G. L. Brovko, Modeling of nonhomogeneous mediums of complex structure and Cosserat continuum,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1996, Number 5, 55–63

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2054

$=T/(G\alpha_0 a)$. В таблице даны значения коэффициента сопротивления $V=T/(G\varepsilon)$ для ряда значений параметров α и β.

α	V		
	$\beta=2$	$\beta=4$	$\beta=8$
$\pi/9$	0,369	0,267	0,174
$2\pi/9$	0,490	0,326	0,197
$\pi/3$	0,599	0,372	0,213
$4\pi/9$	0,701	0,410	0,225

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Коваленко Е. В. Периодические контактные задачи для упругой полосы//Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. **30**, № 4. 18—33.
2. Александров В. М. Аналитические методы решения задач теории упругости для тел конечных размеров с собственно смешанными граничными условиями//Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979. 21—27.
3. Александров В. М., Коваленко Е. В. Контактные задачи для полосовых, цилиндрических, клиновидных и конусообразных областей//Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону. 1983. 5—19.
4. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М., 1986.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., 1968.
7. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., 1973.
8. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М., 1986.
9. Коваленко Е. В., Тарасов Д. Г., Чебаков М. И. Точное решение антиплоской контактной задачи для конечных канонических областей//Прикл. матем. и механ. 1990. **54**, вып. 5. 837—841.
10. Александров В. М., Чебаков М. И. О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора// //Прикл. матем. и механ. 1983. **47**, вып. 5. 790—798.

Поступила в редакцию
26.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.2:3

Г. Л. Бровко

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ И КОНТИНУУМ КОССЕРА

Наряду с различными известными подходами к построению классической модели сплошной среды [1—4] в последние десятилетия интенсивное развитие получили новые, неклассические подходы к описанию механических процессов, особенно в неоднородных телах сложной структуры, включающей разнотипные взаимодействующие фазы. В таких подходах используются другие (более широкие) наборы основных характеристик, предусматривающие достаточно подробное описание (фазовой) структуры частицы среды (представительного объема), свойственных ей форм движений (степеней свободы) и взаимодействий различного рода. Некоторые аспекты таких построений затронуты, например, в работах [1, 2, 5—8].

В настоящей работе для неоднородных тел сложной структуры (смесей, суспензий, пористых влагонаполненных сред, твердых агрегатов и т. п.), называемых здесь конгломератами, с помощью эффективной (для выбранного масштаба и требуемой точности) замены сложных структур более простыми механическими структурами (средами, конструкциями) построена модель гетерогенной среды, включающей разнотипные фазы с различными степенями свободы. В предположении механического взаимодействия фаз и при отсутствии внешних источников поступления масс и фазовых переходов выведены уравнения неразрывности, уравнения движения и получено выражение для мощности работы внутренних сил. При этом в рамках общего предположения о наличии объемного и контактного (в виде сил и моментов) внутреннего взаимодействия фаз (интерактивного взаимодействия) показано, что состояние гетерогенной среды (модели исходного конгломерата) и ее движение не зависят от наличия контактных интерактивных сил. Предложенная модель гетерогенной среды распространена на случаи существования различных внутренних кинематических связей. Рассмотрены частные и специальные случаи, в которых построенная модель сводится к моделям классической сплошной среды, континуума и псевдоконтинуума Коссера, другим известным моделям сред.

1. Основные характеристики модели. Рассмотрим конгломерат, содержащий в каждый момент движения в любой своей макрочастице представительного объема $\delta\mathscr{V}$ элементы сред двух разных типов, заполняющие соответственно части $\delta\mathscr{V}_1$ и $\delta\mathscr{V}_2$ этого объема ($\delta\mathscr{V}=\delta\mathscr{V}_1+\delta\mathscr{V}_2$). Обозначим средние по объемам $\delta\mathscr{V}_1$ и $\delta\mathscr{V}_2$ плотности масс материалов сред через $\rho_{\text{м}1}$ и $\rho_{\text{м}2}$ соответственно. Отвлекаясь от детальной геометрической картины размещения этих сред (фаз) в подобластях макрочастицы и предполагая величины площадей $\delta\mathscr{S}_1$, $\delta\mathscr{S}_2$ плоских сечений таких подобластей в среднем одинаково пропорциональными на всех элементарных площадках конгломерата $\delta\mathscr{S}=\delta\mathscr{S}_1+\delta\mathscr{S}_2$, для элементарных объема $\delta\mathscr{V}$, массы $\delta\mathscr{M}$ и площадки $\delta\mathscr{S}$ конгломерата и составляющих их элементарных объемов $\delta\mathscr{V}_1$, $\delta\mathscr{V}_2$, масс $\delta\mathscr{M}_1$, $\delta\mathscr{M}_2$ и площадок $\delta\mathscr{S}_1$, $\delta\mathscr{S}_2$ отдельных фазовых сред имеем

$$\begin{gathered}
\delta\mathscr{M}=\delta\mathscr{M}_1+\delta\mathscr{M}_2=\rho\delta\mathscr{V}=\rho_{\text{м}1}\delta\mathscr{V}_1+\rho_{\text{м}2}\delta\mathscr{V}_2,\\
\delta\mathscr{M}_1=\rho_{\text{м}1}\delta\mathscr{V}_1=m_1\delta\mathscr{M},\ \delta\mathscr{M}_2=\rho_{\text{м}2}\delta\mathscr{V}_2=m_2\delta\mathscr{M},\\
\delta\mathscr{V}_1=\nu_1\delta\mathscr{V},\ \delta\mathscr{V}_2=\nu_2\delta\mathscr{V},\ \delta\mathscr{S}_1=s_1\delta\mathscr{S},\ \delta\mathscr{S}_2=s_2\delta\mathscr{S},\\
\frac{1}{\rho}=\frac{m_1}{\rho_{\text{м}1}}+\frac{m_2}{\rho_{\text{м}2}},\ m_1+m_2=1,\ v_1=\frac{m_1\rho}{\rho_{\text{м}1}},\ v_2=\frac{m_2\rho}{\rho_{\text{м}2}},
\end{gathered} \tag{1}$$

где ρ — средняя по макрочастице в целом (эффективная глобальная) плотность массы макрочастицы конгломерата; m_1 и m_2 — удельные на единицу массы конгломерата содержания масс составляющих его сред (удельные массы); v_1 и v_2 — удельные объемы этих сред; s_1 и s_2 — удельные площади элементарных площадок. Рассматривая площадки $\delta\mathscr{S}$ как сечения макрочастицы конгломерата, можно получить равенства $s_1=v_1$, $s_2=v_2$, принимаемые обычно в подобных построениях.

В качестве математической модели конгломерата примем модель гетерогенной двухфазной сплошной среды в виде совокупности двух гипотетических сплошных сред (фаз модели, или модельных фаз), которые в процессе движения полностью заполняют области трехмерного пространства, налагаемые друг на друга. Величины $\rho_1=v_1\rho_{м1}\equiv m_1\rho$, $\rho_2=v_2\rho_{м2}\equiv m_2\rho$ примем в качестве плотностей массы соответствующих модельных фаз (эффективных плотностей). Предполагая, что одна из фаз содержит распределенные в макрочастице массовые элементы вращения («включения»), примем, что движение первой модельной фазы подобно движению обычной классической сплошной среды полностью описывается полем $\mathbf{r}_1$ положений ее точек в трехмерном пространстве (т. е. полем $\mathbf{u}_1$ перемещений или $\mathbf{v}_1$ скоростей перемещений ее точек), а движение второй фазы — аналогичным полем $\mathbf{r}_2$ (или $\mathbf{u}_2$, или $\mathbf{v}_2$), а также полем вращений с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ присоединенных в точках среды элементов, для которых удельный на единицу массы $\delta\mathscr{M}_2$ тензор моментов инерции $\mathbf{j}$ будем считать известной характеристикой среды.

Предполагая, что силовые взаимодействия для обеих фаз характеризуются массовыми (объемными), а также контактными (поверхностными) силами и силовыми моментами, считая воздействия внешних тел на конгломерат заданными, примем экстраполяции $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{g}_1$ (на всю область макрочастицы конгломерата) истинных средних в макрочастице массовых (на единицу массы $\delta\mathscr{M}_1$ материала первой исходной фазы) плотностей внешних массовых сил и силовых моментов в качестве полей внешних силовых воздействий для первой модельной фазы. Контактное силовое воздействие на первую фазу в пределах элементарной площадки $\delta\mathscr{S}$ с нормалью $\mathbf{n}$ зададим в модели гетерогенной среды средними в расчете на $\delta\mathscr{S}$ (эффективными) вектором напряжения $\mathbf{t}_{1n}=s_1\mathbf{t}_{м1n}$ и тензором напряжений $\mathbf{S}_1=s_1\mathbf{S}_{м1}$, причем выполнена формула Коши $\mathbf{t}_{1n}=\mathbf{S}_1\mathbf{n}$ для первой модельной фазы ($\mathbf{t}_{м1n}$, $\mathbf{S}_{м1}$ — средние по представительной макрочастице значения вектора и тензора истинных напряжений в материале первой исходной фазы: $\mathbf{t}_{м1n}=\mathbf{S}_{м1}\mathbf{n}$). Аналогично для векторов истинных $\mathbf{m}_{м1n}$ и эффективных $\mathbf{m}_{1n}$ поверхностных моментных усилий и соответствующих истинных $\mathbf{M}_{м1}$ и эффективных $\mathbf{M}_1$ тензоров моментных напряжений имеем $\mathbf{m}_{м1n}=\mathbf{M}_{м1}\mathbf{n}, \mathbf{m}_n=\mathbf{M}_1\mathbf{n}$. Введенными эффективными тензорами $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{M}_1$ описываются внутренние эффективные (силовые и моментные) напряжения в первой модельной фазе, через них, конечно, выражаются и заданные внешние граничные (эффективные) воздействия на эту фазу. Аналогично для второй фазы: внешние массовые воздействия характеризуются полями массовых сил $\mathbf{f}_2$ и массовых силовых моментов $\mathbf{g}_2$, а внутренние контактные взаимодействия (равно как и внешние граничные воздействия) — тензорными полями эффективных напряжений $\mathbf{S}_2$ и эффективных моментных напряжений $\mathbf{M}_2$.

Кроме этого из соображений наибольшей общности в рамках наших построений примем, что в процессе движения конгломерата могут возникать взаимные (интерактивные) силовые воздействия фаз как массовые, так и поверхностные, а именно будем считать, что интерактивное воздействие второй модельной фазы на первую выражается векторными полями массовых сил $\mathbf{f}_1^{(i)}$ и массовых силовых моментов $\mathbf{g}_1^{(i)}$, поверхностными усилиями и моментными усилиями с эффективными тензорами напряжений $\mathbf{S}_1^{(i)}$ и моментных напряжений $\mathbf{M}_1^{(i)}$, а воздействие первой фазы на вторую выражается аналогичными полями $\mathbf{f}_2^{(i)}$, $\mathbf{g}_2^{(i)}$, $\mathbf{S}_2^{(i)}$, $\mathbf{M}_2^{(i)}$. При этом, рассматривая фазы как отделенные тела, локально взаимодействующие друг с другом, согласно третьему закону Ньютона для случая, когда конфигурации взаимодействующих элементов фаз совпадают или близки друг к другу*, получаем тождественные равенства для полевых функций, заданных в одной и той же области (актуальной конфигурации конгломерата):

$$\rho_1 \mathbf{f}_1^{(i)} \equiv -\rho_2 \mathbf{f}_2^{(i)} =: \mathbf{f}^{(i)}, \quad \rho_1 \mathbf{g}_1^{(i)} \equiv -\rho_2 \mathbf{g}_2^{(i)} =: \mathbf{g}^{(i)},$$
$$\mathbf{S}_1^{(i)} \equiv \mathbf{S}_2^{(i)} =: \mathbf{S}^{(i)}, \quad \mathbf{M}_1^{(i)} \equiv \mathbf{M}_2^{(i)} =: \mathbf{M}^{(i)}, \tag{2}$$

где введенные для этих полей обозначения $\mathbf{f}^{(i)}$ и $\mathbf{g}^{(i)}$ естественно интерпретировать как эффективные объемные плотности сил и моментов, а $\mathbf{S}^{(i)}$ и $\mathbf{M}^{(i)}$ — как эффективные тензоры напряжений интерактивного взаимодействия модельных фаз.

Заметим, что для конгломерата в целом (без разделения на фазы) наряду с эффективной глобальной плотностью массы ρ могут быть введены эффективные глобальные величины внешних массовых сил $\mathbf{f}$ и моментов $\mathbf{g}$, а также тензоров напряжений $\mathbf{S}$ и моментных напряжений $\mathbf{M}$, которые в случае (2) выражаются равенствами

$$\mathbf{f} = m_1 \mathbf{f}_1 + m_2 \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{g} = m_1 \mathbf{g}_1 + m_2 \mathbf{g}_2,$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + 2\mathbf{S}^{(i)}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + 2\mathbf{M}^{(i)}. \tag{3}$$

Все поля будем предполагать достаточно гладкими.

Для конгломератов, состоящих более чем из двух различных фаз, подобное построение приводит к аналогичным моделям многофазных гетерогенных сред.

2. Уравнения неразрывности и уравнения движения. Рассматривая для простоты чисто механическое движение конгломерата без взаимных превращений фаз (фазовых переходов) и при отсутствии внешних источников поступления масс, согласно закону сохранения массы для каждой из фаз получим уравнения для эффективных плотностей масс ρ_1, ρ_2 модельных сред, имеющие в эйлеровом описании известный вид уравнений неразрывности

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad \frac{d\rho_2}{dt} + \rho_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0. \tag{4}$$

Применяя законы движения Коши—Эйлера к первой модельной фазе (как сплошной среде), приходим с учетом (4) к уравнениям движения первой фазы

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}^{(i)}) + \rho_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}^{(i)} = \rho_1 \dot{\mathbf{v}}_1, \tag{5}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}^{(i)}) + 2\operatorname{coax}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}^{(i)}) + \rho_1 \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}^{(i)} = 0, \tag{6}$$

где точкой обозначена материальная производная по времени, векторная величина $\operatorname{coax} \mathbf{N}$ для тензора второго ранга $\mathbf{N}$ обозначает коаксиальный вектор антисимметричной части $\operatorname{skw} \mathbf{N}$ тензора $\mathbf{N}$: $\operatorname{coax} \mathbf{N} :=$ $= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{N}$ ($\boldsymbol{\epsilon}$ — тензор Леви—Чивиты).

Аналогично для второй модельной фазы при выполнении (4) получаем уравнения движения

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}^{(i)}) + \rho_2 \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}^{(i)} = \rho_2 \dot{\mathbf{v}}_2, \tag{7}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}^{(i)}) + 2\operatorname{coax}(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}^{(i)}) + \rho_2 \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}^{(i)} = \rho_2 (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\omega}_2)^{\cdot}. \tag{8}$$

* Первый случай типичен для смесей жидкостей, суспензий, жидконаполненных пористых тел, второй — для конгломератов с твердыми (деформируемыми) фазами, допускающими малое взаимное смещение.

Уравнения (4)—(8) выражают общие для всех рассматриваемых гетерогенных сред механические законы баланса в эйлеровом описании. Эти же уравнения остаются в силе и в случае движения фаз с относительно смещенными (близкими) конфигурациями, такими, что векторное поле $\mathbf{u}_{\text{отн}} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ взаимного смещения точек фаз (второй фазы относительно первой) удовлетворяет допущению классической теории малых деформаций [1—4]. Напомним, что во всех таких случаях выполняются равенства (2) и как следствие (3).

3. Работа внутренних сил. Упрощение уравнений движения и интерактивных взаимодействий. Для произвольной актуальной конфигурации конгломерата, занимающей область Ω трехмерного пространства с границей Γ, рассмотрим функционал мощности работы внешних сил

$$\mathcal{W}_{(e)} \equiv \int_\Omega \rho_1 \mathbf{f}_1 \mathbf{v}_1 d\mathcal{V} + \int_\Gamma \mathbf{t}_1 \mathbf{v}_1 d\mathcal{S} + \int_\Omega \rho_1 \mathbf{g}_1 \boldsymbol{\omega}_1 d\mathcal{V} + \int_\Gamma \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\omega}_1 d\mathcal{S} +$$

$$+ \int_\Omega \rho_2 \mathbf{f}_2 \mathbf{v}_2 d\mathcal{V} + \int_\Gamma \mathbf{t}_2 \mathbf{v}_2 d\mathcal{S} + \int_\Omega \rho_2 \mathbf{g}_2 \boldsymbol{\omega}_2 d\mathcal{V} + \int_\Gamma \mathbf{m}_2 \boldsymbol{\omega}_2 d\mathcal{S}, \tag{9}$$

где $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_1$ — заданные в Ω внешние массовые силы и моменты; $\mathbf{t}_1, \mathbf{m}_1$ — заданные на Γ внешние (эффективные) поверхностные силы и моменты для первой фазы ($\mathbf{t}_1 = \mathbf{S}_1 \mathbf{n}$, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней единичной нормали на границе Γ); $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{m}_2$ — аналогичные величины для второй фазы ($\mathbf{t}_2 = \mathbf{S}_2 \mathbf{n}$, $\mathbf{m}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{n}$); $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости перемещений точек фазовых сред; $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ — мгновенные скорости вращения элементов фазовых сред, а именно $\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 \equiv \operatorname{coax} \boldsymbol{\Omega}_1$ — скорость вращения элемента объема первой среды ($\boldsymbol{\Omega}_1 \equiv \operatorname{skw} \nabla \mathbf{v}_1$ — соответствующий спин, т. е. антисимметричная часть тензора скоростей дисторсий $\nabla \mathbf{v}_1$); $\boldsymbol{\omega}_2$ — скорость вращения присоединенных элементов (включений) второй среды.

Согласно известной теореме об изменении кинетической энергии $\mathcal{K}$ в механических движениях имеем

$$\mathcal{W}_{(e)} = \dot{\mathcal{K}} + \mathcal{W}_{(i)},$$

где $\mathcal{W}_{(i)}$ — функционал работы внутренних сил. Отсюда, преобразуя (9) с использованием уравнений (2), (4)—(8) и учитывая симметричность тензора инерции $\mathbf{j}$, получаем выражение для кинетической энергии

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_\Omega (\rho_1 |\mathbf{v}_1|^2 + \rho_2 |\mathbf{v}_2|^2 + \boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{j} \boldsymbol{\omega}_2) \, d\mathcal{V},$$

а также выражение для функционала мощности работы внутренних сил конгломерата

$$\mathcal{W}_{(i)} = \int_\Omega W_{(i)} d\mathcal{V}$$

с удельной (на единицу объема актуальной конфигурации конгломерата) плотностью

$$W_{(i)} \equiv \mathbf{S}_1 : \mathbf{V}_1 + \mathbf{M}_1 : \nabla \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{S}_2 : \mathbf{V}_2 + 2 \operatorname{coax} \mathbf{S}_2 (\operatorname{coax} \nabla \mathbf{v}_2 - \boldsymbol{\omega}_2) +$$

$$+ \mathbf{M}_2 : \nabla \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{f}^{(i)} \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{g}^{(i)} \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} - \operatorname{div} \mathbf{S}^{(i)} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) -$$

$$- (\operatorname{div} \mathbf{M}^{(i)} + 2 \operatorname{coax} \mathbf{S}^{(i)}) (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2), \tag{10}$$

где $\mathbf{V}_1=\mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{v}_1$, $\mathbf{V}_2=\mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{v}_2$ — тензоры скоростей деформаций модельных фаз (симметричные части тензоров скоростей дисторсий $\nabla\mathbf{v}_1$, $\nabla\mathbf{v}_2$); $\mathbf{v}_{\text{отн}}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1\equiv\dot{\mathbf{u}}_{\text{отн}}$; $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}=\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_1$ — скорости относительного смещения и вращения фаз (второй фазы относительно первой), причем ∇ и div — операторы градиента и дивергенции по пространственной эйлеровой переменной в области Ω. Здесь также использовано обозначение $\mathrm{coax}\,\mathbf{N}:=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{N}$, для которого, в частности, справедливо тождество $\mathrm{coax}\,\nabla\mathbf{v}_2\equiv\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_2$.

В силу независимости величины мощности работы внутренних сил (10) от выбора системы отсчета (т. е. от выбора точки зрения эйлерова наблюдателя):

$$W_{(i)*}\equiv W_{(i)}$$

($W_{(i)*}$ — значение величины (10) в новой системе отсчета) для последних двух слагаемых выражения (10) получим

$$\mathrm{div}\,\mathbf{S}^{(i)}=0,\quad \mathrm{div}\,\mathbf{M}^{(i)}+2\,\mathrm{coax}\,\mathbf{S}^{(i)}=0 \tag{11}$$

всюду в области Ω в каждый момент времени.

Равенства (11) приводят к существенному упрощению уравнений движения (5)—(8), принимающих теперь с учетом (2) окончательный вид

$$\begin{gathered}\mathrm{div}\,\mathbf{S}_1+\rho_1\mathbf{f}_1+\mathbf{f}^{(i)}=\rho_1\dot{\mathbf{v}}_1,\quad \mathrm{div}\,\mathbf{M}_1+2\,\mathrm{coax}\,\mathbf{S}_1+\rho_1\mathbf{g}_1+\mathbf{g}^{(i)}=0,\\ \mathrm{div}\,\mathbf{S}_2+\rho_2\mathbf{f}_2-\mathbf{f}^{(i)}=\rho_2\dot{\mathbf{v}}_2,\quad \mathrm{div}\,\mathbf{M}_2+2\,\mathrm{coax}\,\mathbf{S}_2+\rho_2\mathbf{g}_2-\mathbf{g}^{(i)}=\rho_2(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}_2)^{\cdot};\end{gathered} \tag{12}$$

само выражение (10) также упрощается и окончательно записывается в виде

$$\begin{gathered}W_{(i)}\equiv\mathbf{S}_1:\mathbf{V}_1+\mathbf{M}_1:\nabla\boldsymbol{\omega}_1+\mathbf{S}_2:\mathbf{V}_2+2\,\mathrm{coax}\,\mathbf{S}_2\,(\mathrm{coax}\,\nabla\mathbf{v}_2-\boldsymbol{\omega}_2)+\\ +\mathbf{M}_2:\nabla\boldsymbol{\omega}_2+\mathbf{f}^{(i)}\mathbf{v}_{\text{отн}}+\mathbf{g}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}.\end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, для введенной гетерогенной двухфазной среды — модели исходного конгломерата — показано, что ее механическое движение в рамках применимости тождеств (2) полностью описывается уравнениями неразрывности (4) и уравнениями движения (12), а также характеризуется общим видом (13) удельной мощности внутренних сил. Тем самым ни движение конгломерата (гетерогенной среды), ни его внутреннее состояние никак не зависят от полей тензоров $\mathbf{S}^{(i)}$, $\mathbf{M}^{(i)}$, определяющих контактное интерактивное взаимодействие фаз. Поскольку эти поля удовлетворяют однородной системе уравнений (11) всюду в области Ω, занятой конгломератом, а на границе Γ для каждой из фаз заданы поверхностные усилия, предусматривающие, как подчеркнуто в [9], реакцию фаз лишь через их внутренние напряжения (т. е. интерактивные усилия на границе равны нулю), то можно без всякого ущерба для описания движения и внутреннего состояния гетерогенной среды считать поля $\mathbf{S}^{(i)}$, $\mathbf{M}^{(i)}$ тождественно равными нулю в Ω (в том числе в формулах (2), (3)). Это показывает, что сделанное в п. 1 из соображений общности предположение о наличии контактных интерактивных взаимодействий является по существу излишним и взаимодействие фаз описывается лишь массовыми (объемными) интерактивными силами и моментами.

Согласно (13) для описания состояния гетерогенной среды [1—3, 5, 10] в качестве независимых внутренних параметров (параметров процесса или, иначе, обобщенных скоростей перемещений) могут быть взяты величины $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\nabla\boldsymbol{\omega}_1$, $\nabla\boldsymbol{\omega}_2$, $\operatorname{coax}\nabla\mathbf{v}_2-\boldsymbol{\omega}_2$, $\mathbf{v}_{\text{отн}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$ — соответственно два симметричных, два несимметричных тензора второго ранга и три вектора (вся группа задается 39 компонентами в любом фиксированном базисе), а в качестве «энергетически» отвечающих им зависимых параметров (параметров реакции, или обобщенных сил) — величины $\operatorname{sym}\mathbf{S}_1$, $\operatorname{sym}\mathbf{S}_2$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $2\operatorname{coax}\mathbf{S}_2$, $\mathbf{f}^{(i)}$, $\mathbf{g}^{(i)}$ той же алгебраической структуры (также задаваемые 39 компонентами). Свойственная конкретной гетерогенной среде зависимость параметров реакции от параметров процесса, имеющая место для произвольных ее движений, составляет систему определяющих соотношений этой среды. Очевидно, что определяющие соотношения (наряду с кинематическими формулами) позволяют выразить все входящие в (12) параметры реакции через исходные характеристики движения (поля $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\boldsymbol{\omega}_2$), которые можно считать неизвестными (искомыми) функциями системы уравнений (12).

Заметим, что определяющими соотношениями рассматриваемой модели гетерогенной среды никак не задается антисимметричная часть тензора напряжений $\mathbf{S}_1$ первой модельной фазы. Выражающий ее вектор $\operatorname{coax}\mathbf{S}_1$ наряду с указанными исходными характеристиками движения может быть определен только из уравнений движения (12) (при выполнении, конечно, уравнений (4) и соответствующих начальных и граничных условий задачи).

Таким образом, при заданных определяющих соотношениях систему двух скалярных уравнений (4) и четырех векторных уравнений (12) (выражаемую 14 соотношениями для компонент) можно рассматривать как систему для двух скалярных функций ρ_1, ρ_2 и четырех векторных функций $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\operatorname{coax}\mathbf{S}_1$ (выражаемых в совокупности 14 компонентами).

В частных и специальных случаях количество неизвестных функций и уравнений системы может быть уменьшено.

4. Частные и специальные случаи. Простейший частный случай — конгломерат состоит лишь из одной фазы. Наличие лишь первой фазы сводит систему уравнений к системе одного скалярного $(4)_1$ и двух векторных $(12)_{1,2}$ уравнений (с $\mathbf{f}^{(i)}\equiv 0$, $\mathbf{g}^{(i)}\equiv 0$) для одной скалярной ρ_1 и двух векторных $\mathbf{v}_1$, $\operatorname{coax}\mathbf{S}_1$ функций. При $\mathbf{M}_1\equiv 0$ это есть система уравнений классической сплошной среды (при наличии массовых моментов). Аналогично модель конгломерата, содержащего лишь вторую фазу, описывается одним скалярным $(4)_2$ и двумя векторными $(12)_{3,4}$ уравнениями ($\mathbf{f}^{(i)}\equiv 0$, $\mathbf{g}^{(i)}\equiv 0$) для функций ρ_2, $\mathbf{v}_2$, $\boldsymbol{\omega}_2$, т. е. системой уравнений континуума Коссера [11, 12].

Среди специальных особый интерес представляют случаи наличия внутренних кинематических связей. Так, если в гетерогенной среде рассматриваемого типа наложено ограничение $\mathbf{u}_{\text{отн}}\equiv 0$ (и как следствие $\mathbf{v}_1\equiv\mathbf{v}_2=:\mathbf{v}$), то поле объемных сил интерактивного взаимодействия $\mathbf{f}^{(i)}$ не выражается определяющими соотношениями и потому само входит в число первичных неизвестных (вместо, например, $\mathbf{v}_2$): система (4), (12) становится системой для ρ_1, ρ_2, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\operatorname{coax}\mathbf{S}_1$, $\mathbf{f}^{(i)}$. При этом, если величина $\mathbf{f}^{(i)}$ нас не интересует, то, сложив первое и третье уравнения (12), с учетом (2), (3) получаем их следствие

$$\operatorname{div}\mathbf{S}+\rho\mathbf{f}=\rho\dot{\mathbf{v}}, \tag{14}$$

которое вместе с уравнениями (4) и $(12)_{2,4}$ составляет систему для

ρ_1, ρ_2, $\mathbf{v}$, ω_2, $\mathrm{coax}\,\mathbf{S}_1$; наряду с $(3)_{1,3}$ (где $\mathbf{S}^{(i)}\equiv 0$, см. выше) выполнены, конечно, равенства $\rho_1=m_1\rho$, $\rho_2=m_2\rho$.

Пусть для рассматриваемой среды $\omega_2\equiv\mathrm{coax}\,\nabla\mathbf{v}_2$. Тогда вектор $\mathrm{coax}\,\mathbf{S}_2$ не выражается определяющими соотношениями и потому сам входит в число исходных неизвестных (вместо ω_2). Заметим, что при отсутствии первой фазы получаем в этом случае уравнения псевдоконтинуума Коссера [12]. При другой кинематической связи: $\omega_2\equiv\omega_1$ — вектор $\mathbf{g}^{(i)}$ переходит в число неизвестных (вместо ω_2). В обоих этих случаях, складывая уравнения $(12)_2$ и $(12)_4$, получаем их следствие (с использованием (2) и $(3)_{2,4}$, где учтены равенства $\mathbf{S}^{(i)}\equiv 0$, $\mathbf{M}^{(i)}\equiv 0$)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{M}+2\,\mathrm{coax}\,\mathbf{S}+\rho\mathbf{g}=\rho_2\,(\mathbf{j}\omega_2)^{\cdot} \tag{15}$$

(здесь вместо ω_2 подставлено его известное из уравнения кинематической связи выражение), которое вместе с остальной частью системы служит для нахождения величин ρ_1, ρ_2, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathrm{coax}\,\mathbf{S}$.

В случае двух внутренних кинематических связей вида $\mathbf{u}_{\text{отн}}\equiv 0$ и $\omega_2\equiv\mathrm{coax}\,\nabla\mathbf{v}_2$ (или $\omega_2\equiv\omega_1$) сложение уравнений $(12)_1$ и $(12)_3$, а также $(12)_2$ и $(12)_4$ дает вместо (12) систему двух уравнений вида (14), (15), которые вместе с (4) служат для нахождения ρ_1, ρ_2, $\mathbf{v}$, $\mathrm{coax}\,\mathbf{S}$.

Не менее интересен другого типа специальный случай — гетерогенная среда, не сопротивляющаяся моментным напряжениям ($\mathbf{M}_1\equiv\mathbf{M}_2\equiv\equiv 0$), в которой отсутствуют присоединенные вращающиеся элементы ($\mathbf{j}\equiv 0$) и интерактивные объемные моменты ($\mathbf{g}^{(i)}\equiv 0$), а также внешние массовые моменты ($\mathbf{g}_1\equiv\mathbf{g}_2\equiv 0$). В этом случае второе и четвертое уравнения (12) выражают в точности свойство симметричности эффективных напряжений $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ модельных фаз, и система сводится по существу к уравнениям (4) и $(12)_{1,3}$ для ρ_1, ρ_2, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, совпадающим с соответствующими уравнениями модели Грина—Нахди [9], а при специальном виде интерактивной объемной силы — с уравнениями модели двухфазной среды Био [13, 14].

В заключение отметим, что введенная в настоящей работе модель гетерогенной среды ранее, по-видимому, не рассматривалась. Использованный здесь подход механического моделирования, родственный предпринятому в [15], представляется продуктивным. Модель может быть обобщена на случаи большего числа фаз, наличия фазовых переходов, источников и стоков масс отдельных фаз, влияния термических параметров, а также, конечно, на случай существенно различных конфигураций интерактивно взаимодействующих частей конгломерата.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 95—01—01551а.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Ильюшину за внимание к работе, полезное обсуждение и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., 1990.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М., 1973.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., 1975.
4. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М., 1983.
5. Ильюшин А. А. Пластичность. М., 1963.
6. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., 1970.
7. Лихачев В. А., Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория прочности. Спб., 1993.
8. Green A. E., Naghdi P. M. A thermomechanical theory of a Cosserat point with application to composite materials//Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1991. 44, N 3. 335—355.

9. Green A. E., Naghdi P. M. A dynamical theory of interacting continua//Int. J. Eng. Sci. 1965. 3, N 2. 231—241.
10. Ильюшин А. А. Функционалы и меры необратимости на множествах процессов в механике сплошной среды (МСС)//Докл. РАН. Механика. 1994. 337, № 1. 48—50.
11. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris, 1909.
12. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.
13. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid//J. Acoust. Soc. Amer. 1956. 28. 168—178.
14. Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media// //J. Appl. Phys. 1962. 33, N 4. 1482—1498.
15. Бровко Г. Л., Ильюшин А. А. Об одной плоской модели перфорированных плит//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 2. 83—91.

Поступила в редакцию
09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.3

И. А. Кийко, А. Д. Чарухчев

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ СТЕРЖНЯ КОЛЬЦЕВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ИЗГИБАЕМОГО В ОБЛАСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В публикациях [1, 2] представлено решение задачи об оптимальной форме стержня прямоугольного поперечного сечения; показано, что при упругопластическом изгибе (так же, как и при упругом) условие минимума энергии деформации (как критерий оптимальности) при сохранении объема материала стержня приводит к условию равнодеформируемости. В работе [3] та же задача решена для случая переменного нагружения.

1. Рассмотрим стержень кольцевого поперечного сечения; внутренний радиус r считаем постоянным, внешний $R_1=R_1(x)$ — переменным (координата x направлена по оси стержня). Стержень свободно оперт по торцам и изгибается поперечной нагрузкой $q(x)$, которой соответствует эпюра изгибающих моментов $m_0M(x)$; m_0 — монотонно возрастающий параметр нагрузки. Ставится задача определения $R_1(x)$ из условий равнодеформируемости и постоянства объема; материал стержня полагаем идеальным упругопластическим.

В дальнейшем изложении различаем два случая: а) $y_s>r$ — изгиб при малых деформациях; б) $y_s<r$ — изгиб при развитых упругопластических деформациях; y_s — граница упругопластической области.

Рассмотрим задачу в варианте $y_s>r$. Уравнение равновесия запишется в виде

$$mM(x)=R^3(x)\varphi(u)-\pi\varkappa/4\varepsilon_s, \tag{1.1}$$

$$\varphi(u)=\frac{(1-u^2)^{1/2}}{2}+\frac{\arcsin u}{2u}+\frac{(1-u^2)^{3/2}}{3};$$

здесь обозначено $u=\varepsilon_s/\varkappa R$, $\varkappa=\varkappa_1 r$, $R=R_1/r$, $m=m_0/\sigma_s r^3$, $\varkappa_1$ — кривизна изогнутой оси стержня, ε_s — предел упругих деформаций, σ_s — предел текучести.

Условие сохранения объема примет форму

$$\int_0^1 (R^2(x)-1)\,dx=V_0/\pi r^2 l\equiv V, \tag{1.2}$$

где V_0 — заданный объем, l — длина стержня.