов использован так называемый метод многоцветных перекрасок. Изложим идейную сущность этого метода.

Допустим, мы доказываем некоторое утверждение о том, что если $G\in\mathfrak{L}_{\sigma,\varphi}$ (или $G\in\mathfrak{L}_\sigma^g$), то $\chi(G)\leqslant\chi$, где $\chi\geqslant\lfloor\sigma/2\rfloor+2$ и зависит от σ и φ (или g). Доказываем по индукции. Если наше утверждение неверно, то существует наименьший по числу вершин граф G в классе $\mathfrak{L}_{\sigma,\varphi}$ (или $\mathfrak{L}_\sigma^g$),

для которого утверждение ложно. Выберем наугад вершину $v_0 \in V(G)$. Зафиксируем произвольную раскраску f вершин $G \setminus \{v_0\}$ в χ цветов. Под $f(A)$, где $A \subset V(G)$, ниже везде подразумеваем множество $\{f(v) \mid v \in A \setminus \setminus \{v_0\}\}$. Для каждой вершины $v \in V(G)$ обозначим

$$I(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\},$$

$$O(v) = \{w \in I(v) \setminus \{v_0\} \mid f(w) \notin f(I(v) \setminus \{w\})\}.$$

Вершину $v \in V(G)$ назовем хорошей, если $|f(I(v) \cup \{v\})| < \chi$. При этом цвет α, $1 \leqslant \alpha \leqslant \chi$, не использованный при раскраске вершины v и инцидентных ей вершин, обозначим α_v. Так как $G \in \mathfrak{L}_\sigma$, то для любой вершины $v \in V(G)$, не являющейся хорошей,

$$|O(v)| \geqslant 2(\chi - 1) - \sigma.$$

Для каждой вершины $v \in V(G)$ ориентируем ребра, соединяющие v с вершинами из $O(v)$, по направлению из v. При этом некоторые ребра могут оказаться ориентированными в двух направлениях. Допустим, что при этом в графе G появится ориентированная цепь $(\overrightarrow{v_0, v_1}), (\overrightarrow{v_1, v_2}), \ldots \ldots, (\overrightarrow{v_{s-1}, v_s})$, не имеющая хорд, которая ведет из v_0 в некоторую хорошую вершину v_s (под хордами понимаем ребра (v_i, v_j) при $|i-j| > 1$). Тогда функция f', определенная следующим образом:

$$f'(w) = \begin{cases} f(w), & w \in V(G) \setminus \{v_0, v_1, \ldots, v_s\}; \\ \alpha v_s, & w = v_s; \\ f(v_{i+1}), & w = v_i \quad i = 0, 1, \ldots, s-1, \end{cases}$$

будет раскраской в χ цветов вершин графа G.

Кроме того, если в G есть ориентированная цепь $(\overrightarrow{v_0, v_1}), (\overrightarrow{v_1, v_2}), \ldots \ldots, (\overrightarrow{v_{r-1}, v_r})$, такая, что $v_{r-1} \in O(v_r)$, и эта цепь не имеет хорд, то функция

$$f''(w) = \begin{cases} f(w), & w \in V(G) \setminus \{v_0, v_1, \ldots, v_r\}, \\ f(v_{r-1}), & w = v_r, \\ f(v_{i+1}), & w = v_i, \ i = 0, 1, \ldots, r-1, \end{cases}$$

будет раскраской вершин графа G в χ цветов.

Из вершины v_0 выходит много ориентированных путей. И сущность модификаций метода многоцветных перекрасок состоит в том, чтобы, строя по шагам ориентированные цепи, отбрасывать те из них, которые содержат мешающие перекраске хорды, но при этом добиваться, чтобы нужная для перекраски цепь в конце концов нашлась. При $\chi = \sigma - 1$ и не очень больших плотностях этой цели удается добиться потому, что для каждой вершины $v \in V(G)$, не являющейся хорошей,

$$|O(v)| \geqslant 2(\chi - 1) - \sigma = \sigma - 4.$$

При больших обхватах утверждения удается доказать благодаря тому, что, прежде чем возникают нежелательные хорды, число удобных для нас ориентированных цепей сильно вырастает.

Уточнением идей многоцветной перекраски удалось доказать следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $G \in \mathfrak{L}_\sigma^g$, $\sigma \geqslant 4$, $g \geqslant (\sigma + 1)(^1/_2 + \ln \sigma)$. *Тогда*

$$\chi(G) \leqslant \lfloor \sigma/2 \rfloor + 2.$$

Следствие.

$$\psi(\sigma) \leqslant \lfloor \sigma/2 \rfloor + 2.$$

Теорема 2. *Если* $G \in \mathfrak{L}_{\sigma, \varphi}$, *где* $\sigma \geqslant 4$ *и* $\sigma - \varphi \geqslant 4[G(\sigma - 2)]^{1/4} + 2$, *то* $\chi(G) \leqslant \sigma - 1$.

Лемма. *Если* $G \in \mathfrak{L}_\sigma$ *и* $\varphi(G) \geqslant \sigma - \frac{\sigma^{1/2}}{2} + 1$, *то в* G *существует такое независимое множество вершин* M, *что* $\varphi(G \setminus M) = \varphi(G) - 1$.

Теорема 3. *Если* $G \in \mathfrak{L}_{\sigma, \varphi}$ *и* $\sigma - \varphi \geqslant 89$, *то* $\chi(G) \leqslant \sigma - 1$.

С другой стороны, используя идеи Эрдеша, изложенные в ([9]), можно доказать, что для любого $\sigma \geqslant 4$

$$\psi(\sigma) \geqslant \left\lfloor \frac{\sigma}{2 \ln \sigma} \right\rfloor + 1.$$

Примечание 1. Верхние оценки хроматического числа, приведенные в теоремах 1 и 2, справедливы также для верхнего хроматического числа, введенного в ([10]), причем доказательства почти полностью сохраняются.

Примечание 2. При доказательстве теорем 1 и 2 фактически даются алгоритмы, позволяющие со степенной сложностью от числа вершин графа раскрасить его вершины в гарантированное этими теоремами число цветов.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. L. Brooks*, Proc. Cambr. Phil. Soc., v. 37, 194 (1941). [2] *В. Г. Визинг*, УМН, т. 23, № 6, 117 (1968). [3] *А. А. Зыков*, Теория конечных графов, Новосибирск, «Наука», 1969. [4] *Ф. Харари*, Теория графов, М., «Мир», 1973. [5] *P. Erdös*, Canad. J. Math., v. 11, 34 (1959). [6] *B. Grünbaum*, Am. Math. Monthly, v. 77, 1088 (1970). [7] *О. В. Бородин, А. В. Косточка*, Препринт ТГ-7 ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1976. [8] *P. A. Catlin*. Doct. Thesis, The Ohio State Univ., 1976. [9] *П. Эрдеш, Дж. Спенсер*, Вероятностные методы в комбинаторике, М., «Мир», 1976. [10] *В. Г. Визинг*, В сб. Методы дискретного анализа в теории кодов и схем, Новосибирск, 1976, стр. 3.