Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина, О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях, *Чебышевский сб.*, 2012, том 13, выпуск 3, 47–52

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 3 (2012)

УДК 511.9.

О МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ ТЕОРЕМЫ ГАЛУА О ЧИСТО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЦЕПНЫХ ДРОБЯХ[1]

© 2012. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский (г. Тула),
Е. И. Юшина (г. Москва)

Аннотация

Получена матричная форма теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях. Введено понятие матричного основания для приведенной квадратической иррациональности. Описаны некоторые свойства матричного основания.

Ключевые слова: чисто периодические цепные дроби, непрерывные дроби, приведенные квадратические иррациональности.

Библиография: 7 названий.

1 Введение

Рассмотрим разложение иррационального числа α в непрерывную дробь[2] вида

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\dots\frac{1}{a_n+}\dots, \qquad (1)$$

где a_0 — целое число, a_i — натуральные ($i \geqslant 1$).
Подходящие дроби этого разложения получаются по формуле

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Работа выполнена по гранту РФФИ 11-01-00571

[2] Термины цепная дробь и непрерывная дробь в данной работе используются как синонимы.

Таким образом разложение (1) можно представить как бесконечное произведение матриц

$$\prod_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Это произведение матриц называется сходящимся к α, если

$$\prod_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & C_n \\ B_n & D_n \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{D_n} = \alpha.$$

Хорошо известна теорема Лагранжа, утверждающая, что каждая квадратическая иррациональность разлагается в периодическую непрерывную дробь и каждая периодическая непрерывная дробь соответствует квадратической иррациональности (см. [1], [3], [7], [5], [6]).

Э. Галуа исследовал вопрос о чисто периодических непрерывных дробях [2] и показал, что множество квадратичных иррациональностей с чисто периодическими непрерывными дробями совпадает с множеством приведенных квадратических иррациональностей.

Пусть квадратическая иррациональность α удовлетворяет неприводимому квадратному уравнению

$$a\alpha^2 - b\alpha - c = 0, \quad a \in \mathbb{N}, \quad b, c \in \mathbb{Z}, \quad c \neq 0, \quad (a,b,c) = 1. \tag{3}$$

Ясно, что α и β — собственные числа сопровождающей матрицы[3]

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c}{a} & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

квадратного уравнения (3). Действительно,

$$\det(S - tE) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ \frac{c}{a} & \frac{b}{a} - t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{b}{a}t - \frac{c}{a} = \frac{at^2 - bt - c}{a}.$$

По определению квадратическая иррациональность α называется приведенной квадратической иррациональностью, если $\alpha = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} > 1$, а её сопряженная иррациональность $\beta = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ удовлетворяет условиям $-1 < \beta < 0$.

[3]Через β мы всегда будем обозначать сопряженную квадратическую иррациональность к квадратической иррациональности α.

Из определения приведенной квадратической иррациональности следует, что коэффициенты уравнения (3) должны удовлетворять необходимым и достаточным условиям:

$$b, c \in \mathbb{N}, \quad b \neq \left|\frac{ac}{d} - d\right|, d|ac, \quad c < b + a, \quad \begin{cases} c \geqslant 1 & \text{при } b \geqslant a, \\ c > a - b & \text{при } 1 \leqslant b < a. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть длина периода разложения приведенной квадратической иррациональности α равна $n+1$, то есть последовательность неполных частных имеет вид

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_0, a_1, \ldots.$$

Отсюда следует, что теорема Галуа принимает следующий матричный вид:

Для любой приведенной квадратической иррациональности α существует матрица $A(\alpha) = \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix}$ такая, что $\alpha = A(\alpha)^\infty$. Если $\alpha = A(\alpha)^\infty$, то α — приведенная квадратическая иррациональность.

Цель данной работы — описать свойства матрицы $A = A(\alpha)$ для приведенной квадратической иррациональности α.

Определение 1. *Будем называть матрицу $A = A(\alpha)$ матричным основанием приведенной квадратической иррациональности α.*

2 Собственные числа матричного основания

Из определения матричного основания следует, что приведенная квадратическая иррациональность α удовлетворяет уравнению

$$\alpha = \frac{P_n\alpha + P_{n-1}}{Q_n\alpha + Q_{n-1}}. \tag{5}$$

Уравнение (5) равносильно квадратному уравнению

$$Q_n\alpha^2 - (P_n - Q_{n-1})\alpha - P_{n-1} = 0 \tag{6}$$

и

$$\alpha = \frac{P_n - Q_{n-1} + \sqrt{(P_n - Q_{n-1})^2 + 4Q_nP_{n-1}}}{2},$$
$$\beta = \frac{P_n - Q_{n-1} - \sqrt{(P_n - Q_{n-1})^2 + 4Q_nP_{n-1}}}{2}. \tag{7}$$

Положим $d = (Q_n, P_n - Q_{n-1}, P_{n-1})$, тогда, сопоставляя уравнения (6) и (3), получим

$$Q_n = da, \quad P_{n-1} = dc, \quad Q_{n-1} = P_n - db. \tag{8}$$

Так как
$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^{n-1}, \tag{9}$$
то из (8) и (9) получаем
$$P_n(P_n-db)-d^2ac=(-1)^{n-1}, \tag{10}$$
или
$$(2P_n-db)^2-d^2(4ac+b^2)=4(-1)^{n-1}. \tag{11}$$

Рассмотрим квадратичную форму $(1,-b,-ac)$, то есть форму
$$X^2-bXY-acY^2.$$
Её дискриминант $D=b^2+4ac>0$ и значит она неопределенная.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы $A(\alpha)$:
$$f(t)=\det(A(\alpha)-tE)=\begin{vmatrix}P_n-t & P_{n-1}\\ Q_n & Q_{n-1}-t\end{vmatrix}=t^2-(P_n+Q_{n-1})t+P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}.$$
Собственные числа λ_1 и λ_2 матричного основания A задаются формулами
$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{P_n+Q_{n-1}+\sqrt{(P_n-Q_{n-1})^2+4Q_nP_{n-1}}}{2}=Q_n\alpha+Q_{n-1},\\ \lambda_2&=\frac{P_n+Q_{n-1}-\sqrt{(P_n-Q_{n-1})^2+4Q_nP_{n-1}}}{2}=Q_n\beta+Q_{n-1}.\end{aligned} \tag{12}$$
Вычисления показывают, что
$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} & \beta\\ \dfrac{1}{\alpha-\beta} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Q_n\alpha+Q_{n-1} & 0\\ 0 & Q_n\beta+Q_{n-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -\dfrac{1}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\end{pmatrix}=\\ &\qquad=\begin{pmatrix}Q_n(\alpha+\beta)+Q_{n-1} & -Q_n\alpha\beta\\ Q_n & Q_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_n & P_{n-1}\\ Q_n & Q_{n-1}\end{pmatrix}=A,\end{aligned} \tag{13}$$
так как по теореме Виета $\alpha+\beta=\dfrac{P_n-Q_{n-1}}{Q_n}$ и $-\alpha\beta=\dfrac{P_{n-1}}{Q_n}$.

Из равенства (13) следует, что
$$A^m=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} & \beta\\ \dfrac{1}{\alpha-\beta} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m & 0\\ 0 & (Q_n\beta+Q_{n-1})^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -\dfrac{1}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m-\beta(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{\alpha-\beta} & \dfrac{-\alpha\beta((Q_n\alpha+Q_{n-1})^m-(Q_n\beta+Q_{n-1})^m)}{\alpha-\beta}\\ \dfrac{(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m-(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha(Q_n\beta+Q_{n-1})^m-\beta(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m}{\alpha-\beta}\end{pmatrix}.$$

Так как

$$A^m = \begin{pmatrix} P_{n+m(n+1)} & P_{n+m(n+1)-1} \\ Q_{n+m(n+1)} & Q_{n+m(n+1)-1} \end{pmatrix},$$

то

$$P_{n+m(n+1)} = \frac{\alpha(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m - \beta(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{\alpha-\beta},$$
$$Q_{n+m(n+1)} = \frac{(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m - (Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{\alpha-\beta},$$

$$P_{n+m(n+1)-1} = \frac{-\alpha\beta((Q_n\alpha+Q_{n-1})^m - (Q_n\beta+Q_{n-1})^m)}{\alpha-\beta},$$
$$Q_{n+m(n+1)-1} = \frac{\alpha(Q_n\beta+Q_{n-1})^m - \beta(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m}{\alpha-\beta}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{m\to\infty}\frac{P_{n+m(n+1)}}{Q_{n+m(n+1)}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\alpha(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m - \beta(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m - (Q_n\beta+Q_{n-1})^m} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{\alpha - \dfrac{\beta(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m}}{1 - \dfrac{(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m}} = \alpha, \tag{14}$$

так как

$$-1 < \beta + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} < 1, \quad \alpha + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} > 1,$$
$$\lim_{m\to\infty}\frac{(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m} = \lim_{m\to\infty}\frac{(\beta+\frac{Q_{n-1}}{Q_n})^m}{(\alpha+\frac{Q_{n-1}}{Q_n})^m} = 0.$$

Аналогично имеем:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{P_{n+m(n+1)-1}}{Q_{n+m(n+1)-1}} = \lim_{m\to\infty}\frac{-\alpha\beta((Q_n\alpha+Q_{n-1})^m - (Q_n\beta+Q_{n-1})^m)}{\alpha(Q_n\beta+Q_{n-1})^m - \beta(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{\alpha\left(1 - \dfrac{(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m}\right)}{1 - \dfrac{\alpha(Q_n\beta+Q_{n-1})^m}{\beta(Q_n\alpha+Q_{n-1})^m}} = \alpha. \tag{15}$$

Таким образом, (14) и (15) доказывает, что, действительно, $\alpha = A^\infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Венков Б. А. Элементарная теория чисел. — М.-Л.: Главная ред. общетихнической и технологической литературы 1937 г.

[2] Галуа Э. Сочинения. — М.: ОНТИ, 1936.

[3] Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Из-во Наука, 1965.

[4] Лежен Дирихле П. Г. Лекции по теории чисел. — М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР 1936.

[5] Сушкевич А. К. Теория чисел. — Харьков. 1956.: Из-во ХГУ им. А. М. Горького.

[6] Хинчин А. Я. Цепные дроби. (второе издание) — М.-Л.: ГТТИ, 1949.

[7] Lagrange J. L. Additions au memoire laresolution des equations numeriques. // Mem. Berl. 24.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Московский педагогический государственный университет
Поступило 20.07.2012