УДК 517.57
DOI: 10.33048/mattrudy.2021.24.202

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2021, том 24, № 2, 24–36

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫЕ ДЕЛИТЕЛИ ГАРМОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. М. Гичев

Описаны делители комплекснозначных однородных гармонических полиномов на $\mathbb{R}^3$, которые сами раскладываются в произведение линейных форм. Охарактеризованы однородные многочлены p, для которых существуют независимые линейные формы ℓ_1 и ℓ_2 такие, что $\ell_1^m p$ и $\ell_2^m p$ гармонические при некотором $m \in \mathbb{N}$. Это доставляет пример двух сферических гармоник, длина множества общих нулей которых сравнима с верхней оценкой той же величины для одной гармоники.

Ключевые слова и фразы: сферические гармоники, делимость гармонических полиномов.

§1. Введение

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ пространство однородных степени n комплексных многочленов трех переменных и через $\mathcal{H}_n$ его подпространство всех гармонических полиномов. Элементы $\mathcal{H}_n$ могут рассматриваться как гармонические многочлены на $\mathbb{R}^3$ с комплексными коэффициентами, продолженные голоморфно на $\mathbb{C}^3$, а также как голоморфные полиномы p комплексных переменных x, y, z на $\mathbb{C}^3$ такие, что $\Delta p = 0$, где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Множества нулей вещественных гармонических функций во многом определяют поведение самих функций. Факторизация гармонических функций — одна из связанных с ними задач, которая также пока недостаточно изучена. Например, квадратичная форма $x^2 + y^2 - 2z^2$ делит гармонический многочлен

$$(x + yi)^2 z(x^2 + y^2 - 2z^2),$$

но неизвестно, имеется ли такой многочлен в $\mathcal{H}_n$ при $n > 5$. Этот вопрос сформулирован в статье [5] и еще раз в [12]. Он все еще открыт. Полиномы, которые делят гармонические многочлены, называют *гармоническими делителями*. Насколько мне известно, пока не обнаружены неприводимые

© В. М. Гичев; 2021

гармонические делители степеней три и выше. В работе [6] охарактеризованы вещественные квадратичные гармонические делители в терминах полиномиальных решений некоторых фуксовых обыкновенных дифференциальных уравнений. Несколько серий гармонических многочленов, допускающих факторизацию над рациональными числами, найдены в статье [9]. Работа [5] содержит описание вполне приводимых вещественных гармонических делителей; они представляют собой произведения линейных форм, нулевые плоскости которых образуют систему Кокстера в $\mathbb{R}^n$. Логунов и Малинникова в [10] доказали, что частное двух вещественных гармонических на некоторой области в $\mathbb{R}^n$ функций продолжается до вещественно-аналитической функции в том случае, когда множество нулей числителя содержит множество нулей знаменателя, а в следующей статье [11] в случае совпадения множества нулей получили аналоги неравенств Харнака для частного и оценки его градиента. Это показывает, что вопросы делимости гармонических функций могут быть нетривиальными не только в случае полиномов, но и в более широких классах гармонических функций. Много содержательных примеров на эту тему приведено в работе [10].

В данной статье рассматриваются линейные делители комплексных гармонических полиномов.

Вполне приводимые комплексные гармонические делители охарактеризованы в теореме 3.2. Как уже сказано выше, в статье [5] установлено, что в вещественном случае они связаны с системами Кокстера гиперплоскостей и группой, порожденной отражениями в них. Поэтому в комплексном случае можно было бы ожидать, что ответ должен включать системы комплексных гиперплоскостей, ассоциированные с комплексными группами отражений, т. е. группами, порожденными элементами конечного порядка, которые оставляют неподвижными точки некоторой гиперплоскости. Однако, с точностью до замены переменных из $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$ и умножения на константу, к вполне приводимым вещественным гармоническим многочленам добавляются лишь полиномы вида $(x+yi)^k$ и $(x+yi)^k z$.

В теореме 4.1 описаны полиномы $p \in \mathcal{P}_{n-m}$, где $0 < m < n$, такие, что найдутся две независимые линейные формы ℓ_1 и ℓ_2, для которых $\ell_1^m p \in \mathcal{H}_n$ и $\ell_2^m p \in \mathcal{H}_n$. Они обладают тем свойством, что для некоторой формы ℓ многочлен $\ell^m p$ является собственной функцией группы вращений относительно некоторой оси. При $m = 1$ те же функции можно получить, дифференцируя зональные сферические функции. Эта конструкция дает серию примеров двух вещественных гармоник с большим множеством общих нулей. Точнее, оно представляет собой объединение параллельных окружностей, сумма длин которых растет как $4n$ при увеличении n. Длина узлового множества одной гармоники из $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ не превышает $2\pi n$ (см. [4]).

§2. Вспомогательные сведения

2.1. *Основные объекты.* Обозначения $\Delta, \mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}_n$ уже определены выше. По умолчанию считается, что пространства комплексные, а функции комплекснозначные. Положим

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

По определению группа $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$ сохраняет r^2, а также соответствующую симметричную билинейную форму, которая будет обозначаться через $\langle\,,\rangle$. Поэтому она коммутирует с Δ и сохраняет класс гармонических функций. Для $v \in \mathbb{C}^3$ положим

$$\ell_v(u) = \langle v, u\rangle\,.$$

Хорошо известно разложение

$$\mathcal{P}_n = \sum_{j\in J_n} r^{n-j}\mathcal{H}_j, \tag{1}$$

где $J_n = \{j \in \mathbb{Z} : \, 0 \le j \le n, \; n-j \;\text{ четно}\}$. Пусть

$$\pi_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{H}_n$$

обозначает проектор на $\mathcal{H}_n$ вдоль остальных компонент (1). Слагаемые в (1) инвариантны относительно естественного действия группы $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$ заменами переменных в $\mathbb{C}^3$. Оператор Лапласа Δ коммутирует с $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$. Пространства $\mathcal{H}_j$ неприводимы, $\dim\mathcal{H}_j = 2j+1$. Обозначим через $\mathcal{D}_n$ подмножество $\mathcal{P}_n$, состоящее из всех произведений n комплексно линейных форм на $\mathbb{C}^3$. Многочлены из $\mathcal{D}_n$ будут называться *вполне приводимыми.*

Любой коммутирующий с $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$ линейный оператор в $\mathcal{P}_n$ сохраняет каждое из пространств $\mathcal{H}_j$ и согласно лемме Шура либо тривиален, либо обратим в нем. В частности, это верно для π_n. Поэтому π_n не зависит от выбора инвариантного скалярного произведения в $\mathcal{P}_n$. Кроме того, инвариантные скалярные произведения в $\mathcal{H}_j$ попарно пропорциональны. Согласно (1) для каждого $p \in \mathcal{P}_n$ имеется единственное разложение

$$p = r^2 q + h, \tag{2}$$

где $q \in \mathcal{P}_{n-2}$ и $h \in \mathcal{H}_n$. Таким образом, если $h \in \mathcal{H}_n$, то $h = \pi_n p$ в том и только в том случае, когда r^2 делит $p - h$.

2.2. *Групповая симметрия.* Мы будем использовать группу немного большую, чем $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$, но сначала несколько слов о последней. Пусть $\mathcal{Q}_c$ обозначает квадрику $r^2 = c$. Группа $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$ сохраняет каждую квадрику $\mathcal{Q}_c$ и транзитивна на ней при $c \ne 0$, а также на $\mathcal{Q}_0 \setminus \{0\}$. Конус $\mathcal{Q}_0$

допускает эквивариантное двулистное накрытие пространством $\mathbb{C}^2$, которое задает отображение

$$\kappa : (u, v) \to (u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2uv).$$

Это отображение склеивает точки (a, b) и $-(a, b)$ и согласуется с действием групп $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и $\mathrm{SO}(3, \mathbb{C})$, действующих в $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ соответственно. Действие группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ в $\mathbb{C}^3$ можно задать отождествлением $\mathbb{C}^3$ с трехмерным пространством $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2)$ квадратичных форм на $\mathbb{C}^2$. Оно сохраняет определитель матрицы, отвечающей форме из $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2)$, который сам задает инвариантную квадратичную форму на $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2)$ и тем самым гомоморфизм $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ в $\mathrm{SO}(3, \mathbb{C})$.

Как известно, на сфере Римана $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ трехточечно транзитивна, т. е. любую тройку различных точек может перевести в любую другую такую тройку. Отображение κ задает биекцию между $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ и подмножеством $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, отвечающим конусу $\mathcal{Q}_0$. Поэтому $\mathrm{SO}(3, \mathbb{C})$ тоже трехточечно транзитивна на нем. Нам будет удобней иметь дело с несколько более широкой группой

$$G = \mathbb{C}^* \cdot \mathrm{O}(3, \mathbb{C}),$$

где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ действует умножением на ненулевые числа. У нее всего три орбиты на $\mathbb{C}^3$, а именно $\mathbb{C}^3 \setminus \mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_0 \setminus \{0\}$ и $\{0\}$. Ясно, что G для каждого ненулевого $w \in \mathcal{Q}_0$ двухточечно транзитивна на $\mathcal{Q}_0 \setminus \mathbb{C}w$ в следующем смысле: для любых двух упорядоченных пар различных точек $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$ найдется $g \in G$ такое, что $gu = v$ и $\mathbb{C}gw = \mathbb{C}w$. Условимся использовать обозначение

$$u \sim v$$

в этом случае, как и во всех ситуациях, когда два объекта принадлежат одной и той же орбите группы G при ее естественном действии.

2.3. *Вещественные вполне приводимые и гармонические полиномы.* В этом разделе все пространства и функции предполагаются вещественными. Мы не используем индекс $\mathbb{R}$, чтобы не загромождать обозначения. В частности, $\mathcal{D}_n$ обозначает множество вполне приводимых над $\mathbb{R}$ многочленов. Будут описаны две ситуации, связывающие гармонические и вполне приводимые вещественные полиномы.

Пусть $p \in \mathcal{P}_n$. Положим

$$D_p = p\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

и обозначим $D_v = D_{\ell_v}$ для краткости. Ясно, что

$$D_v f(u) = \frac{d}{dt} f(u + tv)\big|_{t=0}.$$

Максвелл предложил способ построения гармонических полиномов путем последовательного применения операторов $D_{v_1}, \dots, D_{v_n}$ к функции $\frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (см. [13]). Другими словами, к $\frac{1}{r}$ применяется оператор D_p, где $p \in \mathcal{D}_n$ (гармонический полином получается после умножения на r^{2n+1}). Сильвестр в [15] отметил единственность такого полинома p и дал набросок доказательства. Первое полное доказательство появилось в классическом двухтомнике Гильберта и Куранта [8, гл. VII, § 5]. Его существенную часть в определенных выше терминах можно сформулировать так: π_n взаимно однозначно отображает $\mathcal{D}_n$ на $\mathcal{H}_n$.

Вполне приводимые вещественные гармонические полиномы допускают замечательно простое описание, найденное Аграновским (см. [5]) в связи с задачами об инъективности преобразования Радона. Суть его в том, что множество $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{H}_n$ состоит из произведений линейных форм (без кратностей), нулевые гиперплоскости которых образуют систему Кокстера. Последнее означает, что отражения в них порождают конечную линейную группу. Доказательство основано на двух наблюдениях: во-первых, гармоническая функция нечетна относительно гиперплоскости, которая содержится в множестве ее нулей; во-вторых, оператор Δ перестановочен с отражениями и уменьшает степень полинома. Это верно для пространств любой размерности.

2.4. *Базис в $\mathcal{H}_n$.* Пусть $o = (0, 0, 1)$ — отмеченная точка в единичной сфере S^2 в $\mathbb{R}^3$, а также в квадрике $\mathcal{Q}_1$. Для группы T_o вращений относительно оси z в $\mathbb{R}^3$ и ее комплексификации $T_o^{\mathbb{C}}$ она неподвижна. В пространстве $\mathcal{H}_n$ существует базис, состоящий из собственных функций T_o. Положим

$$\begin{aligned} \zeta &= x + iy, \\ \bar{\zeta} &= x - iy. \end{aligned} \tag{3}$$

Черта не означает комплексного сопряжения, поскольку мы рассматриваем ζ и $\bar{\zeta}$ как функции на $\mathbb{C}^3$. Пусть ρ_t — вращение на угол t. Тогда $\zeta \circ \rho_t = e^{it}\zeta$ и $\bar{\zeta} \circ \rho_t = e^{-it}\bar{\zeta}$. Для любого $m = -n, \dots, n$ существует гармоническая функция из $\mathcal{H}_n$

$$f_{n,m}(\zeta, \omega, \bar{\zeta}) = \begin{cases} \zeta^m p_{n,m}(x, y, z), & 0 \le m \le n, \\ \bar{\zeta}^{|m|} p_{n,|m|}(x, y, z), & -n \le m \le 0 \end{cases} \tag{4}$$

такая, что $p_{n,|m|}$ — T_o-инвариантный многочлен. Она одна с точностью до умножения на константу. Полиномы $f_{n,m}$, где $m = -n, \dots, n$, образуют базис в $\mathcal{H}_n$. Это стандартный базис из весовых векторов неприводимого представления размерности $2n + 1$ группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Многочлены $p_{n,m}$ связаны с ассоциированными функциями Лежандра P_n^m. Нам не понадобятся ни явное выражение (см., например, [7, 11.5, формула (18)]), ни детальная информация о них, а только следующие факты:

(a) коэффициент при $z^{n-|m|}$ в $p_{n,m}$ отличен от нуля;

(b) $p_{n,m}$ зависит лишь от x^2+y^2 и z;

(c) $f_{n,m}$ не делится на x^2+y^2.

Последнее следует из (a), (b) и (4), а (b) следует из T_o-инвариантности $p_{n,m}$.

2.5. *Ограничение на пару прямых.* Пусть $v, u \in \mathbb{C}^3$. Положим

$$L_u = \mathbb{C}u \quad \text{и} \quad L_{v,u} = v + L_u.$$

Пересечение аффинного касательного пространства к $\mathcal{Q}_1$ в точке o с самой квадрикой $\mathcal{Q}_1$, которое мы обозначим через $\mathcal{L}_o$, является парой прямых

$$\mathcal{L}_o = L_{o,\tau} \cup L_{o,\bar\tau},$$

где

$$\tau = (1, i, 0) \quad \text{и} \quad \bar\tau = (1, -i, 0).$$

На $L_{o,\tau}$ имеем $\zeta = 0$, на $L_{o,\bar\tau}$ обращается в нуль $\bar\zeta$, и, кроме того, $z = 1$ на $\mathcal{L}_o$. Поэтому

$$\zeta\bar\zeta = x^2 + y^2 = 0 \quad \text{и} \quad z = 1 \quad \text{на} \quad \mathcal{L}_o. \tag{5}$$

Параметризуя $L_{o,\tau}$ как $\iota_\tau = \frac{1}{2}(t, it, 0)$ и $L_{o,\bar\tau}$ как $\iota_{\bar\tau} = \frac{1}{2}(t, -it, 0)$, получаем t в результате суперпозиций $\bar\zeta \circ \iota_\tau$ и $\zeta \circ \iota_{\bar\tau}$. Следовательно, оператор сужения

$$R_o : p \to p\big|_{\mathcal{L}_o}$$

ассоциирует с $p \in \mathcal{P}_n$ пару полиномов $(p_\tau, p_{\bar\tau})$ одной переменной степени n такую, что

$$p_\tau(0) = p_{\bar\tau}(0).$$

Обозначим пространство таких пар через $\mathcal{P}_{o,n}$. Оно линейно изоморфно $\mathcal{P}_{2n}$.

Лемма 2.1. *Отображение R_o есть биекция между $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{P}_{o,n}$.*

Доказательство. Так как $\dim \mathcal{H}_n = \dim \mathcal{P}_{o,n} = 2n+1$, достаточно установить сюръективность R_o. Согласно (5) моном $\zeta^j \bar\zeta^k z^l$ обращается в нуль на $\mathcal{L}_o$ при $j, k > 0$. С другой стороны, $R_o \zeta^m z^{n-m} \neq 0$, если $0 \le m \le n$. Из (a) и (b) следует, что $R_o f_{n,m} \neq 0$ для всех $m = -n, \dots, n$ и, более того, $f_{n,m} \circ \iota_\tau$ или $f_{n,m} \circ \iota_{\bar\tau}$ равно $ct^{|m|}$ при некотором $c \in \mathbb{C}^*$. Это доказывает лемму. $\square$

§3. Линейные делители однородных гармонических полиномов

3.1. *Лемма о делимости.* Для каждого $v \in \mathbb{C}^3 \setminus \mathcal{Q}_0$ формула

$$\rho_v u = u - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

задает отражение $\rho_v \in \mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ в плоскости $H_v = \{u : \langle v, u\rangle = 0\}$. Оно не зависит от выбора вектора $v \neq 0$ из ортогональной H_v прямой $L_v = \mathbb{C}v$.

Лемма 3.1. *Пусть $p \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$ и $v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.*

(i) *Предположим, что $v \notin \mathcal{Q}_0$. Тогда ℓ_v делит p в том и только в том случае, когда $p \circ \rho_v = -p$.*

(ii) *Если $v \in \mathcal{Q}_0$, то ℓ_v делит p тогда и только тогда, когда существует $g \in G$ такое, что $g\tau = v$ и*

$$p \circ g = \sum\nolimits_{m=1}^{n} c_m f_{n,m}, \tag{6}$$

где $c_m \in \mathbb{C}$ и $f_{n,m}$ определены в (4).

Доказательство. Если $v \notin \mathcal{Q}_0$, то $v \sim o$, и мы можем считать, что $v = o$. Тогда

$$\rho_o(x, y, z) = (x, y, -z), \quad \ell_o(x, y, z) = z,$$

$$p(x, y, z) = p_n(x, y) + p_{n-1}(x, y)z + \cdots + p_0 z^n, \tag{7}$$

где p_k — полином степени $n - k$. Если z делит p, то $p_n = 0$. Предположим, что $p_{n-2j} \neq 0$ при некотором $j > 0$, и пусть k — наименьшее j с этим свойством. Тогда Δp содержит слагаемое $2k(2k-1)z^{2k-2}p_{n-2k}$, которое не может сократиться. Следовательно, лишь нечетные степени z могут участвовать в этой сумме, и поэтому $p \circ \rho_v = -p$. Обратное очевидно. Это доказывает (i).

Поскольку включение $v \in \mathcal{Q}_0$ равносильно $v \sim \tau$, мы можем предположить, что $\ell_v = \zeta$. Полином p допускает разложение по базису (4):

$$p = \sum\nolimits_{m=-n}^{n} c_m f_{n,m}.$$

Пусть p_+ — его положительная часть, записанная в формулировке леммы, и $p_- = p - p_+$. Поскольку ζ делит p_+ согласно (4), вместе с условием леммы это означает, что ζ делит p_-. Следовательно, $p_- = 0$ на $L_{o,\tau}$. С другой стороны, слагаемые p_- подчинены второй части (4), благодаря чему p_- постоянна на $L_{o,\bar{\tau}}$. Так как точка o принадлежит обеим линиям, это влечет равенство $R_o p_- = 0$. Согласно лемме 2.1 $p_- = 0$, и поэтому $p = p_+$, что и завершает доказательство леммы. □

Следствие 3.1. *Если ℓ_v^2 делит $p \in \mathcal{H}_n$, то $v \in \mathcal{Q}_0$.*

Доказательство. Допустим, что ℓ_v делит p и $v \notin \mathcal{Q}_0$. Можно считать, что $\ell_v = z$. Согласно (i) правая часть (7) содержит лишь нечетные степени z. Достаточно доказать, что $p_{n-1} \neq 0$. Если наименьшая степень z, которая участвует в (7), равна $k > 1$, то слагаемое $k(k-1)z^{k-2}p_{n-k}$ в Δp не может сократиться, откуда и вытекает утверждение следствия. □

3.2. *Максимальный вполне приводимый делитель гармонического полинома.* Он равен произведению его линейных делителей и определен с точностью до умножения на константу. Напомним, что эквивалентность $\sim$ определена в разделе 2.2.

Теорема 3.2. *Пусть h_ℓ — максимальный вполне приводимый делитель полинома $h \in \mathcal{H}_n$. Допустим, что он нетривиален.*

(i) *Если h имеет линейный делитель ℓ_v при $v \in \mathcal{Q}_0$, то $h_\ell \sim \zeta^k$ или $h_\ell \sim \zeta^k z$, где $k \in \mathbb{N}$.*

(ii) *В противном случае $h_\ell \sim \prod_{\nu \in R} \ell_\nu$, где R — семейство нормалей для системы Кокстера гиперплоскостей в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Пусть $v \in \mathcal{Q}_0$, $u \notin L_v$ и ℓ_v и ℓ_u — делители h. Докажем, что

$$\langle v, u \rangle = 0. \tag{8}$$

Отметим, что (8) не выполняется при $u \in \mathcal{Q}_0 \setminus L_v$ и верно, если $u \in L_v$.

Можно считать, что $\ell_v = \zeta$. Пусть ζ^k —- наибольшая степень ζ, на которую делится h и $u \in \mathcal{Q}_0 \setminus L_\tau$. Тогда

$$(\zeta, \ell_u) \sim (\zeta, \bar{\zeta}).$$

Поэтому $h \sim h_1$, где h_1 делится на $\zeta\bar{\zeta}$. Это невозможно ввиду леммы 2.1, поскольку $R_o\zeta\bar{\zeta} = 0$. Таким образом, $u \notin \mathcal{Q}_0$. Тогда $u \sim o$, $v \sim w$ для некоторого $w \in \mathcal{Q}_0$ и $h \sim h_2$, где h_2 делится на $\ell_w^k z$. Согласно лемме 3.1 (i) имеем $h_2 \circ \rho_o = -h_2$. Если $\rho_o w \neq \pm w$, то у h_2 найдутся два непропорциональных делителя ℓ_w и $\ell_{w'}$, где $w' = \rho_o w$ и $w, w' \in \mathcal{Q}_0$. Выше доказано, что последнее невозможно. Если $w' = -w$, то $w \in L_o$, что противоречит равенству $L_o \cap \mathcal{Q}_0 = \{0\}$. Следовательно, $\rho_o w = w$. Поэтому $\langle o, w \rangle = 0$, что доказывает (8). Более того, условия $\langle o, w \rangle = 0$ и $w \in \mathcal{Q}_0$ влекут $w \in L_\tau$ или $w \in L_{\bar{\tau}}$. Поэтому либо $\zeta^k z$, либо $\bar{\zeta}^k z$ делит h_2. Далее, отражение $\rho_{o'}$, где $o' = (0, 1, 0)$, переставляет ζ и $\bar{\zeta}$, а также не изменяет z. Так как $-\rho_{o'} \in \mathrm{SO}(3)$, то $\zeta^k z \sim \bar{\zeta}^k z$, и мы можем не учитывать $\bar{\zeta}^k z$.

Осталось доказать максимальность $\zeta^k z$. Можно считать, что $\zeta^k z$ делит h. Пусть ℓ_u — еще один линейный делитель h. Из (8) следует, что $u = t\tau + so$ при некоторых $t, s \in \mathbb{C}$. Благодаря выбору k имеем $u \notin L_\tau$.

Следовательно, $s \neq 0$, и мы можем положить $s = 1$. По следствию 3.1 h не может делиться на z^2. Поэтому $t \neq 0$ и $u = o + t\tau$. Легко проверить прямым вычислением, что $\rho_o\rho_u o = o - 2t\tau$ и $\rho_o\rho_u\tau = \tau$. Поэтому h должно делиться на $\ell_{u'}$ при $u' = o - 2t\tau$, $u' = o - 4t\tau$ и так далее. Это не может быть верным. Поэтому $h_\ell \sim \zeta^k z$, если $h_\ell \not\sim \zeta^k$ для некоторых k, и (i) доказано.

Согласно лемме 3.1 имеется взаимно однозначное соответствие между плоскостями $\ell_v = 0$ при $v \notin \mathcal{Q}_0$ и отражениями ρ_v такими, что $h \circ \rho_v = -h$. Пусть $\mathfrak{L}_h$ — множество всех линейных делителей h, рассматриваемых с точностью до умножения на константу. Из утверждения (i) и условия (ii) следует, что $v \notin \mathcal{Q}_0$ при всех $\ell_v \in \mathfrak{L}_h$. Пусть $\mathfrak{R}_h$ — множество отражений ρ_v, отвечающих $\ell_v \in \mathfrak{L}_h$, и W — порожденная $\mathfrak{R}_h$ подгруппа $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$. Это группа Кокстера, которая сохраняет $\mathfrak{L}_h$, так как $h \circ \rho_v = -h$ для всех $\rho_v \in \mathfrak{R}_h$ по лемме 3.1. Она также влечет равенство $w\,\mathfrak{R}_h w^{-1} = \mathfrak{R}_h$ для всех $w \in W$. Согласно [1, гл. IV, 4, лемма 2] каждый элемент W является произведением различных отражений из $\mathfrak{R}_h$. Следовательно, W конечна. Поэтому существуют $g \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ и конечная подгруппа W' максимальной компактной подгруппы $\mathrm{O}(3)$ группы $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ такие, что $W = gW'g^{-1}$. Это верно, поскольку $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ полупроста и число ее компонент конечно (см., например, [3, гл. 5, § 3, теорема 3]). Как и W, группа W' порождена инволюциями, у которых только одно собственное число равно -1. Такие инволюции в $\mathrm{O}(3)$ являются отражениями в 2-плоскостях из $\mathbb{R}^3$. Поскольку группа W' конечна, они образуют систему Кокстера, что доказывает (ii) и теорему. □

Следствие 3.3. *Произведение всех линейных делителей однородного гармонического многочлена — гармонический полином.*

Доказательство. Легко проверить, что функции ζ^k и $\zeta^k z$ гармонические. В случае (ii) мы следуем [5]. Поскольку отражения коммутируют с оператором Лапласа, $(\Delta h_\ell) \circ \rho = -\Delta h_\ell$. Согласно лемме 3.1 (i) каждый линейный делитель h_ℓ делит и Δh_ℓ, а так как степень Δh_ℓ меньше степени h_ℓ, то $\Delta h_\ell = 0$. □

§4. Общие нули сферических гармоник

Множество общих нулей для пар u, v общего положения в $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ конечно, однако оно может быть и бесконечным. Например, если u, v — гармонические многочлены двух переменных, $p = xu(y, z)$, $q = xv(y, z)$, то $\Delta p = \Delta q = 0$ и p, q обращаются в нуль на экваторе $\{x = 0\} \cap S^2$. Во всех известных мне примерах бесконечные множества общих нулей в S^2 представляют собой объединения окружностей с конечным множеством. Опишем одну их серию.

4.1. *Серия пар гармоник с массивным множеством общих нулей.* Пусть $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ таков, что $\ell_v p, \ell_u p \in \mathcal{H}_n$ для пары линейно независимых $u, v \in \mathbb{C}^3$. Тогда нули p будут общими для $\ell_v p$ и $\ell_u p$. Мы найдем все такие p. Начнем с примера.

По определению зональная сферическая гармоника $\phi_{a,n}$ зависит лишь от расстояния от точки $a \in S^2$ во внутренней метрике S^2. Известно, что

$$\phi_{a,n}(u) = cP_n(\langle a, u\rangle),$$

где c — константа, $a, u \in S^2$ и P_n — n-й полином Лежандра. Многочлен $f_{n,0}$ пропорционален $\phi_{o,n}$ на S^2, а $\phi_{o,n}$ единственным образом продолжается до гармонического полинома на $\mathbb{R}^3$, который пропорционален $f_{n,0}$. Как $\phi_{o,n}$, так и $f_{n,0}$ характеризуются свойством инвариантности относительно группы T_o вращений вокруг оси z с точностью до умножения на константу.

Пусть ξ — линейное векторное поле из $\mathrm{so}(3)$. Оно может быть отождествлено с кососимметрической матрицей. Тогда $\xi(a) = \xi a$ и $\ell_{\xi a}(u) = \langle \xi a, u\rangle = -\langle a, \xi u\rangle$ для всех $u \in \mathbb{R}^3$. Обозначим через D_ξ соответствующий дифференциальный оператор. Ясно, что $D_\xi \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n$. Поскольку поле ξ касается сферы S^2, на ней выполняется равенство

$$D_\xi \phi_{a,n}(u) = cP_n'(\langle a, u\rangle)\,\langle a, \xi u\rangle\,.$$

Таким образом, $D_\xi \phi_{a,n}$ делится на $\ell_{\xi a}$. То же самое верно и для $D_\xi f_{n,0}$. Ясно, что существуют $\xi, \eta \in \mathrm{so}(3)$ такие, что $\ell_{\xi a}$ и $\ell_{\eta a}$ непропорциональны. Более того, всегда $\xi a \perp a$ и ξa может быть любым вектором, перпендикулярным a. Поэтому это та ситуация, о которой шла речь выше. В терминах присоединенных функций Лежандра P_n^m это соответствует равенству $P_n^1(t) = -\sqrt{1-t^2}P_n'(t)$.

Множество общих нулей $D_{\xi a} f_{n,0}$ и $D_{\eta a} f_{n,0}$ на S^2 представляет собой объединение окружностей $\{z = z_k\} \cap S^2$, где z_k — k-й нуль многочлена P_n'. Сумму длин этих окружностей нетрудно оценить. Поскольку нули P_n' чередуются с нулями P_n, можно воспользоваться известными оценками чисел $\theta_k = \arccos t_k$, где t_k — k-й нуль полинома Лежандра P_n, $0 < \theta_k < \pi$ и $k = 1, \ldots, n$ (см. [14, теорема 6.21.2]):

$$\frac{2k-1}{2n+1}\pi \le \theta_k \le \frac{2k}{2n+1}\pi.$$

Так как радиус окружности, отвечающий z_k, равен $\sin\theta_k$, где $\theta_k \ge \frac{2k-1}{2n+1}\pi$, задача сводится к оценке суммы $2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k$. Поделив ее на n и умножив на π, мы получим интегральную сумму для $\int_0^\pi \sin t\,dt = 2$, что позволит оценить сумму длин как $4n$. При этом точная оценка сверху для длины множества нулей одной вещественной сферической гармоники из $\mathcal{H}_n$ равна $2\pi n$ [4, теорема 5].

4.2. *Многочлены, произведения которых с разными линейными функциями гармонические.* Следующая теорема характеризует чуть более общую ситуацию, чем в разделе 4.1.

Теорема 4.1. *Пусть $u, v \in \mathbb{C}^3$ линейно независимы, L — их линейная оболочка, $p \in \mathcal{P}_{n-m}$, где $1 \le m < n$ и $\ell_u^m p$, $\ell_v^m p \in \mathcal{H}_n$.*

(i) *Если $m > 1$, то $(u, v, p) \sim (\tau, \bar\tau, p_{n,m})$.*

(ii) *Если $m = 1$, то в L существует базис u', v', для которого выполняется одно из следующих соотношений: либо $(u', v', p) \sim (\tau, \bar\tau, p_{n,1})$, либо $(u', v', p) \sim (\tau, o, \zeta^{n-1})$.*

Доказательство. Если $m > 1$, то $u, v \in \mathcal{Q}_0$ согласно следствию 3.1, откуда $(u, v) \sim (\tau, \bar\tau)$, поскольку они независимы. Поэтому (i) достаточно доказать в предположении $\zeta^m p, \bar\zeta^m p \in \mathcal{H}_n$. Рассуждения имеют силу и при $m = 1$.

Установим сначала, что ни ζ, ни $\bar\zeta$ не делят p. В противном случае либо $\zeta^m p$, либо $\bar\zeta^m p$ делится на $\zeta\bar\zeta = x^2 + y^2$, но для полинома из $\mathcal{H}_n$ это невозможно. В самом деле, пусть $\zeta\bar\zeta q \in \mathcal{H}_n$ для некоторого ненулевого $q \in \mathcal{P}_{n-2}$. Раскладывая q по базису из собственных функций группы T_o в $\mathcal{P}_{n-2}$ и умножая на $\zeta\bar\zeta$, благодаря T_o-инвариантности $\zeta\bar\zeta$ получаем такое же разложение для $\zeta\bar\zeta q$. Так как в $\mathcal{P}_n$ найдется лишь одно такое разложение, все его компоненты гармонические. Поэтому можно считать, что $\zeta\bar\zeta q$ — одна из собственных функций в $\mathcal{H}_n$, т. е. что она пропорциональна $f_{n,m}$ при некотором m, но это противоречит свойству (c) из раздела 2.4.

Согласно доказанному и лемме 3.1 (ii) имеем

$$\zeta^m p = \zeta^m(a_0 p_{n,m} + a_1\zeta p_{n,m+1} + \dots + a_{n-m}\zeta^{n-m} p_{n,n}),$$
$$\bar\zeta^m p = \bar\zeta^m(b_0 p_{n,m} + b_1\bar\zeta p_{n,m+1} + \dots + b_{n-m}\bar\zeta^{n-m} p_{n,n}).$$

Следовательно,

$$p = a_0 p_{n,m} + \sum_{k=1}^{n-m} a_k \zeta^k p_{n,m+k} = b_0 p_{n,m} + \sum_{k=1}^{n-m} b_k \bar\zeta^k p_{n,m+k}.$$

На орбите общего положения группы T_o функции ζ^k линейно независимы, а $p_{n,m+k}$ постоянны. Отсюда следует, что $a_k = b_k = 0$ при $k = 1, \dots, n-m$ и $a_0 = b_0$, что доказывает (i).

Пусть $m = 1$. Тогда $\Delta(\ell_w p) = 0$ для всех $w \in L$. Любое двумерное комплексно линейное подпространство $\mathbb{C}^3$ либо касается конуса $\mathcal{Q}_0$, либо пересекает его по двум комплексным прямым. По условию, это верно для L. В случае двух прямых L порождено двумя векторами u', v' из $\mathcal{Q}_0$, и поэтому можно повторить рассуждения доказательства (i), которые приводят к эквивалентности $(u', v', p) \sim (\tau, \bar\tau, p_{n,1})$.

Пусть L касается $\mathcal{Q}_0$ в некоторой точке $w \in \mathcal{Q}_0$. Тогда $L \perp w$. Можно считать, что $w = \tau$. Поскольку $o \perp \tau$, это влечет $o \in L$. Следовательно, $\mathcal{L}$ содержит не имеющую общих точек с $\mathcal{Q}_0$ прямую $L_{o,\tau} = o + \mathbb{C}\tau$. Согласно лемме 3.1 (i) для всех $v \in L_{o,\tau}$ выполняется равенство $(\ell_v p) \circ \rho_v = -\ell_v p$. Поэтому

$$p \circ \rho_v = p. \tag{9}$$

Положим $v_t = o + t\tau$ и $\gamma_t = \rho_{v_t} \circ \rho_o$. Простое вычисление показывает, что

$$\begin{gathered} \zeta \circ \gamma_t = \zeta, \\ z \circ \gamma_t = z + 2t\zeta, \\ \bar{\zeta} \circ \gamma_t = \bar{\zeta} + 4tz - 4t^2\zeta. \end{gathered}$$

Таким образом, γ_t — это унипотентная однопараметрическая подгруппа $\mathrm{SO}(3, \mathbb{C})$, а $\mathbb{C}\zeta^{n-1}$ — множество ее неподвижных точек в $\mathcal{P}_{n-1}$. Согласно (9) $p \in \mathbb{C}\zeta^{n-1}$, откуда и следует (ii). $\square$

Список литературы

1. *Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли.* Гл. IV-VI. М.: Мир, 1972.
2. *Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, компактные вещественные группы Ли.* М.: Мир, 1986.
3. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* М.: Наука, 1988.
4. *Гичев В. М.* Несколько замечаний о сферических гармониках // *Алгебра и анализ.* 2008. Т. 20, Вып. 4. С. 64–86.
5. *Agranovsky M. L.* On a problem of injectivity for the Radon transform on a paraboloid // *Contemporary Math.* 1999. V. 251. P. 1–14.
6. *Agranovsky M. and Krasnov Y.* Quadratic divisors of harmonic polynomials in $\mathbb{R}^n$ // *J. Anal. Math.* 2000. V. 82. P. 379–395.
7. *Bateman H. and Erdélyi A. Higher Transcendental Functions.* New York; London: McGraw-Hill Book Co., 1953. V. 2.
8. *Courant R. and Hilbert D. Methoden der Mathematischen Physik.* Berlin: Verlag von Julius Springer, 1931. V. 1.
9. *Gichev V. M.* Factorization of special harmonic polynomials of three variables // *Sib. Èlektron. Mat. Izv.* 2020. V. 17. P. 1229–1312.
10. *Logunov A. and Malinnikova E.* On ratios of harmonic functions // *Adv. Math.* 2015. V. 274. P. 241–262.
11. *Logunov A. and Malinnikova E.* Ratios of harmonic functions with the same zero set // *Geom. Funct. Anal.* 2016. V. 26. P. 909–925.

12. *Mangoubi D. and Weller-Weiser A.* Harmonic functions vanishing on a cone // *Isr. J. Math.* 2019. V. 230, N 2. P. 563–581.
13. *Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism.* New York: Dover Publ. Inc., 1954. V. 1.
14. *Szegö G.* Orthogonal Polynomials / Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., V. 23. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1959.
15. *Sylvester J. J.* Note on spherical harmonics // *Phil. Mag.* 1876. V. 2. P. 291–307.

Completely reducible factors of harmonic polynomials of three variables

V. M. Gichev

Abstract. We describe the divisors of complex valued homogeneous harmonic polynomials on $\mathbb{R}^3$ which are products of linear forms and characterize the homogeneous polynomials p that admit a couple of linear forms ℓ_1 and ℓ_2 such that $\ell_1^m p$ and $\ell_2^m p$ are harmonic for some $m \in \mathbb{N}$. The latter gives an example of a pair of spherical harmonics whose set of common zeros has length that is compatible with the upper bound of this quantity for a single harmonic.

Keywords: spherical harmonics, divisibility of harmonic polynomials.

Гичев Виктор Матвеевич
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: gichev@ofim.oscsbras.ru

Поступила в редакцию
4 апреля 2020 г.
Получена после доработки
29 июня 2020 г.
Принята к публикации
7 июля 2020 г.