П. И. Кузнецов, А. С. Юдина, Интегральные представления и асимптотические разложения неполного интеграла вероятностей,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 2, 213–220

https://www.mathnet.ru/mzm9870

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 213—220

УДК 529

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НЕПОЛНОГО ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

П. И. Кузнецов, А. С. Юдина

Дано определение неполного интеграла вероятностей и установлена его связь с интегралом Д. Оуэна. Для этого интеграла получены различные интегральные представления и преобразования по обеим переменным, на основе которых выведены асимптотические разложения для различных значений параметров. Библ. 6 назв.

1. Неполная функция Лапласа. Как известно, функция Лапласа имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt.$$

Другое интегральное представление этой функции выражается формулой, которая может быть получена с помощью тождества, указанного, например, в [1]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Неполной функцией Лапласа назовем функцию

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^w \frac{e^{-\frac{z^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2} dt \qquad (1)$$

(при $w \to \infty$ она вырождается в функцию Лапласа). Через эту функцию выражается функция $T(h, a)$, введенная Оуэном [2]:

$$T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-\frac{h^2}{2}(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt. \qquad (2)$$

Функция (2) имеет широкое применение в теории вероятностей, математической статистике, в задачах, связанных с уравнением теплопроводности. Между функцией (2) и неполной функцией Лапласа (1) существует связь, выражающаяся формулой

$$T(h, a) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Phi(h, a).$$

При $a \to \infty$ получаем известную формулу [2]:

$$T(h, a) \to [1 - 2\Phi(h)]/4.$$

2. Представление $T\ (h,\ a)$ в терминах интегралов от специальных функций. Так как

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+x^2)}dt,$$

то согласно формуле (2)

$$T(h, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\tau+\frac{h^2}{2}\right)}d\tau \int_0^a e^{-\left(\tau+\frac{h^2}{2}\right)x^2}dx.$$

Полагая $\left(\tau+\frac{h^2}{2}\right)x^2 = u^2$ и используя формулу [3]

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = x\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right),$$

получаем следующее интегральное представление функции (2)

$$T(h, a) = \frac{a}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\tau+\frac{h^2}{2}\right)}\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -a^2\left(\tau+\frac{h^2}{2}\right)\right)d\tau,$$

где $\Phi(a, c; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Преобразуем это выражение к другому виду, введя новое переменное

$$\tau + \frac{h^2}{2} = t.$$

Тогда получим

$$T(h, a) = \frac{a}{2\pi}\left[\int_0^\infty e^{-t}\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -a^2t\right)dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{h^2/2} e^{-t}\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -a^2t\right)dt\right]. \qquad (3)$$

Из свойств функции $T(h, a)$ [2]

$$T(h, a) = -T(h, -a), \quad T(h, a) = T(-h, a),$$

$$T(h, a) + T\left(ah, \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{4} - \Phi(h)\Phi(ah), \qquad (a \geqslant 0, h \geqslant 0),$$

следует, что ее достаточно изучить только при $0 < a < 1$, а в этом случае справедливо соотношение [3]:

$$\int_0^\infty e^{-t}\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -a^2t\right)dt = \frac{\operatorname{arctg} a}{a}. \qquad (4)$$

Используя (4), получаем из (3) другое интегральное представление:

$$T(h, a) = \frac{\operatorname{arctg} a}{2\pi} - \frac{a}{2\pi}\int_0^{h^2/2} e^{-t}\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -a^2t\right)dt. \qquad (5)$$

3. Преобразование Лапласа функции $T(h, a)$ по $h^2/2$. Представим формулу (5) в следующем виде:

$$[\operatorname{arctg} a - 2\pi T(h, a)]\, e^{h^2/2} = a\int_0^{h^2/2} e^{\frac{h^2}{2} - \tau}\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -a^2\tau\right)d\tau. \qquad (6)$$

Введем новое переменное $t = h^2/2$ и применим к интегралу (6) теорему умножения из теории преобразования Лапласа:

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau \div \overset{*}{f_1}(p)\overset{*}{f_2}(p).$$

В нашем случае [3]

$$f_1(t) = e^t \div \frac{1}{p-1} \text{ при } \operatorname{Re} p > 1,$$

$$f_2(t) = \Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -a^2t\right) \div$$

$$\div \frac{1}{a\sqrt{p}} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{p}}, \text{ при } \operatorname{Re} p > 0, \ |p| > a^2.$$

Поэтому преобразование Лапласа для левой части (6) имеет такой вид:

$$[\operatorname{arctg} a - 2\pi T(\sqrt{2t}, a)]\, e^t \div \frac{\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(p-1)}, \quad \operatorname{Re} p > 1. \tag{7}$$

Применяя в (7) теорему затухания, получим преобразование Лапласа для функции $T(\sqrt{2t}, a)$ по t:

$$T(\sqrt{2t}, a) \div \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{arctg} a}{p} - \frac{\operatorname{arctg}(a/\sqrt{p+1})}{p\sqrt{p+1}}\right].$$

Из этой формулы при $a \to \infty$ следует известное соотношение [4]:

$$T(\sqrt{2t}, a) \to \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Phi(\sqrt{2t}) \div \frac{1}{4p}\,\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}}.$$

4. Преобразование Лапласа функции $T(h, a)$ по a^2. В интеграле (2) сделаем замену переменной $\tau = t^2$ и введем обозначение $a^2 = t$, т. е. рассмотрим функцию

$$T(h, \sqrt{t}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-\frac{h^2}{2}(1+\tau)}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\,(1+\tau)}.$$

Согласно формуле (8.31) справочника [4] находим преобразование Лапласа — Карсона подынтегральной функции

$$e^{-\frac{h^2}{2}(1+\tau)}\,\frac{1}{4\pi\sqrt{t}\,(1+t)} \div \frac{1}{4}\,pe^p\,[1 - 2\Phi(\sqrt{2p+h^2})],$$

поэтому преобразование Лапласа функции $T(h, \sqrt{t})$ по переменной t имеет вид

$$T(h, \sqrt{t}) \div \frac{1}{4p}\,e^p\,[1 - 2\Phi(\sqrt{2p+h^2})]. \tag{8}$$

5. Асимптотические разложения. Используя полученные выше преобразования Лапласа функции $T(h, a)$ по a^2 (8) и $h^2/2$ (7), выведем для нее различные асимптотические разложения.

а) Случай $h \to \infty$, $a \to 0$. Для получения асимптотического разложения функции $T(h, a)$ используем формулу

(8), применив теорему об асимптотическом разложении функции по ее преобразованию Лапласа ([5], гл. 5, теорема 11).

Представим формулу (8) в виде

$$T(h, a) \div f(p)/p, \text{ где } f(p) = e^p[1 - 2\Phi(\sqrt{2p + h^2})]. \qquad (9)$$

Так как $1 - 2\Phi(z) \sim \exp(-z^2/2)/z\sqrt{\pi/2}$ $(z \to \infty)$ и функция $f(p)/p$ имеет только две особые точки $p = 0$ (полюс 1-го порядка) и $p = -h^2/2$ (точка разветвления), то все условия теоремы 11 [5] выполняются. Для получения асимптотического разложения функции $T(h, a)$ находим разложение изображения $f(p)/p$ в окрестности особых точек.

В окрестности полюса $p = 0$ достаточно найти только один главный член ряда Лорана функции $f(p)/p$, коэффициент которого равен

$$\operatorname{res}[f(p)/p; \ 0] = 1 - 2\Phi(h), \qquad (10)$$

так как остальные члены содержат переменную p в положительных целых степенях, и согласно теореме 11 [5] соответствующие члены в асимптотическом разложении оригинала будут равны нулю.

Найдем теперь разложение $f(p)/p$ в окрестности $p = -h^2/2$. Для этой цели представим $f(p)/p$ в виде разности

$$\frac{f(p)}{p} = \frac{e^p}{p} - 2\frac{e^p}{p}\Phi(\sqrt{2p + h^2}). \qquad (11)$$

Разложение уменьшаемого в окрестности $p = -h^2/2$ содержит только положительные целые степени $p + h^2/2$, поэтому согласно теореме 11 [5] достаточно получить только разложение вычитаемого. Так как (см. [6], формула 8.253)

$$2e^p\Phi(\sqrt{2p + h^2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (p + h^2/2)^{k+1/2}}{(2k+1)!!},$$

$$\frac{1}{p} = -\frac{2}{h^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{h^{2k}} \left(p + \frac{h^2}{2}\right)^k,$$

то вычитаемое разности (11) представляется в виде ряда

$$\frac{4e^{-h^2/2}}{h^2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(p + \frac{h^2}{2}\right)^{k+1/2} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{(2m+1)!!\, h^{2(k-m)}}.$$

Таким образом, согласно теореме 11 [5] из формул (9) — (11) следует, что для $T(h, a)$ имеет место асимптотическое разложение

$$T(h, a) = \frac{1}{4}[1 - 2\Phi(h)] +$$

$$+ \frac{e^{(-h^2/2)(1+a^2)}}{a^3h^2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)a^{2k}} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{(2m+1)!!\, h^{2(k-m)}}$$

$$(h, a \to \infty).$$

Учитывая соотношение

$$\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{k+1}\frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!}\sqrt{\pi} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

получаем другое выражение для асимптотического разложения функции $T(h, a)$ при $h \to \infty$, $a \to \infty$:

$$T(h, a) = \frac{1}{4}[1 - 2\Phi(h)] -$$

$$- \frac{e^{(h^2/2)(1+a^2)}}{2\pi a^3h^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)!!}{a^{2k}} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{(2m+1)!!\, h^{2(k-m)}}. \quad (12)$$

В случае $h = \mathrm{const}$, $a \to \infty$ получим известную формулу [2]

$$T(h, a) \to [1 - 2\Phi(h)]/4.$$

б) Случай $h \to \infty$, $a \to 0$. Обычно функцию $T(h, a)$ рассматривают при $0 \leqslant a \leqslant 1$, так как справедливо соотношение (см. [2]):

$$T(h, a) + T\left(ah, \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{4} - \Phi(h)\,\Phi(ah) \qquad (a \geqslant 0,\ h \geqslant 0), \quad (13)$$

используя которое, формулу (12) при $h \to \infty$, $a \to 0$ можно представить в виде

$$T(h, a) = \Phi(ah)\left[\frac{1}{2} - \Phi(h)\right] + \frac{ae^{(-h^2/2)(1+a^2)}}{2\pi h^2}\cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)!!\,a^{2k}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{(2m+1)!!\,(ah)^{2(k-m)}}.$$

Для проведения численных расчетов на ЭВМ формулу (13) удобнее записать в другой форме с использованием рекуррентных соотношений, а именно:

$$T(h, a) = \Phi(ah)\left[\frac{1}{2} - \Phi(h)\right] + \frac{a e^{(-h^2/2)(1+a^2)}}{2\pi h^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

где

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = (-1)^n \left(\frac{2n+1}{h^2} b_n + a^{2n}\right).$$

в) Случай $h \to 0$, $a \to 0$. Так как функция $f^*(p) = f(p)/4p$ в формуле (9) регулярна в бесконечно удаленной точке, то для асимптотического разложения функции $T(h, a)$ можно применить первую теорему разложения (теорема 14, гл. II [5]). С этой целью представим $f^*(p)$ в следующем виде:

$$f^*(q) = \frac{1}{4} \frac{e^{q-h^2/2}[1 - 2\Phi(\sqrt{2q})]}{q - \frac{h^2}{2}}, \quad q = p + \frac{h^2}{2}.$$

Справедлива формула ([6] формула (8.254)):

$$[1 - 2\Phi(\sqrt{2q})]\, e^q = \frac{1}{\pi\sqrt{q}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{q^k},$$

кроме того,

$$\frac{1}{q - \frac{h^2}{2}} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^k}{q^k}.$$

Поэтому в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f^*(q) = \frac{e^{-\frac{1}{2}h^2}}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{-k-\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{k} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{h^2}{2}\right)^{k-m}.$$

По теореме 14 [5] получаем при $h, a \to 0$:

$$T(h, a) = \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k a^{2k+1}}{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)},$$

$$c_k = \sum_{m=0}^{k} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{h^2}{2}\right)^{k-m}.$$

Другое разложение для этого случая можно получить также из разложения преобразования Лапласа (7). В окрестности бесконечно удаленной точки имеем

$$\frac{\operatorname{arctg} a}{(p-1)\sqrt{p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{a^{2m+1}}{2m+1}, \tag{14}$$

и, применяя к (7) и (14) теорему 14 [5], получим

$$T(h, a) = \frac{\operatorname{arctg} a}{2\pi} - \\ - \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{h^2}{2}\right)^k \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{a^{2m+1}}{2m+1}.$$

Эта другая форма известного разложения, полученного ранее Д. Оуэном [2], может быть использована для проверки точности приближенных значений $T(h, a)$, вычисленных по другим формулам.

Авторы выражают глубокую благодарность Л. Н. Большеву за обсуждение результатов.

2-й Московский государственный медицинский институт им. Н. И. Пирогова

Поступило 27.X.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Functionen der mathematischen, Physik, Berlin, 1948, S. 126.
[2] Смирнов Н. В., Большев Л. Н., Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, М., 1962.
[3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. I, М., 1965.
[4] Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, М.— Л., 1951.
[5] Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., 1961.
[6] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1963.