Н. П. Бондаренко, Обратная задача спектрального анализа для матричного уравнения Штурма–Лиувилля, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2010, том 10, выпуск 4, 3–13

DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-4-3-13

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Н.П. Бондаренко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: BondarenkoNP@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для матричного уравнения Штурма – Лиувилля на конечном интервале. Приведены свойства спектральных характеристик, получена конструктивная процедура решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: матричные операторы Штурма – Лиувилля, обратные спектральные задачи, метод спектральных отображений.

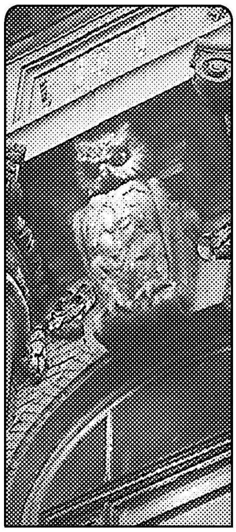
The Inverse Problem of Spectral Analysis for the Matrix Sturm – Liouville Equation

N.P. Bondarenko

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Calculus Mathematics
E-mail: BondarenkoNP@info.sgu.ru

The inverse spectral problem is investigated for the matrix Sturm - Liouville equation on a finite interval. The article provides properties of spectral characteristics, a constructive procedure for the solution of the inverse problem along with necessary and sufficient conditions for its solvability has been obtained.

Key words: matrix Sturm – Liouville operators, inverse spectral problems, method of spectral mappings.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется обратная спектральная задача для матричного уравнения Штурма – Лиувилля. Обратные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Скалярный случай достаточно хорошо изучен, основные результаты представлены в работе [1].

Матричный случай, представляющий собой обобщение скалярного, является существенно более трудным для исследования. В работах [2–4] представлены различные постановки обратных спектральных задач в матричном случае и доказаны соответствующие теоремы единственности. В статье [5] приведена конструктивная процедура восстановления, но только для частного случая простого спектра. В работе [6] были получены необходимые и достаточные условия для случая с существенным ограничением, заключающимся в асимптотической простоте спектра. Кроме того, метод, использованный в [6], не дает конструктивной процедуры решения.

В данной работе изучается самосопряженный матричный оператор Штурма – Лиувилля в общем случае, без априорных ограничений на спектр. Исследуются свойства характеристик, получены необходимые и достаточные условия разрешимости спектральных обратной задачи. Приведена конструктивная процедура решения, представляющая собой модификацию алгоритма, описанного в [5].

Основным методом исследования является развитие идей метода спектральных отображений [1].

Рассмотрим краевую задачу $L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма – Лиувилля:

$$lY := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \qquad x \in (0, \pi), \tag{1}$$
$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \qquad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр и $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0,\pi)$ — комплекснозначные функции. Матрицу $Q(x)$ в дальнейшем будем называть *потенциалом*. Краевые условия задаются матрицами $h = [h_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, $H = [H_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где h_{jk} и H_{jk} — комплексные числа. В данной работе будем рассматривать самосопряженный случай, когда $Q = Q^*$, $h = h^*$, $H = H^*$.

Пусть $\varphi(x,\lambda) = [\varphi_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ является решением уравнения (1) при начальных условиях $\varphi(0,\lambda) = I_m$, $\varphi'(0,\lambda) = h$, где I_m — единичная $m \times m$ матрица. Функция $\Delta(\lambda) := \det[V(\varphi)]$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет не более чем счетное множество нулей. Нули характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи L с учетом кратностей и являются вещественными.

Пусть $\omega = \omega^*$ — некоторая матрица размера $m \times m$. Будем говорить, что задача $L(Q(x), h, H)$ принадлежит классу $A(\omega)$, если она имеет потенциал из $L_2(0,\pi)$ и $h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi Q(x)\,dx = \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $L \in A(\omega)$, $\omega \in D = \{\omega : \omega = \mathrm{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_m\}, \omega_1 \le \dots \le \omega_m\}$. Выполнения этого условия можно добиться применением к задаче L унитарного преобразования.

Для формулировки основной теоремы нам потребуются следующие две леммы, которые будут доказаны в разд. 1.

Лемма 1. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in D$. Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}}$. При этом*

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \qquad \{\varkappa_{nq}\}_{n\ge 0} \in l_2, \qquad q = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Пусть $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — решение уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$ (0_m — нулевая $m \times m$ матрица). Положим $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. Матрица $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ называется *матрицей Вейля* задачи L. Матрица-функция $M(\lambda)$ мероморфна по λ и имеет простые полюса в точках $\{\lambda_{nq}\}$ (см. разд. 1).

Положим $\alpha_{nq} := \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda)$. Величины $\Lambda := \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\ge 0,\, q=\overline{1,m}}$ будем называть *спектральными данными* задачи L.

Пусть $\{\lambda_{n_k q_k}\}_{k\ge 0}$ — все различные собственные значения из набора $\{\lambda_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}}$. Обозначим $\alpha'_{n_k q_k} := \alpha_{n_k q_k}$, $k \ge 0$, $\alpha'_{nq} = 0_m$, $(n,q) \notin \{(n_k, q_k)\}_{k\ge 0}$, $1 = m_1 < \ldots < m_{p+1} = m+1$, $\omega_{m_s} = \ldots = \omega_{m_{s+1}-1} =: \omega^{(s)}$, $s = \overline{1,p}$ (p — количество различных чисел среди $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$). Пусть $\alpha_n^{(s)} = \sum\limits_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \alpha'_{nq}$, $s = \overline{1,p}$.

Лемма 2. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in D$. Тогда справедливо соотношение*

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \frac{\varkappa_n^{(s)}}{n}, \qquad \{\varkappa_n^{(s)}\}_{n\ge 0} \in l_2, \qquad s = \overline{1,p}, \tag{3}$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=\overline{1,m}}, \qquad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & m_s \le j = k \le m_{s+1} - 1, \\ 0, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. *По заданным спектральным данным Λ построить Q, h и H.*

Будем говорить, что величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, если $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ всегда соответствуют $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\omega \in D$. Для того чтобы величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$ были спектральными данными краевой задачи $L \in A(\omega)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) верны асимптотические формулы (2) *и* (3)*;*

2) все λ_{nq} вещественные, $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \ge 0$ при всех $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$ и ранги матриц α_{nq} равны кратностям λ_{nq};

3) для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, который является целой функцией и имеет асимптотику $\gamma(\lambda) = O(\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|\pi))$ при $|\lambda| \to \infty$, из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ при всех $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$ следует, что $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Необходимость условий теоремы 1 будет доказана в разд. 1, достаточность — в разд. 3. В разд. 2 приведена конструктивная процедура решения обратной задачи 1.

1. НЕОБХОДИМОСТЬ

Используя определение $M(\lambda)$, нетрудно показать, что

$$M(\lambda) = -(V(\varphi))^{-1} V(S), \tag{4}$$

где $S(x,\lambda)$ — матричное решение уравнения (1) при начальных условиях $S(0,\lambda) = 0_m$, $S'(0,\lambda) = I_m$.

Лемма 3. *Все полюса матрицы Вейля $M(\lambda)$ простые и ранги вычетов совпадают с кратностями соответствующих собственных значений задачи L.*

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение задачи L кратности k, Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_k — линейно независимые собственные вектор-функции, соответствующие λ_0. Нетрудно видеть, что $Y_q(x) = \varphi(x,\lambda_0) C_q$, $q = \overline{1,k}$, где векторы C_q линейно независимы. Выберем векторы $C_{k+1}, \ldots, C_m$ так, чтобы матрица $C = [C_1, \ldots, C_m]$ была невырожденной, и рассмотрим функцию $Y(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) C$. Очевидно, что $(V(\varphi))^{-1} = C(V(Y))^{-1}$. Представим $V(Y(x,\lambda))$ в виде

$$V(Y(x,\lambda)) = [(\lambda-\lambda_0)W_1(\lambda), \ldots, (\lambda-\lambda_0)W_k(\lambda), W_{k+1}(\lambda), \ldots, W_m(\lambda)],$$

где $W_q(\lambda) = \frac{V(Y_q(x,\lambda))}{\lambda-\lambda_0}$, $q = \overline{1,k}$, $W_q(\lambda) = V(Y_q(\lambda))$, $q = \overline{k+1,m}$.

Ясно, что $W_q(\lambda)$ — целые функции и $\det W(\lambda) = \det[W_1(\lambda), \ldots, W_m(\lambda)] \ne 0$ при λ из достаточно малой окрестности λ_0 (поскольку иначе кратность собственного значения λ_0 была бы больше k). Нетрудно видеть, что

$$\det V(Y(x,\lambda)) = (\lambda-\lambda_0)^k \det W(\lambda),$$
$$(V(Y(x,\lambda)))^{-1} = \left[\frac{X_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, \ldots, \frac{X_k(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, X_{k+1}(\lambda), \ldots, X_m(\lambda)\right]^t,$$

где $X_q(\lambda)$ аналитичны в некоторой окрестности λ_0 (t обозначает транспонирование). Используя (4), получаем

$$\alpha_0 = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} M(\lambda) = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} (V(\varphi(x,\lambda)))^{-1} V(S(x,\lambda)) =$$
$$= -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} C \left[\frac{X_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, \ldots, \frac{X_k(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, X_{k+1}(\lambda), \ldots, X_m(\lambda)\right]^t V(S(x,\lambda)) =$$
$$= -C\,[X_1(\lambda_0), \ldots, X_k(\lambda_0), 0, \ldots, 0]^t\, V(S(x,\lambda_0)) = -XV(S(x,\lambda_0)).$$

Отсюда видно, что полюса матрицы Вейля простые и $\mathrm{rank}\,\alpha_0 \le k$. Докажем противоположное неравенство. Заметим, что

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} (V(\varphi(x,\lambda)))^{-1} V(\varphi(x,\lambda)) = 0_m = XV(\varphi(x,\lambda_0)).$$

Пусть $\psi(x,\lambda_0)$ — решение уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$, удовлетворяющее условию $V(\psi) = X^*$. Разложим $\psi(x,\lambda_0)$ по фундаментальной системе решений уравнения (1):

$$\psi(x,\lambda_0) = \varphi(x,\lambda_0)A + S(x,\lambda_0)B,$$
$$XX^* = XV(\psi(x,\lambda_0)) = XV(\varphi(x,\lambda_0))A + XV(S(x,\lambda_0))B = -\alpha_0 B.$$

С одной стороны, векторы $X_q(\lambda_0)$ линейно независимы (это следует из $\det W \neq 0$), и поэтому $\operatorname{rank} XX^* = k$. С другой стороны, $\operatorname{rank} \alpha_0 B \le \operatorname{rank} \alpha_0$. Получаем $\operatorname{rank} \alpha_0 \ge k$, завершая тем самым доказательство леммы. □

Лемма 4. *Пусть λ_0, λ_1 — собственные значения задачи L, $\lambda_0 \neq \lambda_1$, и $\alpha_i = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i} M(\lambda)$, $i = 0, 1$. Тогда справедливы соотношения*

$$\alpha_0^* \int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx\,\alpha_0 = \alpha_0^*, \qquad \alpha_0^* \int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_1)\,dx\,\alpha_1 = 0_m.$$

Из первого соотношения, в частности, следует, что $\alpha_0 = \alpha_0^* \ge 0$.

Доказательство. Введем обозначения: $l^*Z := -Z'' + ZQ(x)$, $V^*(Z) := Z'(\pi) + Z(\pi)H$, $\langle Z, Y\rangle := Z'Y - ZY'$, где $Z = [Z_k]^t_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-строка. Тогда $\langle Z, Y\rangle_{x=\pi} = V^*(Z)Y(\pi) - Z(\pi)V(Y)$. Кроме того, если $Y(x,\lambda)$ и $Z(x,\mu)$ удовлетворяют уравнениям $lY(x,\lambda) = \lambda Y(x,\lambda)$ и $l^*Z(x,\mu) = \mu Z(x,\mu)$ соответственно, то $\frac{d}{dx}\langle Z, Y\rangle = (\lambda - \mu)ZY$. В частности, если $\lambda = \mu$, то $\langle Z, Y\rangle$ не зависит от x.

Так как λ_0 — вещественное число, $\varphi^*(x,\lambda_0)$ удовлетворяет уравнению $l^*Z = \lambda_0 Z$. Следовательно,

$$\int_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\langle \varphi^*(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda)\rangle|_0^\pi}{\lambda - \lambda_0} =$$
$$= \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{V^*(\varphi^*(x,\lambda_0))\varphi(x,\lambda) - \varphi^*(x,\lambda_0)V(\varphi(x,\lambda))}{\lambda-\lambda_0}.$$

Из (4) и леммы 3 вытекает

$$V(\varphi(x,\lambda_0))\alpha_0 = -\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)V(\varphi(x,\lambda))(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda)) = 0_m.$$

Аналогично $\alpha_0^* V^*(\varphi^*(x,\lambda_0)) = 0_m$. Следовательно, вычисляем

$$\alpha_0^* \int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx\,\alpha_0 = \alpha_0^*\varphi^*(\pi,\lambda_0) \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{V(\varphi(x,\lambda))}{\lambda-\lambda_0} \lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda)) =$$
$$= \alpha_0^*\varphi^*(\pi,\lambda_0)V(S(x,\lambda_0)) = -\alpha_0^*\langle\varphi^*(x,\lambda_0), S(x,\lambda_0)\rangle_{x=\pi} = -\alpha_0^*\langle\varphi^*(x,\lambda_0), S(x,\lambda_0)\rangle_{x=0} = \alpha_0^*.$$

Второе соотношение получаем аналогично. □

Доказательство леммы 1. Так же как и в скалярном случае (см. [1, с. 13]) можно получить асимптотику $\rho_{nq} = n + O(n^{-1})$, $n \to \infty$. Перейдем к уточнению этой оценки.

Обозначим $\rho := \sqrt{\lambda}$, $\operatorname{Re}\rho \ge 0$, $\tau := \operatorname{Im}\rho$. Нетрудно показать, что $V(\varphi) = -\rho\sin\rho\pi\cdot I_m + \omega\cos\rho\pi + \varkappa(\rho)$, где $\varkappa(\rho) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi Q(t)\cos\rho(\pi-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{\rho}\exp(|\tau|\pi)\right)$.

Введем линейные отображения $z_n(\rho)$, переводящие круги $\{\rho : |\rho - n| \le C/n\}$, в которых при фиксированном достаточно большом C лежат ρ_{nq}, в круг $\{z : |z| \le R\}$: $\rho = n + \frac{z_n(\rho)}{\pi n}$.

При $|z| \le R$ имеем

$$V(\varphi) = (-1)^n(\omega - z_n(\rho)I_m + \varkappa_n(z_n(\rho))). \tag{5}$$

Используя представление для $\varkappa(\rho)$, получаем, что $\varkappa_n(z) = o(1)$, $n\to\infty$, причем сходимость равномерная по z в круге $\{z : |z| \le R\}$. Кроме того, для любой последовательности $\{z_n^0\}_{n\ge0} \subset \{z : |z| \le R\}$ $\{\varkappa_n(z_n^0)\}_{n\ge0} \in l_2$, причем $\sum\limits_{n\ge0}|\varkappa_n(z_n^0)|^2 < L$, L — некоторая константа. Следовательно,

$$\Delta(\rho^2) = \pm f(z_n(\rho)) + g_n(z_n(\rho)),$$

где $f(z) = \det(\omega - zI_m)$, $g_n(z) = o(1)$, $n\to\infty$ (сходимость равномерная при $|z| \le R$), выбор знака $\pm$ зависит только от n. Фиксируем $0 < \delta < 1/2 \min\limits_{q,l:\omega_q\neq\omega_l}|\omega_q - \omega_l|$ и введем в рассмотрение контуры $\gamma_q = \{z : |z - \omega_q| = \delta\}$. Очевидно, что при достаточно больших n верно неравенство $|f(z)| > |g_n(z)|$

на γ_q, и по теореме Руше аналитические функции $\Delta(\rho_n^2(z))$ и $f(z)$ имеют одинаковое количество нулей внутри γ_q (ρ_n — обратное отображение к z_n). Таким образом, имеем:

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \qquad \varkappa_{nq} = o(1), \qquad n \to \infty, \qquad q = \overline{1, m}.$$

Подставим полученную формулу в (5):

$$V(\varphi) = (-1)^n (\omega - \omega_q I_m - \pi \varkappa_{nq} I_m + \varkappa_n(z_n(\rho_{nq}))).$$

Так как $\{\varkappa_n(z_n(\rho_{nq}))\} \in l_2$, отсюда нетрудно получить, что $\{\varkappa_{nq}\} \in l_2$. $\Box$

Доказательство леммы 2. 1. Пусть $\tilde{M}(\lambda)$ — матрица Вейля задачи $\tilde{L}(\tilde{Q}, \tilde{h}, \tilde{H})$, такой что $\tilde{Q}(x) = \frac{2}{\pi}\omega$, $\tilde{h} = \tilde{H} = 0$. Тогда $\tilde{\alpha}^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)}$, $s = \overline{1, p}$.

Введем контуры $\gamma_n^{(s)} = \{\lambda : |\lambda - (n^2 + \frac{2}{\pi}\omega^{(s)})| = R\}$, $R = \frac{1}{\pi} \min\limits_{q, l : \omega_q \ne \omega_l} |\omega_q - \omega_l|$ Учитывая формулу (2), по основной теореме о вычетах получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n^{(s)}} (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\, d\lambda = \sum_{q = m_s}^{m_{s+1} - 1} \alpha'_{nq} - \sum_{q = m_s}^{m_{s+1} - 1} \tilde{\alpha}'_{nq} = \alpha_n^{(s)} - \frac{2}{\pi} I^{(s)}, \qquad n \ge n^*, \qquad s = \overline{1, p}.$$

Нетрудно показать, что $M_{jk}(\lambda) = -\dfrac{\Delta_{jk}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, где

$$\Delta_{jk}(\lambda) = \det[V(\varphi_1), \dots, V(\varphi_{j-1}), V(S_k), V(\varphi_{j+1}), \dots, V(\varphi_m)].$$

Используя это представление, находим:

$$M_{jk}(\lambda) - \tilde{M}_{jk}(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)\tilde{\Delta}_{jk}(\lambda) - \Delta_{jk}(\lambda)\tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta(\lambda)\tilde{\Delta}(\lambda)}, \qquad j, k = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Воспользуемся отображениями z_n, введенными при доказательстве леммы 1: $\rho = n + \frac{z_n(\rho)}{\pi n}$. Если $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, то $0 < \delta_1 \le |z_n(\rho) - \omega_q|$ для всех $q = \overline{1, m}$ и $|z_n(\rho) - \omega^{(s)}| \le \delta_2$. Следовательно, верна оценка для $\Delta(\lambda)$, полученная при доказательстве леммы 1 (предел равномерный по λ): $\Delta(\lambda) = \pm f(z_n(\rho)) + o(1)$, $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, $n \to \infty$.

Аналогично можно оценить

$$\Delta_{jk}(\lambda) = \pm \frac{f(z_n(\rho))}{z_n(\rho) - \omega_j} + o(1) \qquad \text{при } j = k, \qquad \Delta_{jk}(\lambda) = o(1) \qquad \text{при } j \ne k,$$
$$\lambda \in \gamma_n^{(s)}, \qquad n \to \infty, \qquad j, k = \overline{1, m}.$$

Сходимость остаточных членов равномерна по λ, выбор знака $\pm$ зависит только от n. Аналогичные соотношения верны для $\tilde{\Delta}(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}_{jk}(\lambda)$.

Подставляя полученные оценки в (6) и учитывая, что $C_1 \le |f(z_n(\rho))| \le C_2$ при $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, в итоге получаем:

$$M_{jk}(\lambda) - \tilde{M}_{jk}(\lambda) = o(1), \qquad j, k = \overline{1, m}, \qquad \lambda \in \gamma_n^{(s)},$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n^{(s)}} (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\, d\lambda = o(1), \qquad \alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \eta_n^{(s)}, \qquad \eta_n^{(s)} = o(1), \qquad n \to \infty.$$

2. Далее через $\{\varkappa_n\}$ будем обозначать различные последовательности из l_2. Используя асимптотику

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x \cdot I_m + Q_1(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int\limits_0^x \frac{\sin \rho (x - 2t)}{2\rho} Q(t)\, dt + O\left(\frac{\exp |\tau| x}{\rho}\right), \quad |\rho| \to \infty, \quad x \in [0, \pi],$$

где $Q_1(x) = h + \int\limits_0^x Q(t)\,dt$, нетрудно показать, что

$$\int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_{nq})\varphi(x,\lambda_{nl})\,dx = \frac{\pi}{2}I_m + \frac{\varkappa_n}{n}, \qquad \lambda_{nq} - \lambda_{nl} = \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Применяя лемму 4, получаем:

$$\alpha_{nq}\left(\frac{\pi}{2}I_m + \frac{\varkappa_n}{n}\right)\alpha_{nq} = \alpha_{nq}, \qquad n \ge 0, \qquad q = \overline{1,m}.$$

Ясно, что $\|\alpha_{nq}\| \le C$, $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$ (здесь и далее $\|a\| = \max_{j,k}|a_{jk}|$). Следовательно, $\frac{\pi}{2}\alpha_{nq}^2 = \alpha_{nq} + \frac{\varkappa_n}{n}$. Аналогично выводим $\alpha_{nq}\alpha_{nl} = \frac{\varkappa_n}{n}$, $m_s \le q,l \le m_{s+1}-1$, $q \ne l$, $s = \overline{1,p}$. Таким образом,

$$\frac{\pi}{2}(\alpha_n^{(s)})^2 = \frac{\pi}{2}\left(\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{nq}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}(\alpha'_{nq})^2 + \frac{\varkappa_n}{n} = \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{nq} + \frac{\varkappa_n}{n} = \alpha_n^{(s)} + \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Подставим в полученное равенство результат пункта 1:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}I^{(s)} + \eta_n^{(s)}\right)^2 = \frac{2}{\pi}I^{(s)} + \eta_n^{(s)} + \frac{\varkappa_n}{n}, \qquad (I_m - 2I^{(s)})\eta_n^{(s)} = \frac{\pi}{2}(\eta_n^{(s)})^2 + \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Отсюда вытекает $\eta_n^{(s)} = \frac{\varkappa_n}{n}$, и доказательство леммы завершено. □

Доказательство теоремы 1 (необходимость). Выполнение первых двух условий доказано в леммах 1–4.

Пусть $\gamma(\lambda)$ — функция, описанная в условии 3. Вспомним, что $V(\varphi(x,\lambda_{nq}))\alpha_{nq} = 0_m$. Так как $\operatorname{rank} V(\varphi(x,\lambda_{nq})) + \operatorname{rank}\alpha_{nq} = m$ и $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, то $\gamma(\lambda_{nq}) = C_{nq}V(\varphi(x,\lambda_{nq}))$, т. е. строка $\gamma(\lambda_{nq})$ является линейной комбинацией строк матрицы $V(\varphi(x,\lambda_{nq})$ (C_{nq} — строка коэффициентов). Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \gamma(\lambda)(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}$. $(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}$ имеет простые полюса в точках $\lambda = \lambda_{nq}$, поэтому вычисляем:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} f(\lambda) = \gamma(\lambda_{nq})\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}}(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1} = C_{nq}\lim_{\lambda\to\lambda_{nq}}V(\varphi(x,\lambda))\lim_{\lambda\to\lambda_{nq}}(\lambda-\lambda_{nq})(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1} = 0.$$

Следовательно, $f(\lambda)$ — целая функция. Можно показать, что

$$\|(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}\| \le C_\delta|\rho|^{-1}\exp(-|\tau|\pi), \qquad \rho \in G_\delta,$$

где $G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \ge \delta, k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$, $\delta > 0$. Отсюда заключаем, что $\|f(\lambda)\| \le \frac{C}{|\rho|}$ в G_δ. По принципу максимума модуля для аналитических функций полученная оценка верна во всей комплексной плоскости. По теореме Лиувилля, $f(\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $\gamma(\lambda) \equiv 0$. □

Заметим, что в скалярном случае выполнение условия 3 следует из первых двух условий теоремы 1 (см. [1, с. 72]). Однако в матричном случае это условие существенно и не может быть опущено, что показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $m = 2$, $\lambda_{01} \ne \lambda_{02}$, $\lambda_{n1} = \lambda_{n2} = n^2$, $n \ge 1$,

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_{n1} = \alpha_{n2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \end{bmatrix}, n \ge 1.$$

Приведенные величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ удовлетворяют условиям 1–2 теоремы 1. Покажем, что они не удовлетворяют условию 3 и, следовательно, не могут быть спектральными данными задачи L. Условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$ в данном случае можно переписать в виде $\gamma(\lambda) = [\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)]$, $\gamma_1(\lambda_{01}) = \gamma_1(\lambda_{02}) = \gamma_1(n^2) = 0$, $\gamma_2(n^2) = 0$, $n \ge 1$. Ясно, что если мы положим $\gamma_1(\lambda) = 0$, $\gamma_2(\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho}$, то получим противоречие с условием 3.

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

Предположим, что нам известны спектральные данные Λ задачи $L \in A(\omega)$.

Обозначим

$$D(x, \lambda, \mu) = \frac{\langle \varphi^*(x, \bar{\mu}), \varphi(x, \lambda) \rangle}{\lambda - \mu} = \int\limits_0^x \varphi^*(t, \bar{\mu}) \varphi(x, \lambda)\, dt. \tag{7}$$

Выберем модельную краевую задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H}) \in A(\omega)$ (например, можно взять $\tilde{Q}(x) = \frac{2}{\pi}\omega$, $\tilde{h} = 0_m$, $\tilde{H} = 0_m$). Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L, то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$. Положим

$$\xi_n = \sum_{q=1}^m |\rho_{nq} - \tilde{\rho}_{nq}| + \sum_{s=1}^p \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\rho_{nq} - \rho_{nm_s}| + \sum_{s=1}^p \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\tilde{\rho}_{nq} - \tilde{\rho}_{nm_s}| + \sum_{s=1}^p \|\alpha_n^{(s)} - \tilde{\alpha}_n^{(s)}\|.$$

Согласно леммам 1 и 2 $\Omega := \left(\sum\limits_{n=0}^\infty ((n+1)\xi_n)^2 \right)^{1/2} < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^\infty \xi_n < \infty$.

Обозначим $\lambda_{nq0} = \lambda_{nq}$, $\lambda_{nq1} = \tilde{\lambda}_{nq}$, $\rho_{nq0} = \rho_{nq}$, $\rho_{nq1} = \tilde{\rho}_{nq}$, $\alpha'_{nq0} = \alpha'_{nq}$, $\alpha'_{nq1} = \tilde{\alpha}'_{nq}$, $\varphi_{nqi}(x) = \varphi(x, \lambda_{nqi})$, $\tilde{\varphi}_{nqi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \lambda_{nqi})$, $F_{klj,nqi}(x) = \alpha'_{klj} D(x, \lambda_{nqi}, \lambda_{klj})$, $\tilde{F}_{klj,nqi}(x) = \alpha'_{klj} \tilde{D}(x, \lambda_{nqi}, \lambda_{klj})$, $n, k \ge 0$, $q, l = \overline{1, m}$, $i, j = 0, 1$.

Стандартным образом (см. [1, с. 62]), используя лемму Шварца, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 5. *При $x \in [0, \pi]$, $n, k \ge 0$, $r, s = \overline{1, m}$, $m_r < q < m_{r+1}$, $m_s < l < m_{s+1}$, $i, j = 0, 1$ имеют место оценки:*

$$\|\varphi_{nqi}(x)\| \le C, \qquad \|\varphi_{nm_r0}(x) - \varphi_{nm_r1}(x)\|, \|\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_ri}(x)\| \le C\xi_n,$$

$$\|F_{klj,nqi}(x)\| \le \frac{C}{|n-k|+1}, \qquad \left\| \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r1}(x)) \right\| \le \frac{C\xi_k}{|n-k|+1},$$

$$\|F_{klj,nqi}(x) - F_{klj,nm_ri}(x)\|, \|F_{klj,nm_r0}(x) - F_{klj,nm_r1}(x)\| \le \frac{C\xi_n}{|n-k|+1},$$

$$\left\| \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x) - F_{kl1,nqi}(x) + F_{kl1,nm_ri}(x)) \right\| \le \frac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1},$$

$$\left\| \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r0}(x) + F_{kl1,nm_r1}(x)) \right\| \le \frac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1}.$$

Аналогичные оценки верны также для $\tilde{\varphi}_{nqi}(x)$, $\tilde{F}_{klj,nqi}(x)$.

Лемма 6. *При $n \ge 0, q = \overline{1, m}$, $i = 0, 1$ справедливо соотношение*

$$\tilde{\varphi}_{nqi}(x) = \varphi_{nqi}(x) + \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=1}^m (\varphi_{kl0}(x) \tilde{F}_{kl0,nqi}(x) - \varphi_{kl1}(x) \tilde{F}_{kl1,nqi}(x)). \tag{8}$$

Доказательство леммы 6 см. в работе [5]. При любом фиксированном $x \in [0, \pi]$ соотношения (8) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\varphi_{nqi}(x)$, $n \ge 0$, $q = \overline{1, m}$, $i = 0, 1$. Но ряд в (8) сходится лишь «со скобками». Поэтому неудобно использовать (8) в качестве основного уравнения обратной задачи. Ниже мы преобразуем (8) к линейному уравнению в соответствующем банаховом пространстве последовательностей.

Введем обозначение $\chi_n := \xi_n^{-1}$ при $\xi_n \ne 0$ и $\chi_n = 0$ при $\xi_n = 0$. Пусть V — множество индексов $u = (n, q, i)$, $n \ge 0$, $q = \overline{1, m}$, $i = 0, 1$. При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ определим вектор-строку

$\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u\in V}$ и матрицу $R(x) = [R_{v,u}(x)]_{v,u\in V}$, $v = (k,l,j)$, $u = (n,q,i)$, по формулам

$$\psi_{nm_s0}(x) = \chi_n(\varphi_{nm_s0}(x) - \varphi_{nm_s1}(x)), \qquad \psi_{nm_s1}(x) = \varphi_{nm_s1}(x), \qquad \psi_{nqi}(x) = \chi_n(\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_si}(x)),$$

$$R_{km_s0,nm_r0}(x) = \chi_n\xi_k \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x)), \qquad R_{km_s0,nm_r1}(x) = \xi_k \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} F_{kl0,nm_r1}(x),$$

$$R_{km_s0,nqi}(x) = \chi_n\xi_k \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x)),$$

$$R_{klj,nm_r0}(x) = (-1)^j\chi_n\xi_k(F_{klj,nm_r0}(x) - F_{klj,nm_r1}(x)), \qquad R_{klj,nm_r1}(x) = (-1)^j\xi_k F_{klj,m_r1}(x),$$

$$R_{klj,nqi}(x) = (-1)^j\chi_n\xi_k(F_{klj,nqi}(x) - F_{klj,nm_ri}(x)),$$

$$R_{km_s1,nm_r0}(x) = \chi_n \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r0}(x) + F_{kl1,nm_r1}(x)),$$

$$R_{km_s1,nqi}(x) = \chi_n \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x) - F_{kl1,nqi}(x) + F_{kl1,nm_ri}(x)),$$

$$R_{km_s1,nm_r1}(x) = \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r1}(x)),$$

$$n,k \ge 0, \qquad r,s = \overline{1,p}, \qquad m_s < l < m_{s+1}, \qquad m_r < q < m_{r+1}.$$

Аналогично определяются $\tilde\psi(x)$, $\tilde R(x)$ заменой в предыдущих определениях $\varphi_{nqi}(x)$ на $\tilde\varphi_{nqi}(x)$ и $F_{klj,nqi}(x)$ на $\tilde F_{klj,nqi}(x)$.

В силу леммы 5

$$\|\psi_{nqi}(x)\|,\ \|\tilde\psi_{nqi}(x)\| \le C, \qquad \|R_{klj,nqi}(x)\|,\ \|\tilde R_{klj,nqi}(x)\| \le \frac{C\xi_k}{|n-k|+1}, \tag{9}$$

где C не зависит от x,n,q,i,k,l,j

Рассмотрим банахово пространство B ограниченных последовательностей вида $a = [a_u]_{u\in V}$ с нормой $\|a\|_B = \sup\limits_{u\in V}\|a_u\|$, где a_u, $u\in V$ — $m\times m$ матрицы. Будем рассматривать $R(x)$ и $\tilde R(x)$ при фиксированном $x\in[0,\pi]$ как операторы, действующие из B в B. Из (9) вытекает, что при каждом $x\in[0,\pi]$ оператор $I+\tilde R(x)$ (I — единичный оператор) является линейным ограниченным оператором.

Можно показать (аналогично [3]), что при каждом фиксированном $x\in[0,\pi]$ вектор $\psi(x)\in B$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde\psi(x) = \psi(x)(I+\tilde R(x)) \tag{10}$$

в банаховом пространстве B, и это уравнение однозначно разрешимо. Уравнение (10) называется *основным уравнением* обратной задачи.

Используя решение основного уравнения, можно построить $\varphi_{nqi}(x)$ по формулам

$$\begin{gathered} \varphi_{nm_s1}(x) = \psi_{nm_s1}(x), \qquad \varphi_{nm_s0}(x) = \varphi_{nm_s1}(x) + \xi_n\psi_{nm_s0}(x), \\ \varphi_{nqi}(x) = \varphi_{nm_si}(x) + \xi_n\psi_{nqi}(x), \qquad n\ge 0, \qquad s=\overline{1,p}, \qquad m_s<q<m_{s+1}, \qquad i=0,1, \end{gathered} \tag{11}$$

и затем восстановить потенциал $Q(x)$ и коэффициенты краевых условий h и H, используя соотношения

$$Q(x) = \tilde Q(x) + \varepsilon(x), \qquad h = \tilde h - \varepsilon_0(0), \qquad H = \tilde H + \varepsilon_0(\pi), \tag{12}$$

где $\varepsilon_0(x) = \sum\limits_{(k,l,j)\in V} (-1)^j\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde\varphi^*_{klj}(x)$, $\qquad \varepsilon(x) = -2\varepsilon_0'(x)$.

Таким образом, мы получили следующий алгоритм решения обратной задачи 1.

Алгоритм 1. Пусть даны спектральные данные Λ краевой задачи $L\in A(\omega)$.

1. Выбираем $\tilde L\in A(\omega)$ и вычисляем $\tilde\psi(x)$ и $\tilde R(x)$.
2. Находим $\psi(x)$ из уравнения (10) и вычисляем $\varphi_{nqi}(x)$.
3. Строим $Q(x)$, h и H по формулам (12).

3. ДОСТАТОЧНОСТЬ

Пусть задан набор $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Выберем задачу $\tilde L \in A(\omega)$, построим $\tilde\psi(x)$, $\tilde R(x)$ и рассмотрим уравнение (10).

Лемма 7. *При каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ оператор $I + \tilde R(x)$, действующий из B в B, имеет ограниченный обратный, и основное уравнение (10) имеет единственное решение $\psi(x) \in B$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что однородное уравнение $\beta(x)(I + \tilde R(x)) = 0$, где $\beta(x) = [\beta_u(x)]_{u\in V}$, $\beta_u(x)$ — матрицы $m\times m$, имеет только нулевое решение.

Обозначим $\gamma_{nm_s1}(x) = \beta_{nm_s1}(x)$, $\gamma_{nm_s0}(x) = \gamma_{nm_s1}(x) + \xi_n\beta_{nm_s0}(x)$, $\gamma_{nqi}(x) = \gamma_{nm_si}(x) + \xi_n\beta_{nqi}(x)$, $n \ge 0$, $s = \overline{1,p}$, $m_s < q < m_{s+1}$, $i = 0, 1$. Тогда $\gamma_{nqi}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{nqi}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(\gamma_{kl0}(x)\tilde F_{kl0,nqi}(x) - \gamma_{kl1}(x)\tilde F_{kl1,nqi}(x)) = 0_m, \qquad n \ge 0, \tag{13}$$

и справедливы оценки

$$\|\gamma_{nqi}(x)\| \le C(x), \qquad n\ge 0, \qquad q = \overline{1,m}, \tag{14}$$
$$\|\gamma_{nm_s0}(x) - \gamma_{nm_s1}(x)\|,\ \|\gamma_{nqi}(x) - \gamma_{nm_si}(x)\| \le C(x)\xi_n, \qquad s = \overline{1,p}, \quad m_s < q < m_{s+1}.$$

Построим матрицы-функции $\gamma(x,\lambda)$, $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ по формулам

$$\gamma(x,\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\Big[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde\varphi^*_{kl0}(x), \tilde\varphi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl0}} - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde\varphi^*_{kl1}(x), \tilde\varphi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl1}}\Big], \tag{15}$$

$$\Gamma(x,\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\Big[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde\varphi^*_{kl0}(x), \tilde\Phi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl0}} - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde\varphi^*_{kl1}(x), \tilde\Phi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{kl1}}\Big], \tag{16}$$

$$B(x,\lambda) = \gamma^*(x,\bar\lambda)\Gamma(x,\lambda).$$

В силу (7) функция $\gamma(x,\lambda)$ является целой по λ при каждом фиксированном x. Функции $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ являются мероморфными по λ с простыми полюсами λ_{nqi}. Согласно (13) имеем: $\gamma(x,\lambda_{nqi}) = \gamma_{nqi}(x)$. Вычислим вычеты функции $B(x,\lambda)$ относительно ее полюсов, для простоты предполагая, что $\{\lambda_{nq0}\}\cap\{\lambda_{nq1}\} = \varnothing$:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq0}} B(x,\lambda) = \gamma^*(x,\lambda_{nq0})\gamma(x,\lambda_{nq0})\alpha_{nq0}, \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq1}} B(x,\lambda) = 0_m.$$

Рассмотрим контурный интеграл $I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N} B(x,\lambda)\,d\lambda$, где $\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = (N+1/2)^2\}$. Покажем, что при фиксированном $x \in [0,\pi]$ $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(x) = 0_m$.

В самом деле, из (7) и (15) вытекает

$$-\gamma(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{p}\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\Big[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl0}) - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl1})\Big] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{p}\Big[(\gamma_{km_s0}(x) - \gamma_{km_s1}(x))\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{kl0}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{kl0}) + \gamma_{km_s1}(x)\alpha_k^{(s)}(\tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_s0}) -$$
$$-\tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_s1})) + \gamma_{km_s1}(x)(\alpha_k^{(s)} - \tilde\alpha_k^{(s)})\tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_s1}) + \gamma_{km_s1}(x)\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\sum_{j=0}^{1}\alpha'_{klj}\times$$
$$\times(\tilde D(x,\lambda,\lambda_{klj}) - \tilde D(x,\lambda,\lambda_{km_sj})) + \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\sum_{j=0}^{1}(\gamma_{klj}(x) - \gamma_{km_sj}(x))\alpha'_{klj}\tilde D(x,\lambda,\lambda_{klj})\Big].$$

Используя оценки леммы 5, (3) и (14), получаем

$$\|\gamma(x,\lambda)\| \le C(x)\exp(|\tau|x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}, \qquad \operatorname{Re}\rho \ge 0.$$

Аналогично из (16) получаем при достаточно большом $\rho^* > 0$:

$$\|\Gamma(x,\lambda)\| \le \frac{C(x)}{|p|} \exp(-|\tau|x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{|\rho - k| + 1}, \qquad \operatorname{Re}\rho \ge 0, \qquad |\rho| \ge \rho^*, \qquad \rho \in G_\delta.$$

Тогда

$$\|B(x,\lambda)\| \le \frac{C(x)}{|\rho|} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{|\rho - k| + 1} \right)^2 \le \frac{C(x)}{|\rho|^3}, \qquad \lambda \in \Gamma_N.$$

Из полученной оценки вытекает $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(x) = 0_m$.

С другой стороны, вычисляя интеграл $I_N(x)$ по основной теореме о вычетах, заключаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{m} \gamma^*_{kl0}(x)\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0} = 0_m.$$

Так как $\alpha_{kl0} = \alpha^*_{kl0} \ge 0$, отсюда следует $\gamma^*_{kl0}(x)\gamma_{kl0}(x)\alpha_{kl0} = 0_m$ и $\gamma(x,\lambda_{kl0})\alpha_{kl0} = 0_m$, $k \ge 0$, $l = \overline{1,m}$.

Поскольку $\gamma(x,\lambda)$ — целая функция по λ, $\gamma(x,\lambda) = O(\exp(|\tau|x))$ при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$, согласно условию 3 теоремы 1, $\gamma(x,\lambda) \equiv 0_m$. Поэтому $\gamma_{nqi}(x) = 0_m$ при всех $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$, т. е. однородное уравнение имеет только тривиальное решение. □

Далее приведем общую схему доказательства достаточности условий теоремы 1. Доказательства лемм 8–10 аналогичны описанным в [1, п. 1.4.2].

Пусть $\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u\in V}$ — решение основного уравнения (10).

Лемма 8. *При $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$, справедливы соотношения*

$$\psi_{nqi}(x) \in C^1[0,\pi], \qquad \|\psi^{(\nu)}_{nqi}\| \le C(n+1)^\nu, \qquad \nu = 0,1 \qquad x \in [0,\pi],$$
$$\|\psi_{nqi}(x) - \tilde\psi_{nqi}(x)\| \le C\Omega\eta_n, \qquad \|\psi'_{nqi}(x) - \tilde\psi'_{nqi}(x)\| \le C\Omega, \qquad x \in [0,\pi],$$

где

$$\eta_n := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(|n-k|+1)^2} \right).$$

Построим матрицы-функции $\varphi_{nqi}(x)$ по формулам (11). Тогда в силу леммы 8 справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \|\varphi^{(\nu)}_{nqi}(x)\| \le C(n+1)^\nu, \qquad \nu = 0,1, \\ \|\varphi_{nqi}(x) - \tilde\varphi_{nqi}(x)\| \le C\Omega\eta_n, \qquad \|\varphi'_{nqi}(x) - \tilde\varphi'_{nqi}(x)\| \le C\Omega, \qquad q = \overline{1,m} \\ \|\varphi_{nm_s0}(x) - \varphi_{nm_s1}(x)\|,\ \|\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_si}(x)\| \le C\xi_n, \qquad s = \overline{1,p}, \quad m_s < q < m_{s+1}. \end{gathered} \tag{17}$$

Далее, построим функции $\varphi(x,\lambda)$ и $\Phi(x,\lambda)$ по формулам

$$\varphi(x,\lambda) = \tilde\varphi(x,\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V} (-1)^j \varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde\varphi^*_{klj}(x), \tilde\varphi(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{klj}},$$
$$\Phi(x,\lambda) = \tilde\Phi(x,\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V} (-1)^j \varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde\varphi^*_{klj}(x), \tilde\Phi(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{klj}},$$

а также краевую задачу $L(Q(x),h,H)$, используя соотношения (12). Ясно, что $\varphi(x,\lambda_{nqi}) = \varphi_{nqi}(x)$.

Применяя оценки (17), можно показать, что компоненты $\varepsilon_0(x)$ абсолютно непрерывны и компоненты $\varepsilon(x)$ принадлежат $L_2(0,\pi)$. Следовательно, верна

Лемма 9. *$Q_{jk}(x) \in L_2(0,\pi)$, $j,k = \overline{1,m}$.*

Лемма 10. *Справедливы соотношения*

$$l\varphi_{nqi}(x) = \lambda_{nqi}\varphi_{nqi}(x), \qquad l\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \qquad l\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda),$$
$$\varphi(0,\lambda) = I_m, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h, \qquad U(\Phi) = I_m, \qquad V(\Phi) = 0_m.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что набор $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ совпадает со спектральными данными построенной краевой задачи $L(Q,h,H)$. По лемме 10 матрица-функция $\Phi(x,\lambda)$ является решением Вейля задачи L. Получим выражение для матрицы Вейля:

$$M(\lambda) = \Phi(0,\lambda) = \tilde{M}(\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V} \varphi_{klj}(0)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde{\varphi}^*_{klj}(x), \tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle_{x=0}}{\lambda - \lambda_{klj}} =$$

$$= \tilde{M}(\lambda) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda - \lambda_{kl1}} - \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda - \lambda_{kl1}} \right).$$

Используя равенство (см. [2]) $\tilde{M}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda-\lambda_{kl1}}$, приходим к соотношению $M(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda-\lambda_{kl0}}$. Отсюда вытекает, что $\{\lambda_{kl0}\}$ являются полюсами матрицы Вейля $M(\lambda)$, а $\{\alpha_{kl0}\}$ — вычетами относительно этих полюсов. Заметим, что кратности собственных значений также совпадают с количествами одинаковых чисел в наборе $\{\lambda_{kl0}\}$, потому что эти количества равны рангам вычетов $\{\alpha_{kl0}\}$. Теорема 1 полностью доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (*проекты* 10-01-00099, 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. *Юрко, В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.
2. *Yurko, V.A.* Inverse problems for matrix Sturm – Liouville operators / V.A. Yurko // Russian J. of Math. Physics. – 2006. – V. 13, № 1. – P. 111–118.
3. *Carlson, R.* An inverse problem for the matrix Schrödinger equation / R. Carlson // J. of Math. Analysis and Applications. – 2002. – № 267. – P. 564–575.
4. *Malamud, M.M.* Uniqueness of the matrix Sturm – Liouville equation given a part of the monodromy matrix and borg type results / M.M. Malamud // Sturm – Liouville theory. Past and present. – Birkhauser; Basel, 2005. – P. 237–270,
5. *Yurko, V.A.* Inverse problems for the matrix Sturm – Liouville equation on a finite interval / V.A. Yurko // Inverse Problems. – 2006. – № 22. – P. 1139–1149.
6. *Chelkak, D.* Weyl – Titchmarsh functions of vector-valued Sturm – Liouville operators on the unit interval / D. Chelkak, E. Korotyaev // J. of Functional Analysis. – 2009. – V. 257, iss. 5, 1 September. – P. 1546–1588.

УДК 519.853.3

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

Рассматривается конечномерная задача о минимизации отношения радиуса описанного шара заданного выпуклого компакта (в произвольной норме) к радиусу вписанного шара за счет выбора единого центра этих шаров. Предлагается подход к построению численного метода её решения. На каждом шаге итерационного процесса требуется решать задачу выпуклого программирования, целевая функция которой является разностью радиуса описанного шара и, с некоторым варьируемым положительным множителем, радиуса вписанного шара. Показано, что эта вспомогательная задача, в случае, когда сам выпуклый компакт, а также шар используемой нормы являются многогранниками, сводится к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: выпуклый компакт, асферичность, субдифференциал, аппроксимация.

On a Approximate Solution of the Problem of Aspherical Convex Compact Set

S.I. Dudov, E.A. Mesheryakova

Saratov State University,
Chair of Mathematical Economy
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

We examine a finite-dimensional problem of minimizing the ratio radius of the ball given a compact convex set (in an arbitrary norm) to the radius of the inscribed sphere through the choice of a common center of these balls. The article offers an approach to building the numerical method of its solution. At each step of the iterative process it is required to solve the problem of convex programming, target function of which is the difference between the radius of a circumscribed sphere, and scalable, with some positive factor, the radius of the inscribed sphere. It is shown that this auxiliary problem, in case of convex compact, and the ball of the used norm being polyhedral, can be reduced to a linear programming problem.

Key words: compact convex set, asphericity, subdifferential, approximation.

