V. B. Tverskoi, Scattering of solitons by quantum excitations, *TMF*, 1984, Volume 59, Number 2, 200–208

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 59, № 2
май, 1984

РАССЕЯНИЕ СОЛИТОНОВ НА КВАНТОВЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

Тверской В. Б.

Рассмотрено взаимодействие солитонов с квантовыми возбуждениями в нелинейных моделях скалярного поля в двумерном пространстве-времени.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучение квантово-полевых систем, обладающих нетривиальными решениями классических уравнений движения, привлекает все большее внимание. Это обусловлено тем, что стандартный подход, основанный на обычной теории возмущений, в котором частицы рассматриваются как чисто квантовые возбуждения, удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям, часто становится неприменимым из-за отсутствия малого параметра в теории или сингулярности разложения по такому параметру. Другой подход, в котором частицы интерпретируются как солитоны, часто позволяет описывать эффекты вне рамок обычной теории возмущений [1, 2]. Для восстановления исходной симметрии системы, нарушенной выделением классической составляющей, применяется метод коллективных координат Боголюбова[3]. Первоначально не затрагивавший временной компоненты, этот метод был затем обобщен на случай всей группы Пуанкаре [4, 5].

В задаче квантования односолитонного сектора самодействующего скалярного поля в двумерном пространстве-времени квантовая поправка к солитону (вторично квантованное поле) описывается уравнением движения, содержащим потенциал, определяемый солитонным решением. Большинство авторов ограничивается рассмотрением случаев, когда этот потенциал стремится к одинаковым пределам при $x\to\pm\infty$ [1, 4—6] (этим свойством обладают известные модели φ^4 и синус-Гордон), что позволяет интерпретировать асимптотические состояния вторично квантованного поля как свободные поля мезонов [5, 6]. Однако в последние годы стали находить применение модели, в которых потенциал может иметь различные асимптотики, в частности модель φ^6 [7, 8].

В данной работе исследуется взаимодействие солитона с вторично квантованным полем, показывается, что возможность описания поля как композиции солитона и рассеивающихся на нем мезонов зависит от модели. Результаты иллюстрируются на примере модели φ^6.

2. СХЕМА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим модель самодействующего скалярного поля в двумерном пространстве-времени с плотностью лагранжиана

$$(1)\qquad L(\varphi)={}^1/_2\partial_\nu\varphi\partial^\nu\varphi-U(\varphi),$$

где $U(\varphi)$ обладает свойствами $U(\varphi)\geqslant 0$; $U(\varphi)$ имеет минимум в двух (или более) точках ρ_i, $i=1, 2, 3,\ldots$, т. е. $U(\rho_i)=U'(\rho_i)=0$. Пусть также для двух соседних минимумов ρ_1, ρ_2 выполняется условие

$$(2)\qquad U''(\rho_1)=\mu_1^2>0,\qquad U''(\rho_2)=\mu_2^2>0.$$

Как уже говорилось, большинство авторов рассматривает аналогичные модели с $\mu_1^2=\mu_2^2=\mu^2$. Мы, однако, не будем ограничивать общности задачи. Здесь и ниже

$$(3)\qquad \mu_2^2=\mu_1^2+d^2,\qquad d\geqslant 0.$$

Уравнение движения для поля $\varphi(x, t)$

$$(4)\qquad \partial_t^2\varphi-\partial_x^2\varphi+U'(\varphi)=0$$

имеет решением стационарный солитон $\Phi_0(x)$, причем

$$(5)\qquad \lim_{x\to-\infty}\Phi_0(x)=\rho_1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\Phi_0(x)=\rho_2.$$

Односолитонный сектор соответствующей квантовой теории рассматривается в виде разложения по параметру $\sqrt{\gamma}$, входящему в модель через канонические коммутационные соотношения

$$(6)\qquad [\varphi(x, t),\ \varphi(x', t)]=[\dot\varphi(x, t),\ \dot\varphi(x', t)]=0,$$

$$[\dot\varphi(x, t),\ \varphi(x', t)]=-i\gamma\delta(x-x'),\qquad \dot\varphi(x, t)\equiv\partial_t\varphi(x, t).$$

Разложение поля имеет вид

$$(7)\qquad \varphi(x, t)=\Phi_0(x)+\sqrt{\gamma}\Phi_1(x, t)+\gamma\Phi_2(x, t)+\ldots.$$

Преобразование Боголюбова для этой задачи было проведено в работе [4]. Полю $\varphi(x, t)$ придается операторнозначность введением новых переменных $\xi(x, t)=\mathbf{H}x-\mathbf{P}t-\mathbf{L}$, $\eta(x, t)=\mathbf{H}t-\mathbf{P}x-\mathbf{K}$, где $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{K}$ — эрмитовы операторы, образующие алгебру Ли:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{P}]=0,\qquad [\mathbf{K}, \mathbf{L}]=0,$$

$$[\mathbf{H}, \mathbf{K}]=i\gamma\mathbf{H},\qquad [\mathbf{P}, \mathbf{K}]=i\gamma\mathbf{P},$$

$$[\mathbf{L}, \mathbf{H}]=i\gamma\mathbf{P},\qquad [\mathbf{L}, \mathbf{P}]=i\gamma\mathbf{H}.$$

Отсюда легко получить, что

$$(8)\qquad \exp\left\{\frac{i}{\gamma}(\tau\mathbf{H}-q\mathbf{P})\right\}\xi(x, t)\exp\left\{\frac{i}{\gamma}(q\mathbf{P}-\tau\mathbf{H})\right\}=\xi(x+q, t+\tau),$$

$$\exp\left(\frac{i}{\gamma}\theta\mathbf{L}\right)\xi(x, t)\exp\left(-\frac{i}{\gamma}\theta\mathbf{L}\right)=\xi(x\operatorname{ch}\theta+t\operatorname{sh}\theta,\ t\operatorname{ch}\theta+x\operatorname{sh}\theta),$$

и совершенно аналогичные соотношения для $\eta(x, t)$. Кроме того,

$$(9) \qquad [\xi(x, t), \ \eta(x, t)] = 0.$$

Из (8), (9) следует, что поле $\varphi(x, t) = \tilde\varphi(\xi(x, t), \eta(x, t))$ также удовлетворяет соотношениям типа (8), т. е. пуанкаре-ковариантно во всех порядках теории возмущений (7). Операторы **H**, **P**, **L** тем самым становятся генераторами трансляций и лоренцевых преобразований, соответственно. При этом оператор **K** становится генератором масштабных преобразований.

Приравнивая генераторы **H**, **P**, **L** соответствующим нетеровским выражениям, полученным из (1), получаем операторные связи Дирака

$$(10) \qquad \mathbf{H} = \int dx[{}^1/{}_2(\dot\varphi(x,t))^2 + {}^1/{}_2(\varphi'(x,t))^2 + U(\varphi(x,t))],$$

$$\mathbf{P} = -\int dx\, \dot\varphi(x,t)\varphi'(x,t),$$

$$\mathbf{L} = \int x\, dx[{}^1/{}_2(\dot\varphi(x,t))^2 + {}^1/{}_2(\varphi'(x,t))^2 + U(\varphi(x,t))] - tP,$$

которые должны рассматриваться на векторе состояния. Соотношения (10) фактически означают связь между спектрами генераторов группы Пуанкаре и полем φ.

Подставляя (7) в (4), получаем уравнение для поля $\Phi_1(x, t)$:

$$(11) \qquad \partial_t^2\Phi_1 - \partial_x^2\Phi_1 + V(x)\Phi_1 = 0, \qquad V(x) = U''(\Phi_0(x)).$$

Решение уравнения (11) представляется в виде разложения по собственным функциям задачи

$$(12) \qquad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x,k) = \omega_k^2\psi(x,k), \qquad \omega_k^2 = k^2 + \mu_1^2,$$

все необходимые сведения о которой приведены в приложении. Операторные связи Дирака (10) в порядке $\sqrt{\gamma}$ обеспечивают исключение нулевой моды из спектра $\Phi_1(x, t)$:

$$(13) \qquad \int dx\Phi_1(x,t)\Phi_0'(x) = \int dx\dot\Phi_1(x,t)\Phi_0'(x) = 0.$$

Таким образом, разложение поля $\Phi_1(x, t)$ имеет вид

$$(14) \qquad \Phi_1(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}(a_j \exp(-i\omega_j t) + a_j^+ \exp(i\omega_j t))\psi_j(x) +$$

$$+ \int_{|k|<d} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}}(b(k)\exp(-i\omega_k t) + b^+(k)\exp(i\omega_k t))\chi(x,k) +$$

$$+ \int_{|k|>d} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}}(a(k)\exp(-i\omega_k t)\psi(x,k) + a^+(k)\exp(i\omega_k t)\psi^*(x,k)).$$

Заметим, что в силу действительности функций $\chi(x, k)$ (см. (П.3) из приложения) операторы $b(k)$ обладают свойством $b(k) = b(-k)$.

Если операторы, входящие в разложение (14), удовлетворяют соотношениям

$$(15)\qquad [a_n, a_j^+]=\delta_{nj},\qquad [a(k), a^+(k')]=\delta(k-k'),$$
$$[b(k), b^+(k')]={}^1/_2\{\delta(k-k')+\delta(k+k')\},$$

а остальные коммутаторы равны нулю, то для поля $\Phi_1(x, t)$ автоматически удовлетворяются одновременные перестановочные соотношения, с учетом (13) имеющие вид

$$[\Phi_1(x, t), \Phi_1(x', t)]=[\dot\Phi_1(x, t), \dot\Phi_1(x', t)]=0,$$
$$[\dot\Phi_1(x, t), \Phi_1(x', t)]-i\psi_0(x)\psi_0(x')=-i\delta(x-x'),$$

где $\psi_0(x)$ — нулевая мода (П.2).

Поле $\Phi_1(x, t)$ при подстановке (7) в первое из соотношений (10) в порядке γ определяет первую квантовую поправку к массе поля $\varphi(x, t)$:

$$(16)\qquad M=M_0+{}^1/_2\gamma\int dx[(\dot\Phi_1(x,t))^2+(\Phi_1'(x,t))^2+V(x)(\Phi_1(x,t))^2],$$

где $M_0=\int dx(\Phi_0'(x))^2$ есть классическая масса солитона.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНА С ВТОРИЧНО КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ

Согласно [4] учет членов порядка γ при подстановке (7) в (4) и (10) приводит к появлению квантовой поправки к движению солитона

$$(17)\qquad \varphi(x,t)=\Phi_0\left(x+\frac{\gamma}{M_0}\Delta(t)\right)+\sqrt{\gamma}\,\Phi_1(x,t)+O(\gamma),$$
$$\Delta(t)=\frac{1}{2}\int dxx[(\dot\Phi_1(x,t))^2+(\Phi_1'(x,t))^2+V(x)(\Phi_1(x,t))^2].$$

Исследование (17) проводим с помощью разложения (14). Прежде всего выделим вклад дискретного спектра в $\Delta(t)$:

$$(18)\qquad \Delta(t)=\Delta'(t)+\Delta_{\rm dis}(t),$$
$$\Delta_{\rm dis}(t)=\frac{1}{8}\sum_{n,j}\left\{\frac{(\omega_n-\omega_j)^2}{\sqrt{\omega_n\omega_j}}[a_na_j\exp(-i(\omega_n+\omega_j)t)+\right.$$
$$+a_n^+a_j^+\exp(i(\omega_n+\omega_j)t)]+\frac{(\omega_n+\omega_j)^2}{\sqrt{\omega_n\omega_j}}[a_n^+a_j\exp(i(\omega_n-\omega_j)t)+$$
$$\left.+a_na_j^+\exp(i(\omega_j-\omega_n)t)]\right\}\int dxx\psi_n(x)\psi_j(x).$$

Таким образом, переходы в дискретном спектре вызывают «вибрацию» солитона. Заметим, что ни в наиболее известных моделях (φ^4, синус-Гордон), ни в рассматриваемой ниже модели φ^6 этот эффект не имеет места вследствие малого количества дискретных уравнений задачи (12).

Поправка $\Delta'(t)$, в свою очередь, дает появление in- и out-асимптотических скоростей движения солитона. В самом деле,

$$(19)\qquad v_{\rm in}^{\rm out}=-\frac{\gamma}{M_0}\,w\text{-}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\Delta'(t)}{t}=$$
$$=-\frac{\gamma}{8M_0}\,w\text{-}\lim_{t\to\pm\infty}\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{|k|<d}dk\int\limits_{|k'|<d}dk'\frac{(\omega_k+\omega_{k'})^2}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\exp(i(\omega_k-\omega_{k'})t)\times\right.$$

$$\times(b^+(k)b(k')+b(k')b^+(k))\int dxx\chi(x,k)\chi(x,k')+$$

$$+\int\limits_{|k|>d} dk \int\limits_{|k'|>d} dk' \frac{(\omega_k+\omega_{k'})^2}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\exp(i(\omega_k-\omega_{k'})t)\,(a^+(k)a(k')+$$

$$+a(k')a^+(k))\int dx\psi^*(x,k)\psi(x,k')\Big\},$$

отсутствие членов, соответствующих переходам между различными составными частями (П.2)–(П.4) спектра задачи (12) объясняется наличием быстро осциллирующих экспонент. По этой же причине интегрирование по x в (19) можно вести по асимптотикам функций $\psi(x, k)$, $\chi(x, k)$ (см. приложение).

Не останавливаясь на вопросах регуляризации, запишем ответ в нормальной форме:

(20)
$$v_{\mathrm{in}}=-\frac{1}{2M_0}\gamma\int\limits_{|k|>d} dk\Big\{k|T(k)|\Big(1+\frac{k_2}{k}\Big)a^+(k)a(k)+$$

$$+|k|R(k)\Big(1+\frac{k_2}{k}\Big)a^+(k)a(-k)+|k|\Big(1-\frac{k_2}{k}\Big)a^+(k)a(k)\Big\}-$$

$$-\frac{1}{M_0}\gamma\int\limits_{|k|<d} dk|k|b^+(k)b(k),$$

(21)
$$v_{\mathrm{out}}=-\frac{1}{2M_0}\gamma\int\limits_{|k|>d} dk\Big\{k|T(k)|\Big(1+\frac{k_2}{k}\Big)a^+(k)a(k)-$$

$$-|k|R(k)\Big(1+\frac{k_2}{k}\Big)a^+(k)a(-k)-|k|\Big(1-\frac{k_2}{k}\Big)a^+(k)a(k)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{M_0}\gamma\int\limits_{|k|<d} dk|k|b^+(k)b(k),$$

где $T(k)$, $R(k)$ — обычные квантовомеханические коэффициенты прохождения и отражения для задачи (12), (П.7). Различие v_{in} и v_{out} характеризует наличие рассеяния солитона на вторично квантованном поле в порядке γ. Из (20), (21) следует, что рассеяние в этом порядке может отсутствовать лишь в тех моделях, у которых потенциал $V(x)$ в задаче (12) имеет одинаковые асимптотики при $x\to\pm\infty$ ($d=0$) и является безотражательным, т. е. $R(k)=0$, $|T(k)|=1$, что как раз имеет место в моделях φ^4 и синус-Гордон.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ВТОРИЧНО КВАНТОВАННОГО ПОЛЯ

Строим in- и out-операторы с помощью LSZ-процедуры:

(22)
$$a_{1,2\,\mathrm{in}}^{\mathrm{out}}(k)=w\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} i\int dx\frac{\exp(i\omega_k t-ik_{1,2}x)}{\sqrt{4\pi\omega_k}}\times$$

$$\times\overleftrightarrow{\partial_t}\int\frac{dl}{\sqrt{2\omega_l}}\exp(i\omega_l t)\psi(x,l)a(l),\qquad k_1\equiv k.$$

Индексы 1, 2 соответствуют наличию различных μ_1^2, μ_2^2 (3). Как и в случае вычисления $v_{\mathrm{n}}^{\mathrm{out}}$, интегрирование в (22) ведется по асимптотикам функций непрерывного спектра (см. приложение).

Для выяснения структуры асимптотических полей рассмотрим конкретно, например, in-поле. Из (15) следует, что

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & [a_{1\mathrm{in}}(k), a^{\pm}_{1\,\mathrm{in}}(k')]=\theta(k)\delta(k-k'), \qquad |k|>d,\\
& [a_{2\mathrm{in}}(k), a^{+}_{2\mathrm{in}}(k')]=\theta(-k_2)\delta(k_2-k_2'), \qquad |k|>d,\\
& [b_{\mathrm{in}}(k), b_{\mathrm{in}}^{+}(k')]=\theta(k)\delta(k-k'), \qquad |k|<d,
\end{aligned}
$$

а остальные коммутаторы равны нулю. Перестановочные соотношения (23) обеспечивают выполнение одновременных коммутационных соотношений для in-поля, имеющего вид

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad \Phi_{1\mathrm{in}}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg\{ & \int_0^d \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}}(b_{\mathrm{in}}(k)\exp(-i\omega_k t+ikx)+\\
&+b_{\mathrm{in}}^{+}(k)\exp(i\omega_k t-ikx))+\int_d^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{1\mathrm{in}}(k)\exp(-i\omega_k t+ikx)+\\
&+a^{\pm}_{1\mathrm{in}}(k)\exp(i\omega_k t-ikx))+\int_{-\infty}^{0}\frac{dk_2}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{2\mathrm{in}}(k)\exp(-i\omega_k t+ik_2x)+\\
&+a^{\pm}_{2\mathrm{in}}(k)\exp(i\omega_k t-ik_2x))\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Если в (2) $\mu_1^2=\mu_2^2=\mu^2$, то это поле также удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона для свободного поля мезонов массы μ. В общем случае ($\mu_1^2\neq\mu_2^2$), однако, последнее слагаемое в (24) удовлетворяет уравнению с другой массой μ_2, т. е. уравнения Клейна — Гордона для поля (24) нет. С другой стороны, поскольку поле (14) эволюционирует как единое целое, то представляется затруднительным описать мезоны двух масс в рамках одного поля (14).

5. МОДЕЛЬ φ^6

Модель φ^6, применяющаяся в работах [7, 8], описывается плотностью лагранжиана (1), где

$$U(\varphi)=B\varphi^2+A\varphi^4+C\varphi^6,\qquad B>0,\qquad A<0,\qquad C>0.$$

Эта модель используется для описания фазовых переходов в линейных структурах. Односолитонные решения уравнения движения описывают явление центрального пика, наблюдаемое на эксперименте [9].

Вкратце проиллюстрируем все сказанное ранее на примере этой модели. В точке фазового перехода согласно [7] $U(\varphi)$ можно представить в виде $U(\varphi)={}^1/_2 m^2[\varphi(1-\varphi^2/m^2)]^2$. Классическое уравнение Клейна — Гордона $\partial_t^2\varphi-\partial_x^2\varphi+m^2\varphi-4\varphi^3+3\varphi^5/m^2=0$ допускает решение в виде солитона $\Phi_0(x)=m\sqrt{(1+\operatorname{th} mx)/2}$. Параметры из (2) равны соответственно $\mu_1^2=m^2$, $\mu_2^2=4m^2$.

Уравнение (11) для квантового поля $\Phi_1(x, t)$ имеет вид

$$\partial_t^2\Phi_1-\partial_x^2\Phi_1+m^2\left[1-6(1+\operatorname{th} mx)+\frac{15}{4}(1+\operatorname{th} mx)^2\right]\Phi_1=0.$$

Уравнение (12) заменами переменной и функции

$$y={}^1/_2(1-\operatorname{th} mx),\quad \psi(x, k)=\tilde{\psi}(y, k)=y^\nu(1-y)^\sigma f(y, k),\tag{25}$$

$$\nu^2={}^1/_4(3-k^2/m^2),\quad \sigma^2=-k^2/4m^2$$

сводится к гипергеометрическому $y(1-y)f''+[(2\nu+1)-(2\sigma+2\nu+1)y]f'-(\sigma+\nu-{}^3/_2)(\sigma+\nu+{}^5/_2)f=0$. Поскольку дискретная часть спектра состоит из одной нулевой моды $\psi_0(x)=m(1-\operatorname{th} mx)\sqrt{1+\operatorname{th} mx}$, то «вибрация» солитона в данной модели отсутствует.

Рассеяние солитона на квантовых возбуждениях в данной модели имеет место в порядке γ. Величины $T(k)$, $R(k)$, входящие в (20), (21), даются выражениями

$$T(k)=\sqrt{\frac{k^2-3m^2}{k^2}}\,\frac{\Gamma(-\sigma-\nu-{}^3/_2)\Gamma(-\sigma-\nu+{}^5/_2)}{\Gamma(1-2\nu)\Gamma(-2\sigma)},$$

$$R(k)=\frac{\Gamma(-\sigma-\nu-{}^3/_2)\Gamma(-\sigma-\nu+{}^5/_2)}{\Gamma(-\sigma+\nu-{}^3/_2)\Gamma(-\sigma+\nu+{}^5/_2)},$$

где σ, ν определены в (25).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен общий случай квантования односолитонного сектора самодействующего скалярного поля в двумерном пространстве-времени ($\mu_1^2\leqslant\mu_2^2$), что позволило наряду с обобщением результатов случая $\mu_1^2=\mu_2^2$ сделать новые выводы о структуре вторично квантованного поля. В этом контексте впервые исследована модель φ^6. На ее примере показано, что в физически применимых моделях рассеяние солитонов на квантовых возбуждениях может происходить в порядке γ.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность О. А. Хрусталеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также К. А. Свешникову за ценные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Общая теория разложения [10] позволяет сделать следующие выводы о спектре задачи (11):

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\psi(x, k)=\omega_k^2\psi(x, k),\tag{П.1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}V(x)=\mu_1^2,\qquad \lim_{x\to+\infty}V(x)=\mu_2^2.$$

Дискретная часть спектра невырождена и состоит из вещественных квадратично-интегрируемых функций

$$\psi_0(x)=c\Phi_0'(x),\qquad \omega_0=0,\tag{П.2}$$

$$\psi_j(x),\quad j=1, 2,\ldots, N,\quad 0<\omega_j<\mu_1,\qquad \int dx\,\psi_n(x)\psi_j(x)=\delta_{nj}.$$

Непрерывный спектр в области $|k|<d$ невырожден и состоит из функций $\chi(x, k)$ со

свойствами

(П.3) $\quad \chi(x,k)=\chi^*(x,k)=\chi(x,-k),$

$$\int dx\,\chi(x,k)\chi(x,k')={}^1/_2\{\delta(k-k')+\delta(k+k')\}.$$

В области $|k|>d$ непрерывный спектр двукратно вырожден и при каждом k образует двумерное линейное пространство $\{\chi(x,k),\ \chi^*(x,k)\}$, причем

(П.4) $\quad \chi^*(x,k)=\chi(x,-k),$

$$\chi(x,k)=\begin{cases}\exp(ik_2x), & x\to+\infty,\\ a(k)\exp(ikx)+b(k)\exp(-ikx), & x\to-\infty,\end{cases}$$

$$k_2{}^2=k^2-d^2,\qquad \operatorname{sign}k_2=\operatorname{sign}k,\qquad |a(k)|^2-|b(k)|^2=k_2/k.$$

Скалярное произведение для $\chi(x,k)$ имеет вид

$$\int dx\,\chi^*(x,k')\chi(x,k)=2\pi(|a(k)|^2\delta(k-k')+a(k)b(k)\delta(k+k')).$$

Базис $\chi(x,k)$ приводится к ортонормированному базису $\psi(x,k)$ линейным преобразованием [4]

(П.5) $\quad \int dx\,\psi^*(x,k')\psi(x,k)=\delta(k-k').$

Несмотря на тривиальность выкладок в этом месте иногда допускаются ошибки. Так, приписание свойства (П.5) базису (П.4) в [5] привело к неправильному определению in- и out-полей.

Интегрирование в (19) ведется по асимптотикам функций $\chi(x,k)$, $\psi(x,k)$, которые имеют вид

(П.6) $\quad \chi(x,k)=\delta(k)\exp(ikx)+\delta^*(k)\exp(-ikx),\qquad x\to-\infty,$

$$\psi(x,k)=\begin{cases}\alpha_-(k)\exp(ikx)+\beta_-(k)\exp(-ikx), & x\to-\infty,\\ \alpha_+(k)\exp(ik_2x)+\beta_+(k)\exp(-ik_2x), & x\to+\infty.\end{cases}$$

Имеем

$$\int dx\,x\chi(x,k)\chi(x,k')\sim-\frac{\overleftarrow{d}}{d(ik)}\left[\frac{\delta^*(k)\delta(k')}{i(k-k'+i\varepsilon)}+\frac{\delta^*(k')\delta(k)}{i(k-k'-i\varepsilon)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^*(k)\delta^*(k')}{i(k+k'+i\varepsilon)}+\frac{\delta(k)\delta(k')}{i(k+k'-i\varepsilon)}\right],$$

$$\int dx\,x\psi^*(x,k)\psi(x,k')\sim\frac{\overleftarrow{d}}{d(ik)}\left\{\left(\frac{k_2}{k}\right)^2\left[\frac{\alpha_+^*(k)\alpha_+(k')}{i(k-k'-i\varepsilon)}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_+^*(k)\beta_+(k')}{i(k+k'-i\varepsilon)}+\frac{\beta_+^*(k)\alpha_+(k')}{i(k+k'+i\varepsilon)}+\frac{\beta_+^*(k)\beta_+(k')}{i(k-k'+i\varepsilon)}\right]-$$
$$\left.-\frac{\alpha_-^*(k)\alpha_-(k')}{i(k-k'+i\varepsilon)}-\frac{\alpha_-^*(k)\beta_-(k')}{i(k+k'+i\varepsilon)}-\frac{\beta_-^*(k)\alpha_-(k')}{i(k+k'-i\varepsilon)}-\frac{\beta_-^*(k)\beta_-(k')}{i(k-k'-i\varepsilon)}\right\}.$$

Дальнейшие вычисления проводим с помощью соотношений из теории обобщенных функций [11]:

$$\frac{\exp(i(\omega_k-\omega_{k'})t)}{(\Delta k)\pm i\varepsilon}=\begin{cases}\mp2\pi i\theta(\mp k)\delta(\Delta k), & t\to+\infty,\\ \mp2\pi i\theta(\pm k)\delta(\Delta k), & t\to-\infty,\end{cases}$$

$$(\Delta k)=(k\pm k').$$

Учитывая, что согласно (П.4)

$$T(k)=\sqrt{\frac{k_2}{k}}\frac{1}{a(k)}, \qquad R(k)=\frac{b^*(k)}{a(k)}, \tag{П.7}$$

получаем приведенный в тексте ответ.

Что касается вычисления in-операторов в (22), то, поступая аналогичным образом, получаем

$$a_{1\,\mathrm{in}}(k)=\theta(k)\{\alpha_-(k)a(k)+\beta_-^*(k)a(-k)\},$$

$$a_{2\,\mathrm{in}}(k)=\frac{k_2}{k}\theta(-k_2)\{\alpha_+(k)a(k)+\beta_+^*(k)a(-k)\},$$

$$b_{\mathrm{in}}(k)=2\theta(k)\delta(k)b(k).$$

Отсюда следуют приведенные в тексте перестановочные соотношения (23).

Литература

[1] *Jackiw R.*— Rev. Mod. Phys., 1977, *49*, № 3, 681—706.
[2] *Разумов А. В., Хрусталев О. А.*— ТМФ, 1976, *29*, № 3, 300—306.
[3] *Боголюбов Н. Н.* Сб. «Избранные труды», т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
[4] *Свешников К. А.* Ковариантная теория возмущений в окрестности классического решения. Препринт 82-79, Серпухов: ИФВЭ, 1982.
[5] *Steinmann O.*— Nucl. Phys., 1977, *B131*, № 4/5, 459—476.
[6] *Faddeev L. D., Korepin V. E.*— Phys. Rep., 1978, *42*, № 1, 1—87.
[7] *Behera S. N., Khare A.*— Pramana, 1980, *15*, № 9, 245—269.
[8] *Boyanovsky D., Masperi L.*— Phys. Rev., 1980, *D21*, № 6, 1550—1556.
[9] *Shapiro S. M., Axe J. D., Shirane G., Riste T.*— Phys. Rev., 1972, *B6*, № 11, 4332—4341.
[10] *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. I. М.: ИЛ, 1960.
[11] *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977.

Институт физики
высоких энергий

Поступила в редакцию
7.VII.1983 г.

SOLITON SCATTERING ON QUANTUM EXCITATIONS

Tverskoy V. B.

Interaction between solitons and quantum excitations in nonlinear scalar field models in two-dimensional space-time is considered.